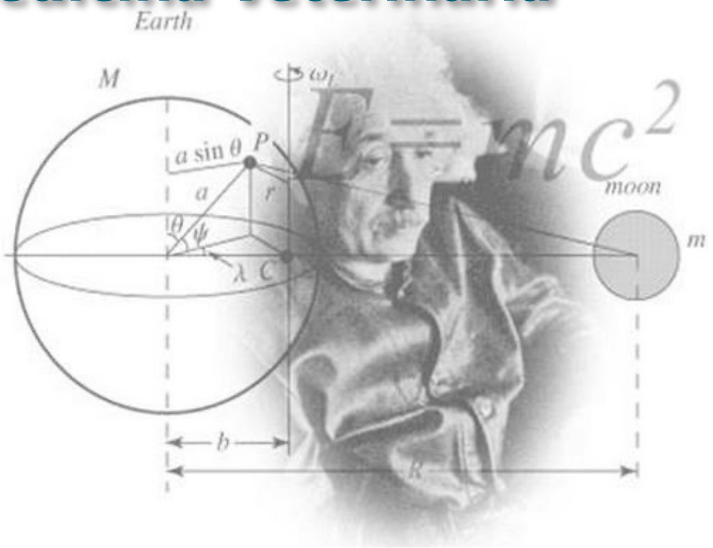
INTRODUZIONE

Fisica Applicata
Corsi di Laurea in Medicina Veterinaria
A.A. 2023/24



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI ALDO MORO

Dott. Nicola Nicassio

Università di Bari

Email: nicola.nicassio@uniba.it

ARGOMENTI DEL PRE-CORSO

1. **Introduzione:**
   a. Grandezze fisiche e unità di misura
   b. Richiami di matematica
2. **Vettori**
3. **Meccanica**
   a. Cinematica
   b. Dinamica del punto materiale, Lavoro ed Energia
   c. Meccanica dei Fluidi
4. **Calorimetria e Termodinamica**
   a. Temperatura, scambi di calore
   b. Principi della Termodinamica

Grandezze e unità di misura

COSA È LA FISICA

La FISICA è la scienza che ha per obiettivo lo studio della natura, dei costituenti della materia e delle loro interazioni

Ricerca e formula leggi generali per la descrizione dei fenomeni naturali; il confronto tra teoria ed esperienza è alla base della validità di tali leggi che devono essere dotate di potere predittivo.

COSA È LA FISICA

Grandezza Fisica

La grandezza fisica è una proprietà suscettibile di una definizione operativa, cioè di un procedimento atto a misurarne l'entità dal confronto con una unità di misura.

Legge Fisica

La legge fisica è una relazione fra diverse grandezze fisiche stabilita da esperimenti o da deduzioni teoriche, suscettibile di essere verificata o confutata da altri esperimenti.

GRANDEZZE FISICHE

Fenomeno Fisico

LE GRANDEZZE FISICHE SERVONO A DESCRIVERE I FENOMENI FISICI

Grandezza Fisica

I FENOMENI FISICI SONO DESCRITTI DA RELAZIONI MATEMATICHE

LE GRANDEZZE FISICHE SONO RAPPRESENTATE DA SIMBOLI

Relazioni matematiche

Simbolo

LE RELAZIONI MATEMATICHE SONO RELAZIONI (EQUAZIONI, ECC.) TRA SIMBOLI CHE RAPPRESENTANO GRANDEZZE FISICHE

ESEMPIO: STUDIO DEL MOTO DI UNA BICICLETTA

FENOMENO FISICO:

Moto (bidimensionale)

GRANDEZZE FISICHE:

Lunghezza, Tempo

SIMBOLI:

s, t

RELAZIONE MATEMATICA:

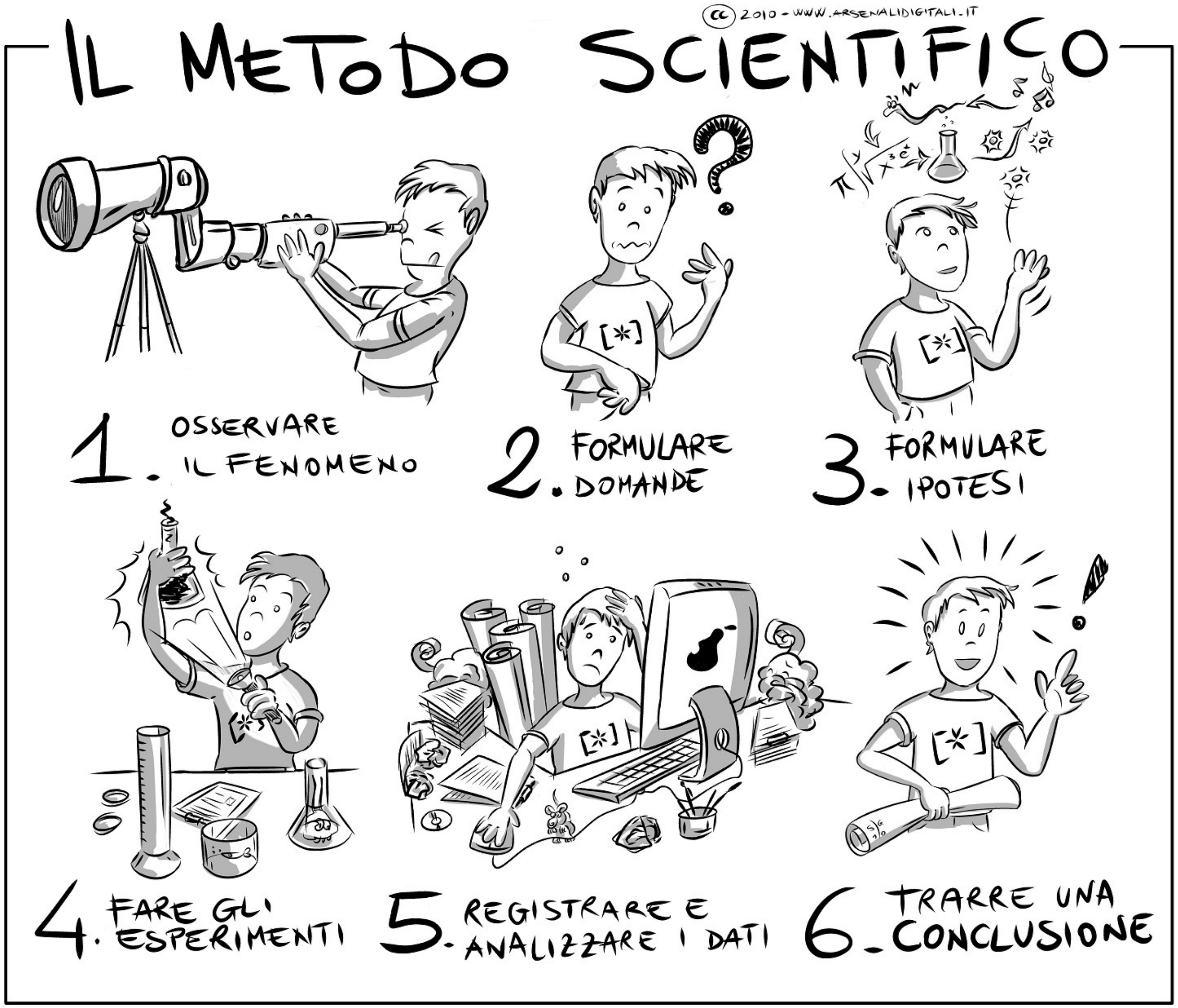
$s=f(t)$, oppure $s=s(t)$

IL METODO SCIENTIFICO

L'indagine in fisica si affida a **tre passaggi fondamentali**:

1. ***Osservazione:*** accurato e critico esame di un fenomeno
2. ***Modello teorico:*** sulla base delle conoscenze acquisite, e tramite l'uso di un *modello* del sistema in esame, lo scienziato può, grazie all'uso della matematica, predire fenomeni non ancora osservati e/o verificare le relazioni tra fenomeni noti.
3. ***Sperimentazione:*** osservazione di questo fenomeno in condizioni predisposte e controllate per la verifica del modello teorico

IL METODO SCIENTIFICO



UNITA' DI MISURA

La misura viene effettuata per mezzo del confronto tra due GRANDEZZE OMOGENEE, una delle quali rappresenta la grandezza di riferimento campione e viene chiamata

UNITÀ DI MISURA

Metro campione
(riferimento per la misura di lunghezze)

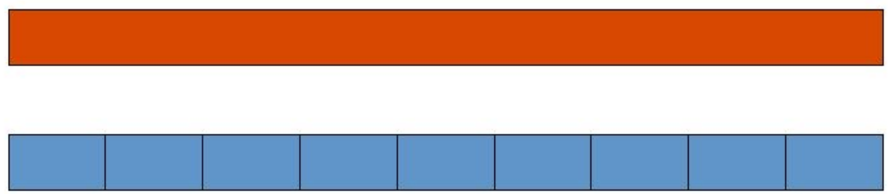
UNITA' DI MISURA

Una UNITA' DI MISURA deve avere alcune importanti caratteristiche:

1. Deve restare **costante** nel tempo;
2. Deve essere facilmente **riproducibile**, in modo da poter essere utilizzata ogni qualvolta si renda necessario il suo uso;
3. Deve essere **confrontabile** con la grandezza che s'intende misurare, cioè non deve essere né troppo piccola né troppo grande;

MISURA DI UNA GRANDEZZA FISICA

L = lunghezza da misurare
striscia di carta = lunghezza campione



$\boxed{L} = \boxed{9}\ \boxed{\text{strisce}}$

Simbolo della grandezza fisica

Misura della grandezza fisica

Unità di misura della grandezza

MISURE RELATIVE ED ASSOLUTE

Per effettuare la misura di una grandezza fisica (ad esempio una lunghezza) è necessario:

- ***Introdurre una unità di misura***
  (metro, pollice,…)

- ***Costruire uno strumento di misura***
  (righello, bilancia,…)

Si possono poi effettuare misure relative o assolute

MISURA RELATIVA

Si effettua il confronto diretto della grandezza da misurare con il campione di misura.

Se si vuole misurare una lunghezza e si ha come campione di misura un'asta di legno lunga 1 metro, si misura quante volte l'asta di legno è contenuta nella lunghezza da misurare.

Eventualmente, si usano multipli e sottomultipli dell'unità di misura scelta.

MISURA ASSOLUTA

Si effettua la misura tramite leggi fisiche precedentemente stabilite.

Esempio: Misura della VELOCITA' di un corpo

Sappiamo che la velocità è un rapporto tra spazio percorso e tempo (ricordare che la velocità delle automobili si misura in km/h) quindi:

- **Si misura lo spazio s_1 percorso dal mezzo di cui si vuole misurare la velocita'**
- **Si misura il tempo t_1 impiegato a percorrere tale spazio**
- **Si determina $v = s_1/t_1$**

N.B. v è la velocità media!!!

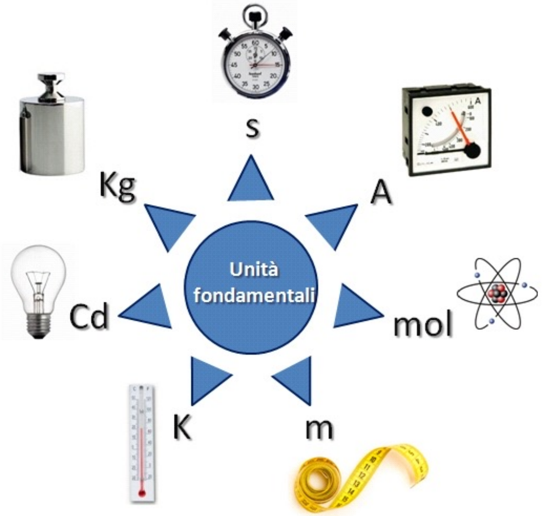
SISTEMI DI UNITÀ DI MISURA

Nel 1960 l'XI Conferenza di Pesi e Misure svoltasi a Parigi ha introdotto un sistema di misura riconosciuto quasi universalmente ed entrato in vigore nei paesi dell'Unione Europea nel 1978.

SISTEMI DI UNITÀ DI MISURA

Unità di misura fondamentali del SISTEMA INTERNAZIONALE:

Grandezza fisica	Simbolo della grandezza	Nome dell'unità di misura	Simbolo dell'unità di misura
lunghezza	l	metro	m
massa	m	kilogrammo	kg
tempo	t	secondo	s
corrente elettrica	I	ampere	A
temperatura	T	kelvin	K
quantità di sostanza	n	mole	mol
intensità luminosa	iv	candela	cd



RICHIAMI DI MATEMATICA

Potenze di 10

$10000 = 10^4$

$2000 = 2 \cdot 10^3$

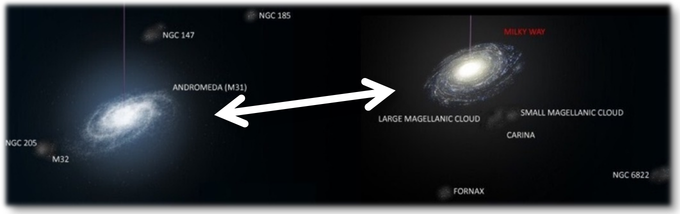
$137000 = 1.37 \cdot 10^5 = 137 \cdot 10^3$

$0.001 = 10^{-3}$

$0.00248 = 2.48 \cdot 10^{-3} = 248 \cdot 10^{-5}$

Ricorda: $10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}$, $10^a / 10^b = 10^{a-b}$

ALCUNE MISURE DI LUNGHEZZA

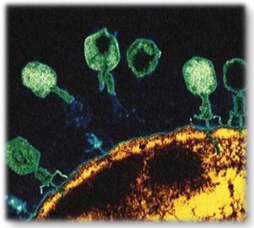


Via Lattea – Andromeda ($2 \cdot 10^{22}$ m)

10^{18} volte più grande

Mt Everest ($9 \cdot 10^{3}$ m)

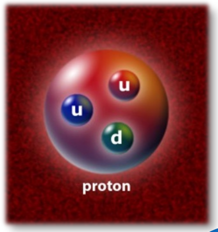
10^{12} volte più grande



Virus (10^{-8} m)

10^{7} volte più grande

Protone (10^{-15} m)

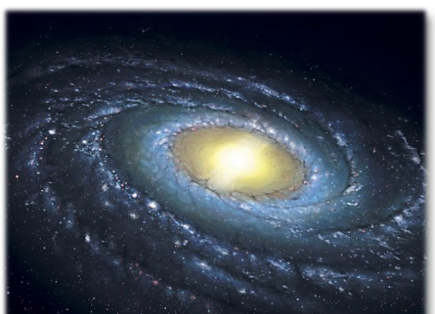


10^{37} (10 miliardi di miliardi di miliardi di miliardi) volte più grande

ALCUNE MISURE DI MASSA

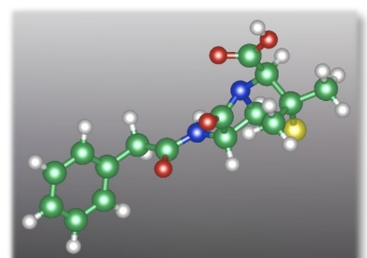
Nostra galassia	$2 \cdot 10^{41}$ kg
Sole	$2 \cdot 10^{30}$ kg
Luna	$7 \cdot 10^{22}$ kg
Elefante	$5 \cdot 10^{3}$ kg
Molecola di penicillina	$2 \cdot 10^{-17}$ kg
Atomo di uranio	$2 \cdot 10^{-25}$ kg
Protone	$2 \cdot 10^{-27}$ kg

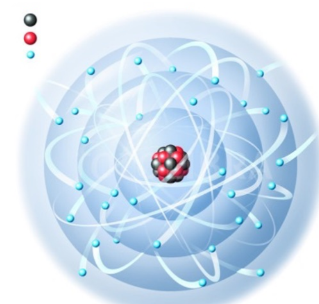
Via Lattea



Luna

Penicillina





Uranio

ALCUNE MISURE DI TEMPO

Età dell'universo	$5 \cdot 10^{17}$ s
Età della piramide di Cheope	$1 \cdot 10^{11}$ s
Vita media dell'uomo	$2 \cdot 10^{9}$ s
Lunghezza del giorno	$9 \cdot 10^{4}$ s
Vita media di un mesone	$2 \cdot 10^{-16}$ s

Se l'evoluzione dell'Universo fosse condensata in un unico giorno…

Un anno corrisponde a quanti secondi?

GRANDEZZE DERIVATE

Qual è l'unità di misura della velocità nel SI?

La velocità, nel SI, va misurata in m/s

- **Unità di misura ottenuta combinando due unità fondamentali tramite una relazione matematica**

Altri esempi:

- **Watt** = kg m^2/s^3
- **Newton** = kg m/s^2
- **Pressione: nel SI in Pascal** = N/m^2 = kg/(m s^2), ma si continuano ad usare: millibar, atmosfera, …

PREFISSI PER UNITÀ DI MISURA

Utili per definire multipli e sottomultipli

Multipli		
T	tera	10^{12}
G	giga	10^{9}
M	mega	10^{6}
k	kilo	10^{3}
h	etto	10^{2}
da	deca	10^{1}

Sottomultipli		
d	deci	10^{-1}
c	centi	10^{-2}
m	milli	10^{-3}
µ	micro	10^{-6}
n	nano	10^{-9}
p	pico	10^{-12}

e non solo…

2 300 m = 2.3 km

1 500 000 W = 1.5 MW

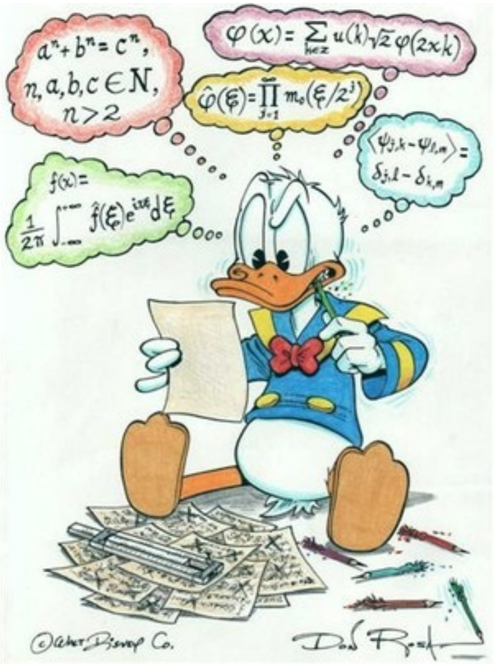
$7 \cdot 10^{-9}$ g = 7 ng

0.005 s = 5 ms

EQUAZIONI DIMENSIONALI

Cosa è una **equazione dimensionale**?

È una equazione in cui tutti i termini sono le «dimensioni» delle grandezze fisiche in gioco.



Esempio:

velocità= spazio/tempo

Equazione dimensionale:

[velocità] = [metri]/[secondo]

EQUAZIONI DIMENSIONALI

A cosa serve una equazione dimensionale?

- **A definire le unità di misura delle grandezze derivate**
- **A controllare la coerenza dimensionale delle relazioni matematiche che legano più grandezze in una legge fisica**
  → Molto importante in campo pratico!

ESEMPIO: $\mathbf{v^2=2st^2}$

È una equazione corretta oppure no?

EQUAZIONI DIMENSIONALI

Coerenza dimensionale delle equazioni fisiche

- **Membro sinistro e destro dell'equazione devono avere le stesse dimensioni fisiche**
- **Addizione e sottrazione sono possibili solo tra termini omogenei (con stesse dimensioni).**
  - ✓ **E' possibile invece moltiplicare e dividere grandezze con dimensioni diverse**
- **Le funzioni trigonometriche, logaritmo, esponenziale devono avere argomenti adimensionali, e restituiscono valori adimensionali**

ESEMPIO: $\mathbf{v^2=2st^2}$

È una equazione corretta? **No!** A sinistra: $[L^2\ T^{-2}]$, a destra: $[L\ T^2]$

CONVERSIONE DI UNITÀ DI MISURA

Spesso si usano unità diverse da quelle del SI
(vedi masse e lunghezze nei paesi anglosassoni)

Conversione

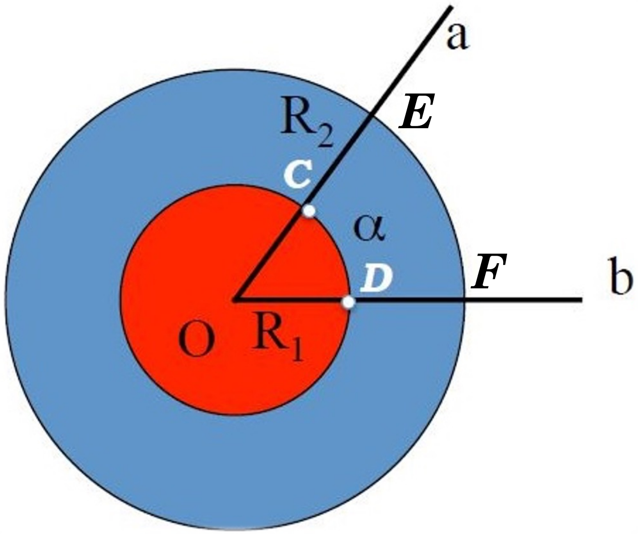
(moltiplicare la misura per il fattore di conversione dell'unità di misura; ciò per ogni unità di misura da convertire)

$$140\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 140\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000}{1}\frac{\text{m}}{\text{km}} \cdot \frac{1}{3600}\cdot\frac{\text{h}}{\text{s}} = 38.9\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

MISURA DEGLI ANGOLI

Angolo = arco di circonferenza / raggio della circonferenza

- **C = Intersezione della semiretta Oa con il cerchio di raggio R_1**
- **D = Intersezione della semiretta Ob con il cerchio di raggio R_1**
- **E = Intersezione della semiretta Oa con il cerchio di raggio R2**
- **F = Intersezione della semiretta Ob con il cerchio di raggio R2**



Angolo (in radianti) $\alpha = \mathrm{arco(CD)}/\, R_1 = \mathrm{arco(EF)}/\, R_2$

Quindi: $2\pi = 360°$ (valore in gradi dell'angolo giro)

In generale: $360° : 2\pi = \alpha° : \alpha_{RAD}$

$\rightarrow \alpha° = 360°/2\pi \approx 57.3 \cdot \alpha_{RAD}$

Cifre significative

CIFRE SIGNIFICATIVE

Misuriamo la lunghezza di un tavolo con un metro graduato sino al millimetro
Risultato: L = 72.4 cm

In questo caso abbiamo 3 cifre significative:

7, 2 e 4

Domanda: possiamo scrivere
L = 72.40 cm oppure L = 72.400 cm?

In matematica:
72.4 cm = 72.40 cm = 72.400 cm
IN FISICA NO!!

CIFRE SIGNIFICATIVE

Il risultato di una misura è sempre affetto da un errore, che dipende dallo strumento e dal metodo utilizzati, ma non dall'imperizia dello sperimentatore, si scrive:

$$L = (72.4 \pm 0.1)\ \text{cm}$$

Ovvero indicando il risultato della misura ± l'errore di misura

CIFRE SIGNIFICATIVE

L = 72.4 cm significa:

«Abbiamo misurato con precisione del millimetro (nel nostro caso, 4 millimetri) e non sappiamo quanti decimi di millimetri sia lungo il tavolo, cioè ignoriamo quale numero ci sarebbe dopo il '4'»

Cosa vuol dire, invece:
L = 72.40 cm ?
"Abbiamo misurato con precisione del decimo di millimetro ed abbiamo trovato un valore di 0".

Questa affermazione è insensata se utilizziamo un righello classico, con precisione del millimetro

CIFRE SIGNIFICATIVE

Cifre significative per risultati di operazioni:

- **Addizione/sottrazione**
  Mantenere la posizione dell'addendo con minore precisione:

  13.214 + 234.6 + 7.0350 + 6.38 = **261.2**

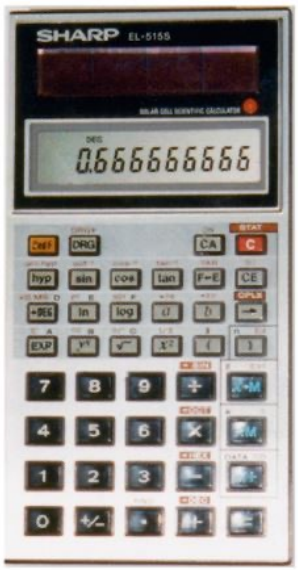
- **Moltiplicazione/divisione**
  Utilizzare il numero di cifre significative pari al fattore che ne ha di meno:

  0.00435 × 4.6 = **0.020**

Ricordandosi di **arrotondare** correttamente l'ultima cifra mantenuta…

CIFRE SIGNIFICATIVE

Conclusione:
non inserite cifre decimali inutili ed errate!



ATTENZIONE!
<u>La calcolatrice non 'capisce' le cifre significative!!!</u>

Provate a fare:
2 diviso 3

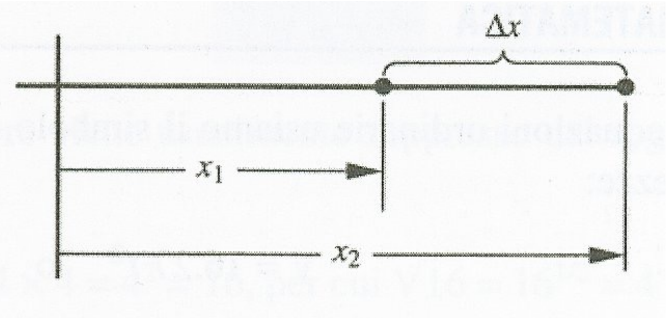
Il risultato della calcolatrice è: 0.6666666…
Se invece 2 e 3 sono valori di una misura (es. cm), il risultato ««corretto»» è 0.6 cm^2

Richiami di Matematica

Variazione di una grandezza: Δ

- Un oggetto è posto nella posizione x_1=2cm ad un certo istante di tempo. Successivamente la posizione diventa x_2=9cm
- La distanza della quale si è mosso è anche detta variazione di x ed è :

$$\Delta x = x_{finale} - x_{iniziale} = x_2 - x_1$$



- Il simbolo Δx indica l'incremento della grandezza x.
- Δx NON indica il prodotto di Δ per x
- Per esempio: t_2-t_1= Δt = differenza di tempo.
  - Δt>0 se l'istante t_2 è successivo a t_1
  - Δt<0 se l'istante t_2 precede t_1

Valore assoluto di una grandezza

- Valore assoluto o modulo di x si indica con |x|
- Il valore assoluto misura la "grandezza" di un numero senza tener conto del suo segno:
  - |+x|=x
  - |-x|=x
- Esempio:

$$|-4x| = \begin{cases} 4x & \text{se } x > 0 \\ -4x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Sommatoria

- In molti problemi di fisica è necessario sommare una serie di numeri
- Ad esempio per determinare la massa totale M di un sistema composto da molte masse singole m_1, m_2, m_3, m_4,… possiamo scrivere:

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \dots + m_N$$

dove N è il numero totale di masse del sistema

- Per abbreviare la lunghezza della somma si utilizza il simbolo Σ (sommatoria), pertanto:

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

i= indice della sommatoria

m_i= massa di una generica particella dell'insieme;
Per i=1: $m_i = m_1$, i=2: $m_i = m_2$

SISTEMI DI EQUAZIONI DI PRIMO GRADO

- In alcuni problemi di fisica si può avere un'equazione che coinvolge più di una incognita.

  Per esempio:

  $$6x+2y=6$$

  Per poterla risolvere in modo univoco è necessaria un'altra equazione.

- In generale, per risolvere un problema con n incognite, bisogna avere n equazioni

ESEMPIO

- Soluzione di un sistema di due equazioni di primo grado in due incognite:

$$\begin{cases} 6x+2y=6 & (1) \\ 8x-4y=28 & (2) \end{cases}$$

- Un metodo per risolvere questa equazione è quello per sostituzione (ma non è l'unico):
  - Si risolve prima una delle due equazioni rispetto a y e quindi si sostituisce l'espressione trovata nella seconda equazione

$$x=2, y=-3$$

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

- Le equazioni di secondo grado coinvolgono la seconda potenza dell'incognita e hanno forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- La soluzione di questa equazione è:

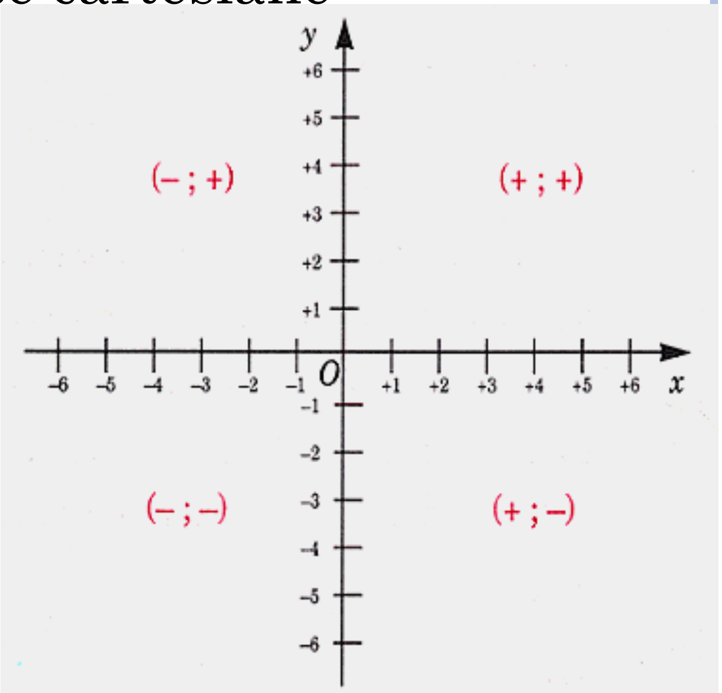
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Tre casi sono possibili:
  - $b^2=4ac$: due soluzioni coincidenti $x = -\frac{b}{2a}$
  - $b^2>4ac$: due soluzioni reali $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
  - $b^2<4ac$: due soluzioni immaginarie che non tratteremo nella soluzione dei nostri problemi

Geometria analitica

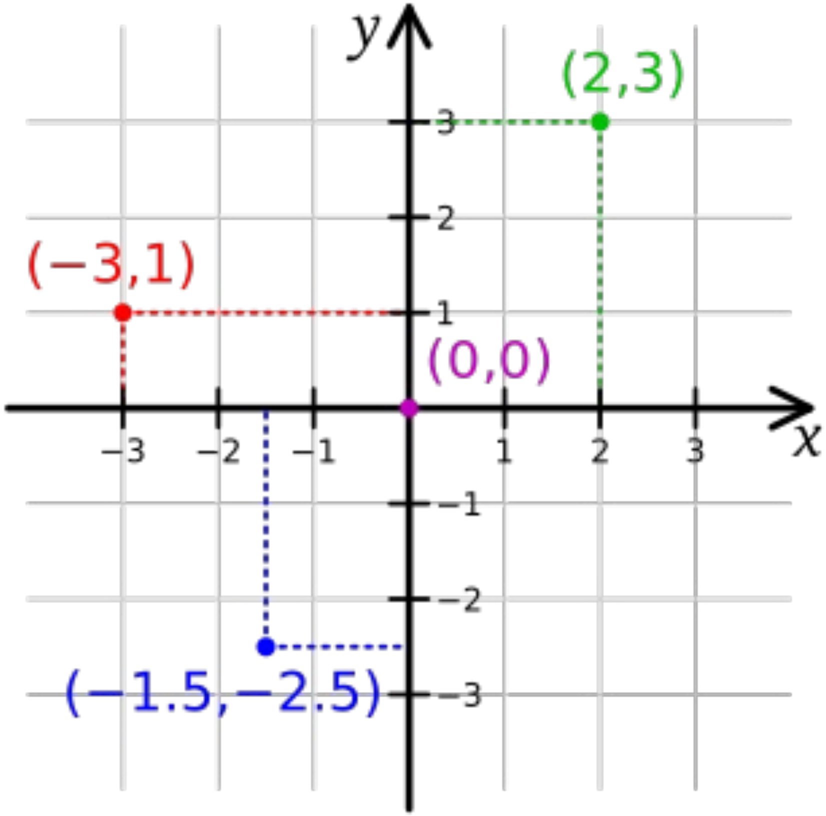
COORDINATE CARTESIANE

- Le informazioni di una situazione fisica sono solitamente presentate su una coppia di assi coordinati:
  - X per l'asse orizzontale o asse delle ascisse
  - Y per l'asse verticale o asse delle ordinate
- I sistemi X-Y sono chiamati coordinate cartesiane ortogonali
- La posizione di un punto è specificata assegnando due numeri (x,y):
  - x: valore della coordinata x
  - y: valore della coordinata y



Coordinate cartesiane

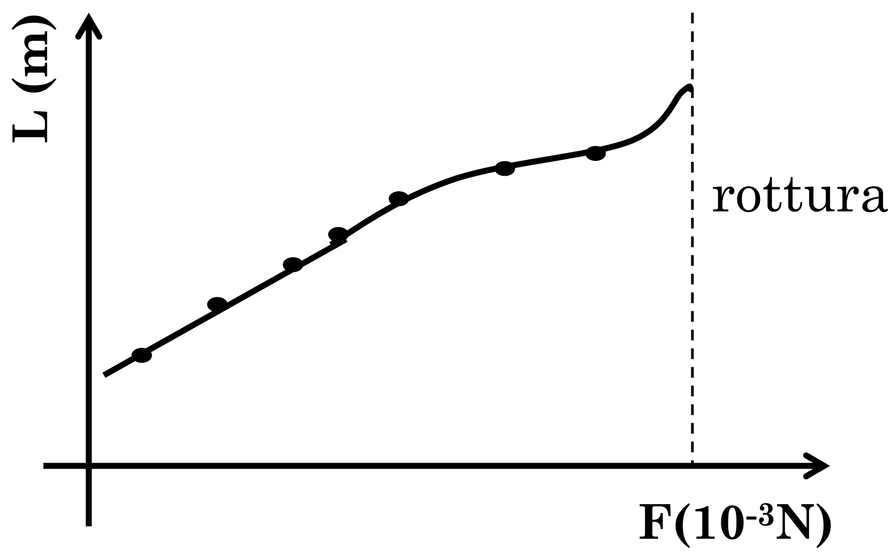
- Posizione di alcuni punti (x,y) nel piano cartesiano X-Y
- Gli assi X-Y hanno proprie unità di misura, non necessariamente uguali



44

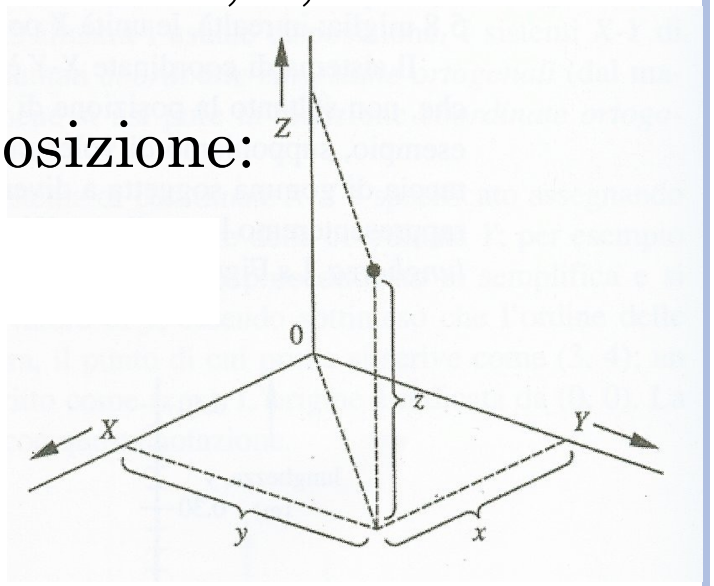
ESEMPIO

- Un sistema di coordinate X-Y è utile per rappresentare vari tipi di situazioni fisiche, non solo delle distanze.
- Esempio: lunghezza di un elastico di gomma teso da una forza di trazione variabile



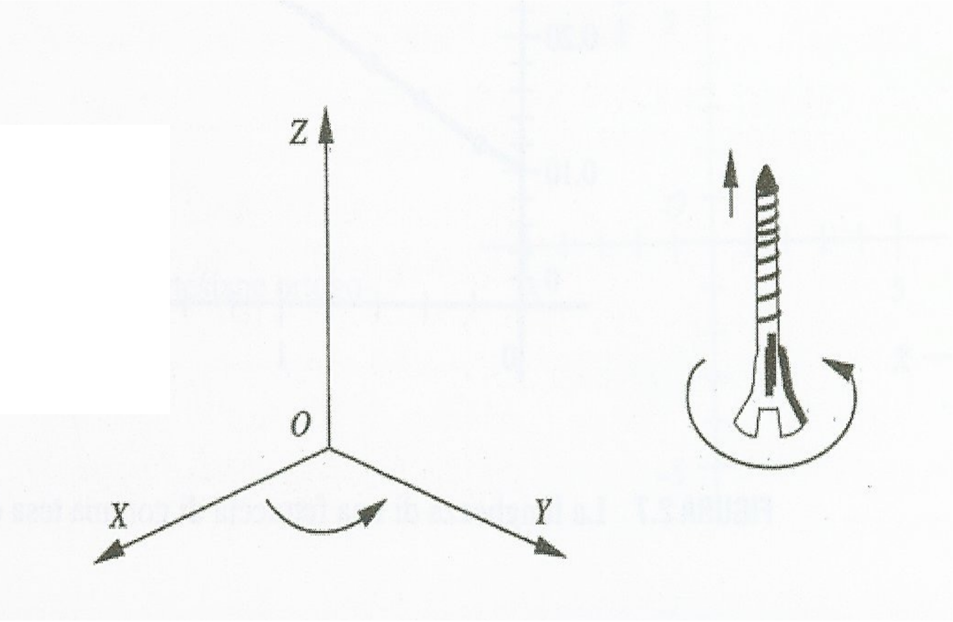
SISTEMA DI COORDINATE TRIDIMENSIONALE

- Un sistema di coordinate X-Y consente di determinare la posizione di un punto P su un piano (cioè in due dimensioni, X e Y)
- Per localizzare un punto nello spazio è necessario definire anche la quota o altezza del punto
- E' opportuno utilizzare un sistema di coordinate tridimensionale aggiungendo un terzo asse, Z, al sistema di coordinate X-Y
- Un punto P è rappresentato dalla posizione:
  - P(x,y,z), coordinate del punto P



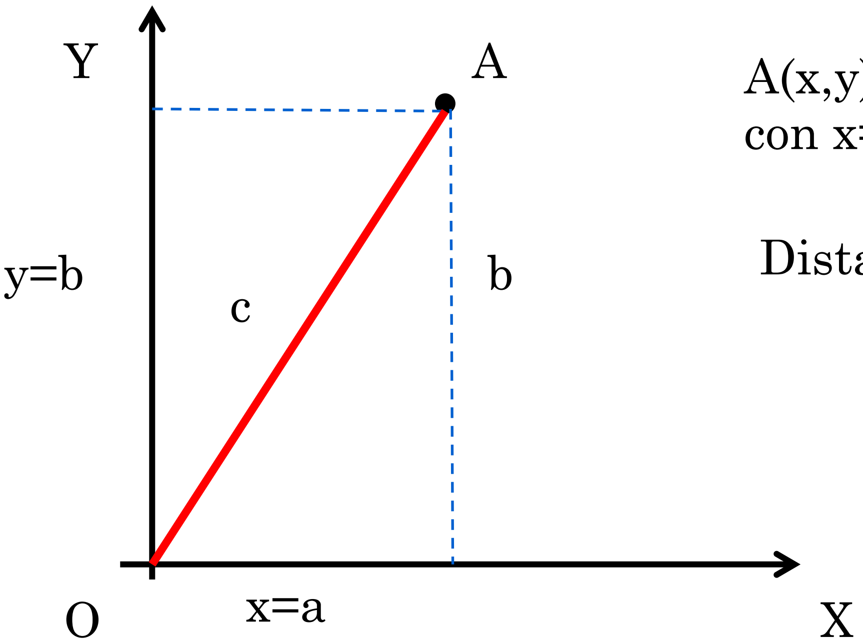
SISTEMA DI COORDINATE TRIDIMENSIONALE

- Gli assi X,Y,Z in un sistema di coordinate tridimensionali non sono orientati in modo casuale
- Sistema di coordinate destrorso:
  - Se si immagina che una vite ordinaria venga avvitata nel senso di trasportare l'asse X verso Y, la vite avanza nella direzione positiva dell'asse Z



Distanza tra due punti

- Come si determina la distanza fra due punti in un sistema di coordinate?
- Poiché gli assi di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali formano angoli retti si può usare il teorema di Pitagora

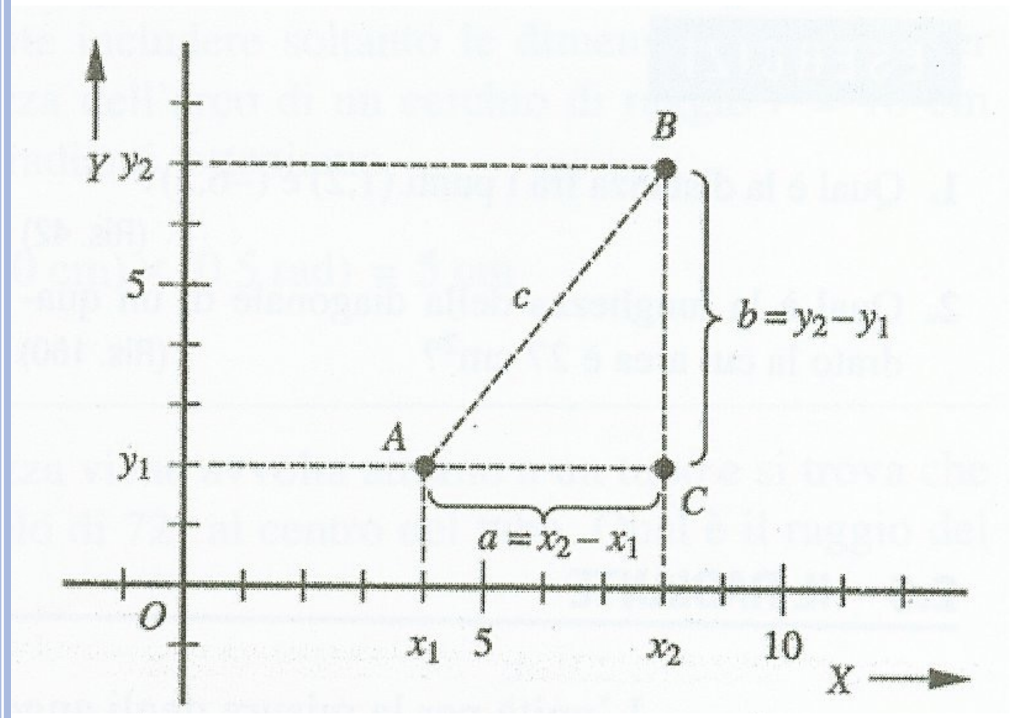


A(x,y)
con x=a, y=b

Distanza OA=c

Distanza tra due punti

- Quanto dista il punto $A(x_1,y_1)$ dal punto $B(x_2,y_2)$?



I punti A, B, C definiscono un triangolo rettangolo di lati a e b noti:

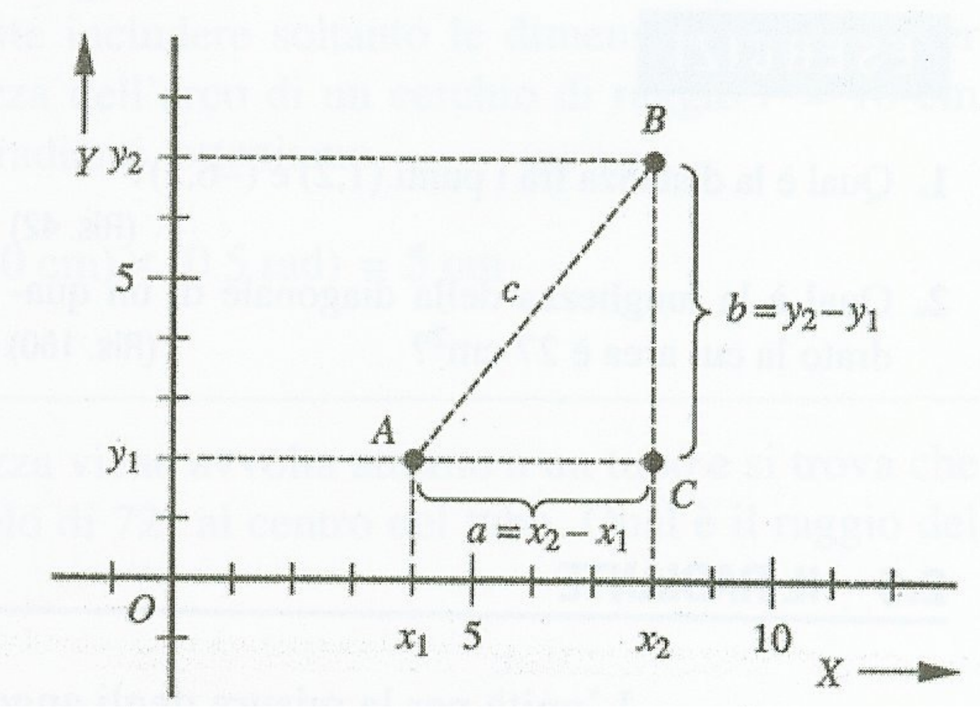
- $a=x_2-x_1$
- $b=y_2-y_1$

La lunghezza del terzo lato c è :

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Esempio

- In figura:
  - A: $(x_1,y_1)=(4,2)$
  - B: $(x_2,y_2)=(8,7)$



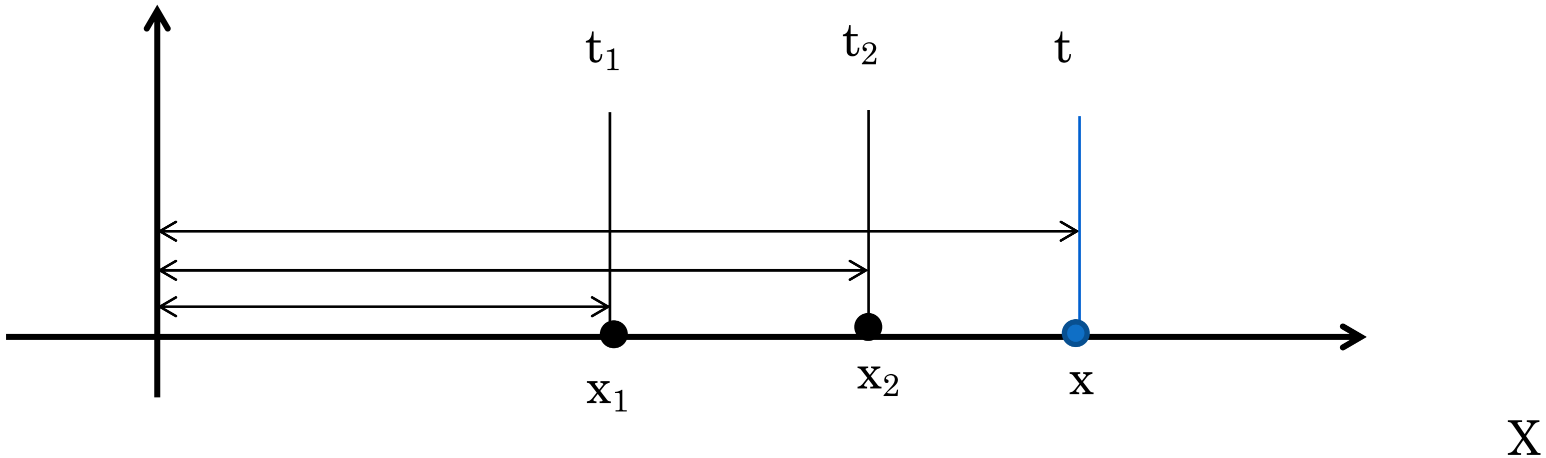
- La distanza di A da B è data da:

$$c = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(8-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41} = 6.4$$

Funzioni e grafici

Concetto di funzione

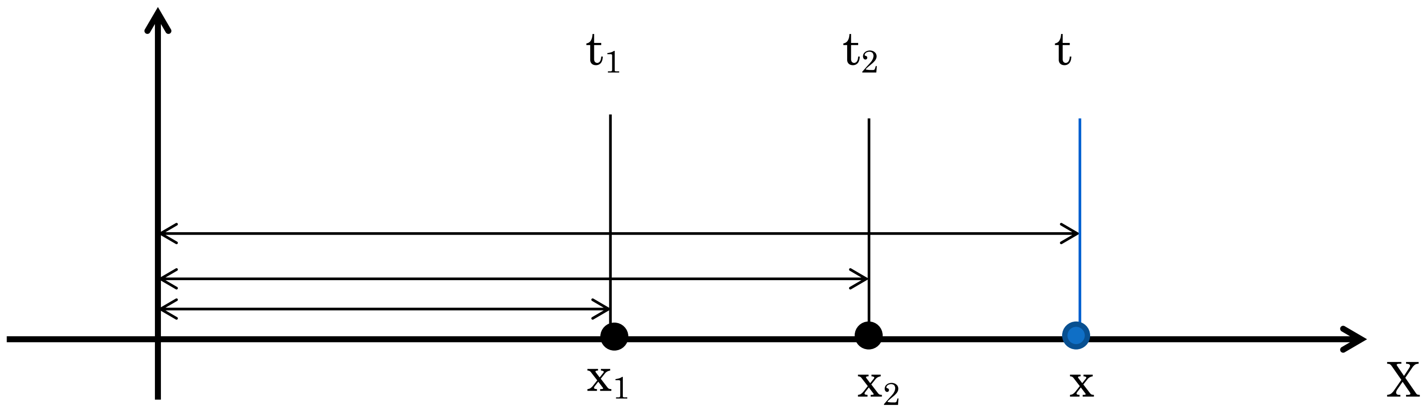
- In fisica si utilizzano spesso relazioni funzionali tra diverse variabili fisiche
- Ad esempio:
  - Una particella si muove lungo l'asse X.
  - Sia x la posizione della particella al tempo t rispetto all'origine O.
  - All'istante di tempo t_1, la posizione è x_1
  - Ad un istante successivo t_2 la posizione è x_2, e così via…



Concetto di funzione

- La posizione x della particella varia in funzione del tempo t che è trascorso.
- Matematicamente:

$$x=f(t) \text{ ovvero "x è una funzione di t"}$$



- Ad ogni istante t possiamo determinare la posizione x della particella rispetto all'origine

CONCETTO DI FUNZIONE

- Nell'equazione $x=f(t)$, le grandezze x e t rappresentano delle variabili:
  - t → variabile indipendente
  - x, per la quale determiniamo i valori per ogni t → variabile dipendente
  - In altre parole: la posizione x dipende dal tempo t che è trascorso

CONCETTO DI FUNZIONE

- La particolare forma di f(t) dipende dal problema fisico che si sta affrontando.
- L'espressione f(t) che mette in relazione x e t si chiama relazione funzionale
- L'informazione quantitativa che otteniamo in un esperimento è ciò che definisce i dati.
- I dati sono usati per determinare le relazioni funzionali fra le variabili dell'esperimento

Rappresentazione di relazioni funzionali

- Come si possono rappresentare le relazioni funzionali?
  - Per mezzo di una tabella
  - Per mezzo di un grafico
  - Per mezzo di una equazione

La retta

- Una delle relazioni funzionali più semplici che può esistere fra due variabili è la relazione lineare e si verifica quando:
  - Una delle due variabili è direttamente proporzionale all’altra
  - È rappresentata graficamente da una retta

La retta

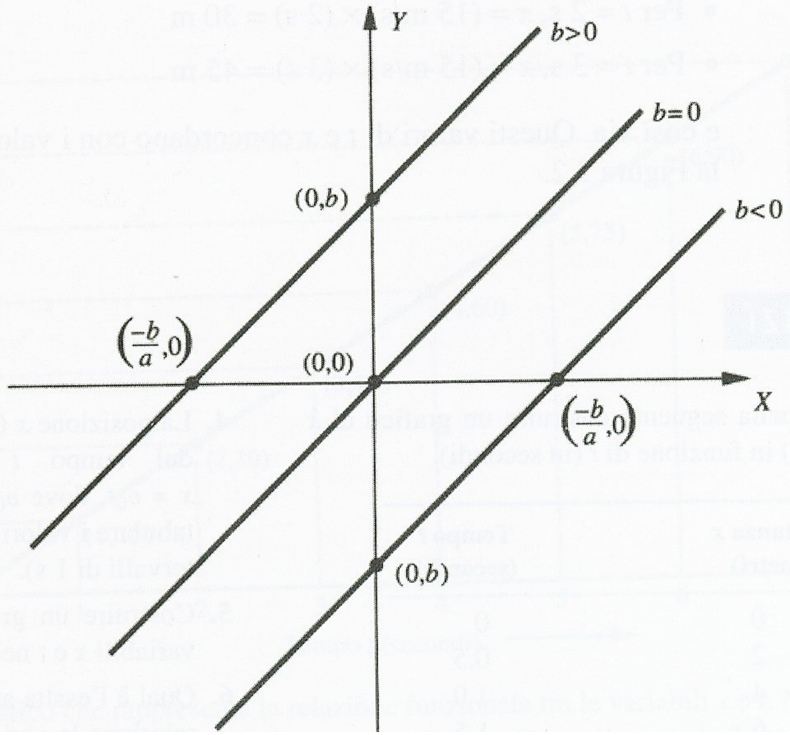
- Una retta generica è rappresentata dall'equazione:

$$y = ax + b$$

  - x → variabile indipendente
  - y → variabile dipendente
  - a, b → costanti
- Poiché y=ax+b è un'equazione le grandezze y, ax, b devono avere le stesse dimensioni
- Se b=0, y=ax ovvero y è proporzionale a x

Grafico di una retta

y= ax+b **a>0**



- Variabile indipendente x sull'asse orizzontale
- Variabile dipendente y sull'asse verticale
- Intersezione con asse y
  - Per x=0 → y=a·0+b=b
- Intersezione con asse x
  - Per y=0 → 0=a·x+b

$$\Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

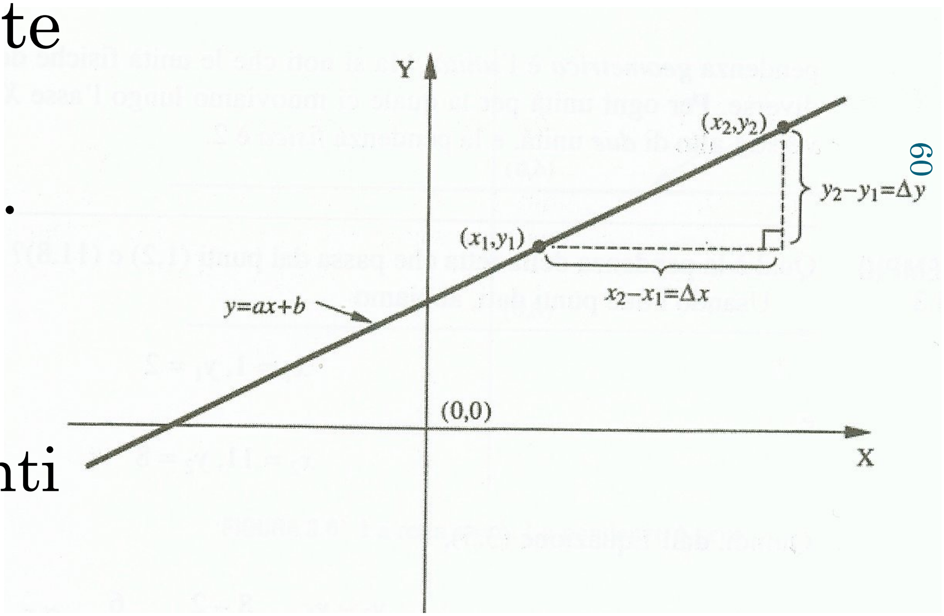
Pendenza di una retta

- Caratteristica importante della retta è la sua pendenza o inclinazione.

  Consideriamo la retta:

  y=ax+b

  Che passa attraverso i punti (x_1,y_1) e (x_2,y_2)

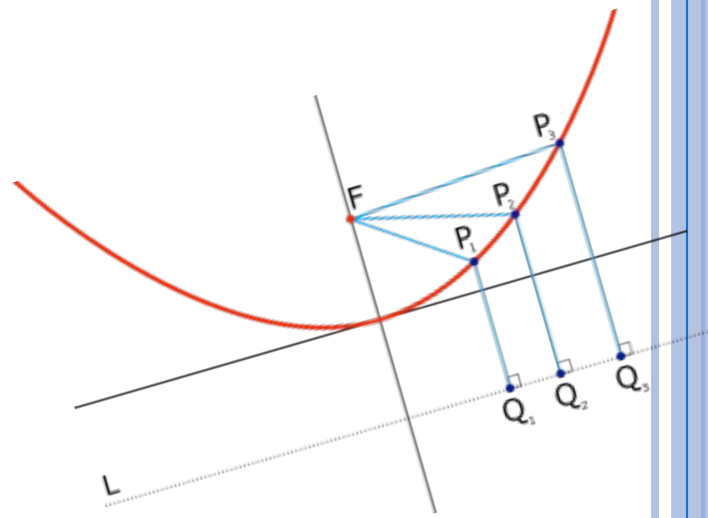


- Si definisce:

$$pendenza = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

LA PARABOLA

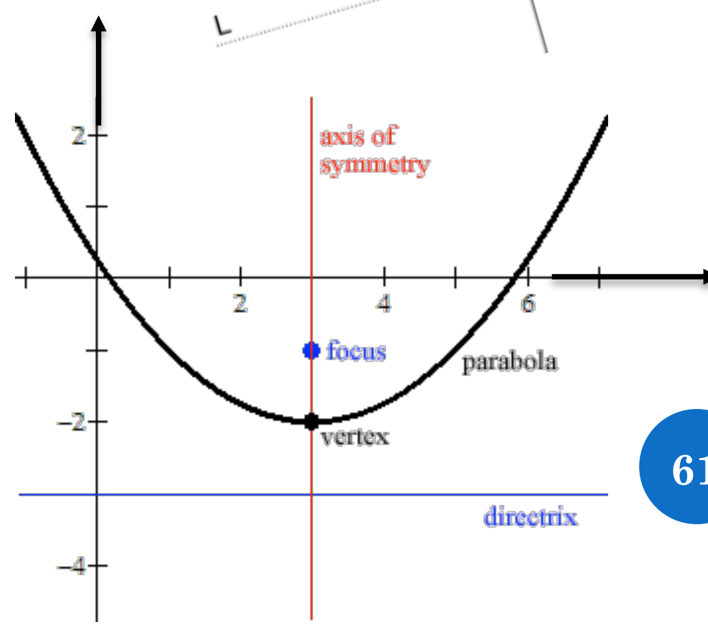
- Una **parabola** è l'insieme dei punti del piano equidistanti da una retta **L** (detta **direttrice**) e da un punto **F** (detto **fuoco**) non contenuto in L



- Una parabola con asse di simmetria parallelo all' asse y è rappresentata dall'equazione:

$$y = ax^2 + bx + c$$

  - x → variabile indipendente
  - y → variabile dipendente
  - a, b, c → costanti

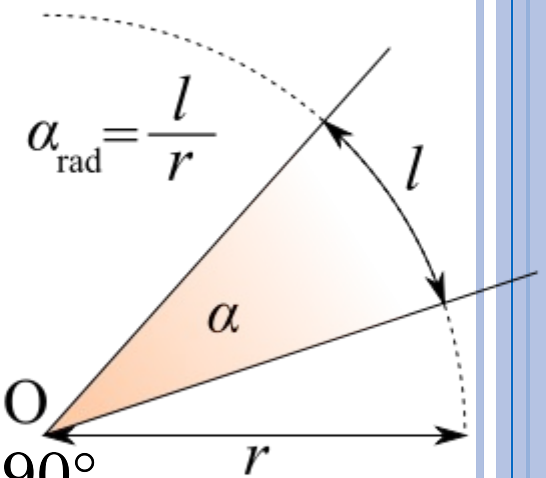


Trigonometria

Il radiante

- L' unità di misura più conveniente per la misura degli angoli in fisica è il radiante o rad.
- La misura in radianti di un angolo e' il rapporto tra l'arco di circonferenza sotteso dall'angolo e il raggio della circonferenza.

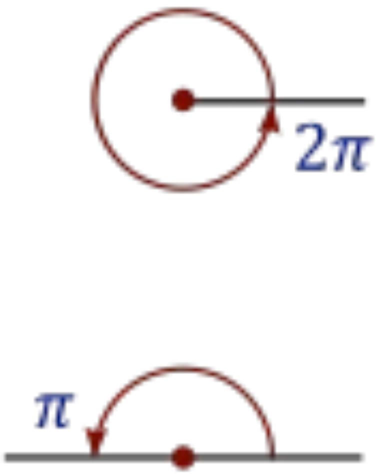
$$\alpha_{\text{misurato in rad}} = \frac{l}{R}$$

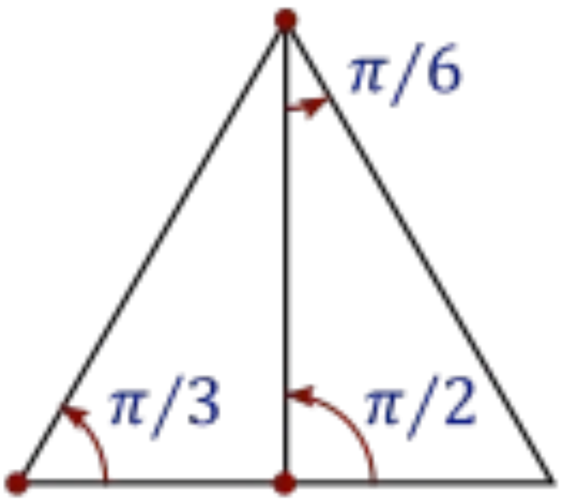


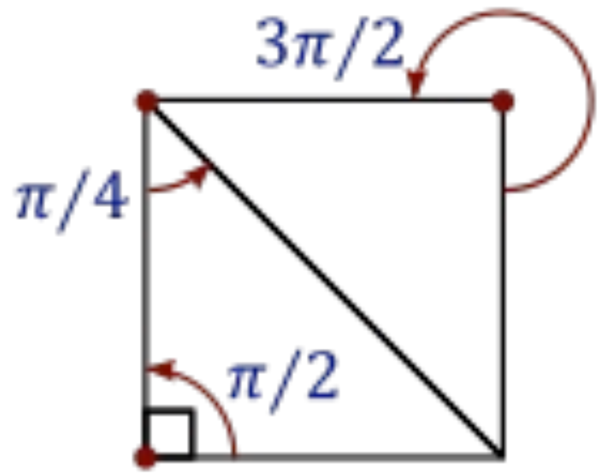
Si calcolino i valori in radianti di 360°,180°, 90°

IL RADIANTE

- Semplici Triangolo equilatero Quadrato







Il radiante

- In generale:

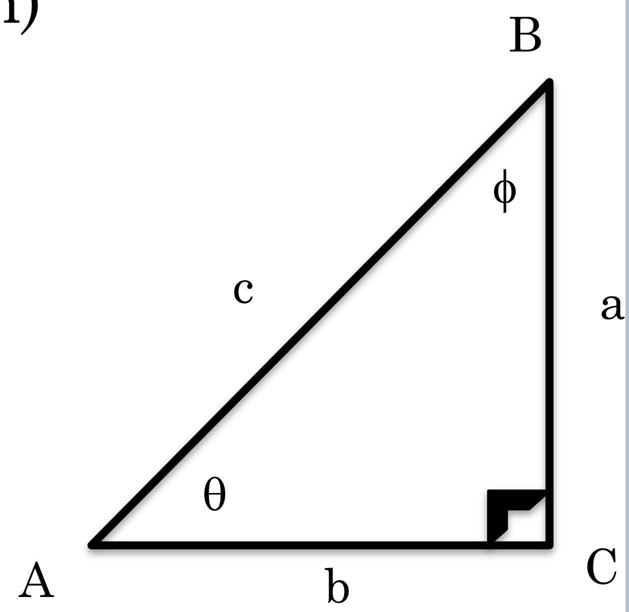
$$\frac{\alpha°}{\alpha(rad)} = \frac{360}{2\pi}$$

$$\alpha(rad) = \frac{2\pi}{360°}\alpha°$$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE : SEN

- Sia dato un triangolo rettangolo ABC
  - $c^2 = a^2 + b^2$

- Definizione della funzione seno (sen)

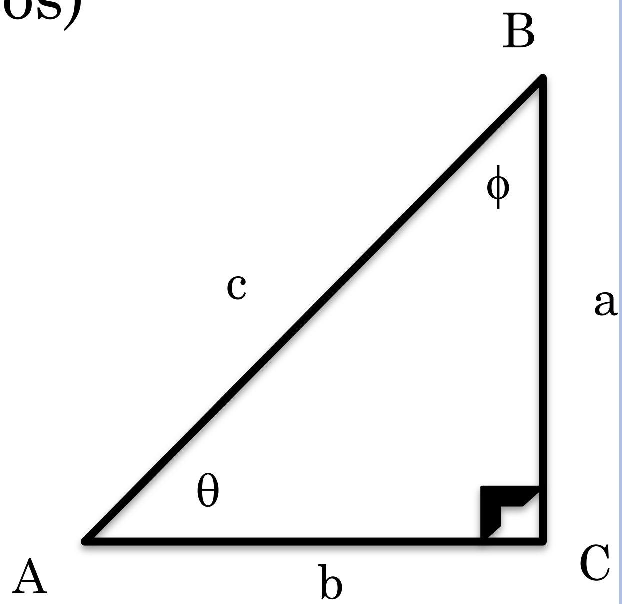


$$sen\theta = \frac{\text{lato opposto a } \theta}{\text{ipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$sen\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Funzioni trigonometriche : cos

- Sia dato un triangolo rettangolo ABC
  - $c^2 = a^2 + b^2$
- Definizione della funzione coseno (cos)

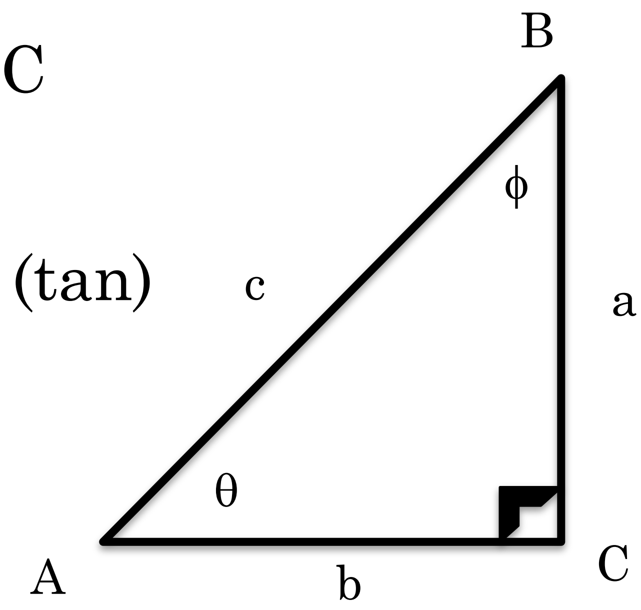


$$\cos\theta = \frac{\text{lato adiacente a } \theta}{\text{ipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE : TAN

- Sia dato un triangolo rettangolo ABC
  - $c^2 = a^2 + b^2$
- Definizione della funzione tangente (tan)

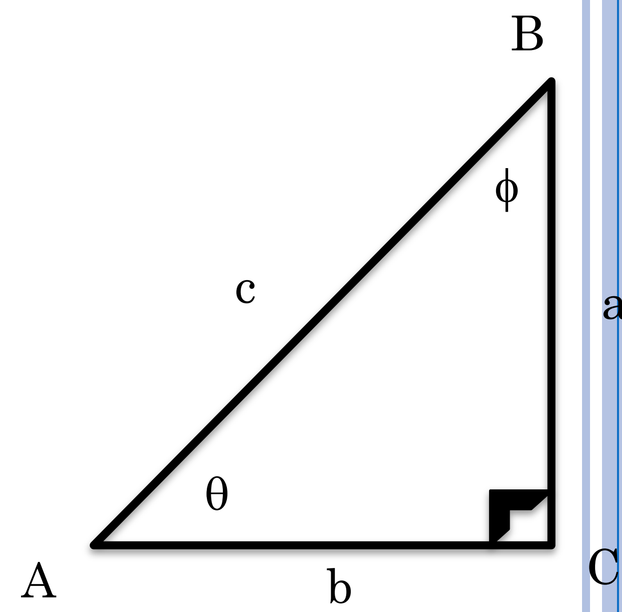


$$\tan\theta = \frac{\text{lato opposto a } \theta}{\text{lato adiacente a } \theta} = \frac{a}{b}$$

$$\boxed{\tan\theta} = \frac{\text{lato opposto a } \theta}{\text{ipotenusa}} \cdot \frac{\text{ipotenusa}}{\text{lato adiacente a } \theta} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \boxed{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}$$

Relazioni trigonometriche

- Riassumiamo alcune importanti relazioni tra le funzioni goniometriche
  - $c^2 = a^2 + b^2$

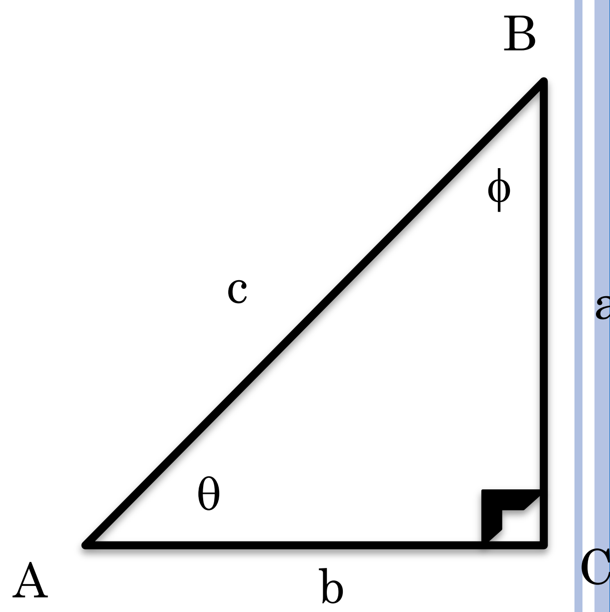


- Dalle definizioni segue che :
  - $a = c\,\mathrm{sen}\theta$
  - $b = c\cos\theta$
    - $a^2 + b^2 = c^2\,\mathrm{sen}^2\theta + c^2\cos^2\theta = c^2\,(\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = c^2$

$$\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$$

RELAZIONI TRIGONOMETRICHE

- Riassumiamo alcune importanti relazioni tra le funzioni goniometriche
- ricordando che
  - $\phi = 90° - \theta$
- Dalle definizioni :
  - $a = c \cos\phi = c \cos(90°-\theta)$
  - $b = c \, sen\phi = c \sin(90°-\theta)$



$$sen\theta = \cos(90° - \theta) \ , \quad \cos\theta = \sin(90° - \theta)$$

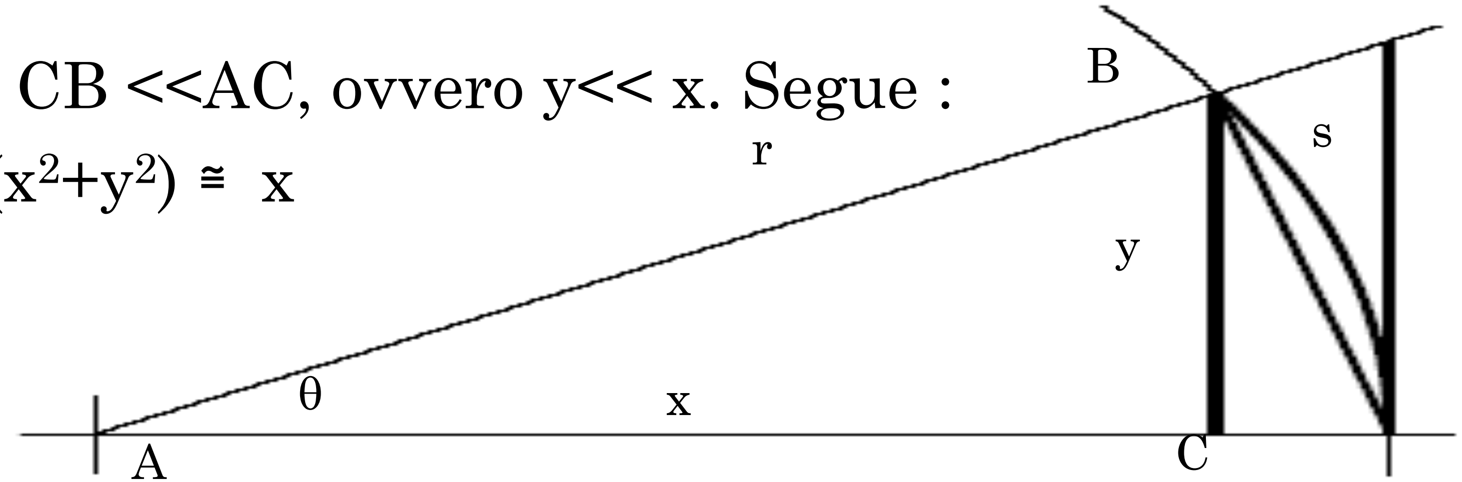
Valori di alcune funzioni trigonometriche

gradi	radianti	seno	coseno	tan
0	0	0	1	0
30	$\pi/6$	0.5	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
45	$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1
60	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	0.5	$\sqrt{3}$
90	$\pi/2$	1	0	∞
180	π	0	-1	0

Approssimazioni nel caso di piccoli angoli

- Sia CB <<AC, ovvero y<< x. Segue :

$r = \sqrt{(x^2+y^2)} \cong x$



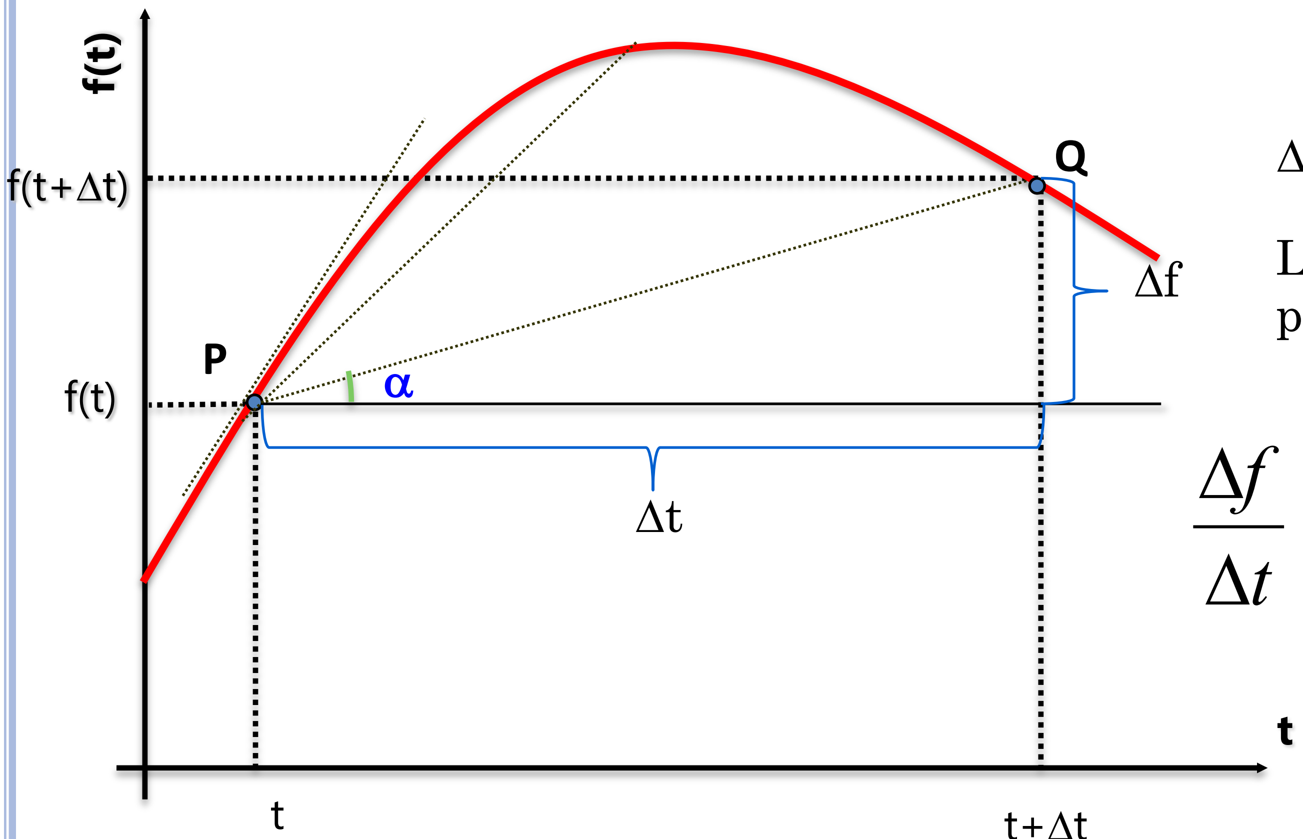
- y è approssimativamente uguale alla lunghezza dell' arco di circonferenza s, y≅s => y≅ rθ da cui si ha

$$sen\theta = \frac{y}{r} \cong \frac{r\theta}{r} = \theta, \quad \cos\theta = \frac{x}{r} \cong \frac{r}{r} = 1, \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \cong \frac{r\theta}{r} = \theta$$

Derivate e integrali

Definizione di derivata

- Si consideri una funzione f(t), con t variabile indipendente e f(t) variabile dipendente.
  - Ex: f(t)→ velocità v(t) oppure f(t) → spazio percorso x(t)



$\Delta f = f(t+\Delta t) - f(t)$

La pendenza della retta passante per P e Q è:

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Definizione di derivata

- La derivata di f(t) è strettamente correlata alla pendenza definita dall'equazione:

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f\left(t + \Delta t\right) - f\left(t\right)}{\Delta t}$$

- Per convenzione, la derivata di f(t) rispetto a t è uguale al valore della pendenza della retta passante per P e P' al limite per $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f\left(t + \Delta t\right) - f\left(t\right)}{\Delta t}$$

DEFINIZIONE DI DERIVATA

- Al limite per Δt che diventa arbitrariamente piccolo, la retta attraverso P e Q coincide con la tangente alla curva nel punto P.
- La derivata di f(t) rispetto a t si può interpretare come la pendenza della retta tangente alla curva f(t)

Alcuni esempi di derivate

$f(t)$	$df(t)/dt$
K= cost	0
t	1
t^2	$2t$
t^3	$3t^2$
$1/t^2$	$-2/t^3$
t^n	$n\, t^{n-1}$
sen t	cos t
cos t	-sen t
sen at	a cos at
cos at	-a sen at
e^{at}	$a\, e^{at}$

INTEGRALI

- Eseguendo la derivata di una funzione I(t) del tempo t otteniamo un'altra funzione del tempo, che indichiamo con f(t):

$$f(t) = \frac{dI(t)}{dt}$$

- L'operazione inversa della derivazione si chiama integrazione:

$$I(t) = \int f(t)dt$$

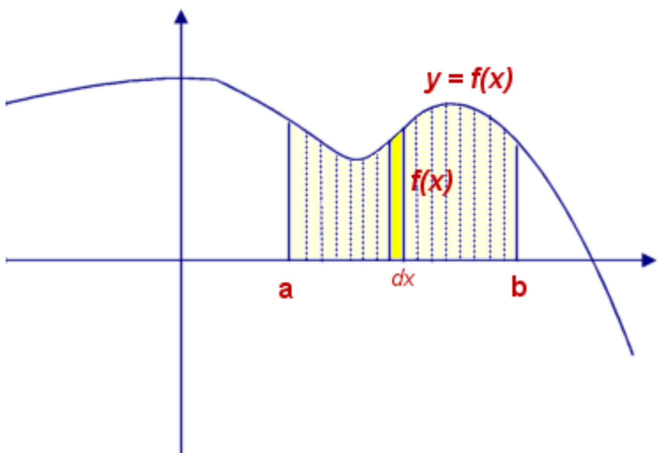
la funzione I(t) è l'integrale indefinito di f(t).

Si usa il termine indefinito poiché I(t) è definito soltanto a meno di una costante additiva.

Interpretazione geometrica

- Interpretazione geometrica dell'operazione di derivazione:
  - La derivata di una funzione f(x) è uguale alla pendenza della curva f(x) in funzione della coordinata x.

- Interpretazione geometrica dell'operazione di integrazione:
  - L'integrale di una funzione f(x) è correlato all'area della curva f(x) disegnata in funzione di x.



INTEGRALI DEFINITI

- L'area totale sotto la curva f(x) tra i limiti definiti x_a e x_b si chiama integrale definito di f(x) da $x=x_a$ a $x=x_b$.
- La simbologia usata per l'integrale definito è:

$$Area = \int_{x_a}^{x_b} f(x)dx$$