Prova scritta di Matematica per l'Economia - CdL Triennale in EA
Appello del 16 luglio 2024 - Numeri PARI

Tempo massimo per lo svolgimento della prova: 2 ore

(1) Data la funzione
$$h(x) = \frac{\log(\sqrt{2x} - 4)}{x\sqrt{2x}},$$
determinarne il dominio D_h e dire perchè h è dotata di primitiva, giustificando la risposta. Effettuando la sostituzione $\sqrt{2x} = t$, calcolare la generica primitiva di h. Dire, infine, se la funzione h è integrabile secondo Riemann in D_h.

(2) Calcolare il seguente limite
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x(\log(\operatorname{sen} x) - \log x)}{x - \operatorname{tg} x}.$$

(3) Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{x+1}{3(x+2)^3}$$
e tracciarne approssimativamente il grafico. Determinare, inoltre, l'equazione della rettta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 0$.

(4) Data la funzione
$$f(x, y) = \log(x^2 + y^2 + 4) - \sqrt{2},$$
determinarne il dominio D_f, calcolarne le derivate parziali prime e seconde e dire quindi se f è differenziabile, giustificando esaurientemente la risposta; individuare, infine, gli eventuali punti di estremo locale.

Prove scritte di Mat. per l'Economia (EA) del 16/07/2021 - NUMERI PARI

1°) Risulta $D_f = \mathbb{R}^2$; in ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si calcola

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2+4}, \quad f_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2+4},$$

e si deduce che f è differenziabile perché dotata di derivate parziali prime continue.
Si ha $\vec{\nabla} f(x,y) = \vec{0}$ nel solo punto $O = (0,0) \in D_f$; inoltre in ogni $(x,y) \in D_f$ si ha

$$f_{xx}(x,y) = \frac{-2x^2+2y^2+8}{(x^2+y^2+4)^2}, \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{-4xy}{(x^2+y^2+4)^2}, \quad f_{yy}(x,y) = \frac{2x^2-2y^2+8}{(x^2+y^2+4)^2}$$

ed essendo $\det H_f(0,0) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} > 0$, $f_{xx}(0,0) = \frac{1}{2} > 0$, si conclude che $O = (0,0)$ è un punto di minimo locale per f.

2°)

Poiché per $x \to 0^+$:

$$x \cdot (\log(\operatorname{sen} x) - \log x) = x \cdot \log\Big(\overbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}^{\to 1}\Big) \simeq x \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1\right) = \operatorname{sen} x - x \simeq -\frac{1}{6}x^3,$$

$$x - \operatorname{tg} x \simeq -\frac{1}{3}x^3,$$

si ha che il limite assegnato è uguale al $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-\frac{1}{6}x^3}{-\frac{1}{3}x^3} = \frac{1}{2}$.

) Studiare la seguente funzione:

$$f(x)= \frac{x+1}{3(x+2)^3}$$

sieme di definizione: $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

$f(x)>0 \iff x \in]-\infty,-2[\cup]-1,+\infty[$

$f(x)=0 \iff x=-1$

$f(x)<0 \iff x \in]-2,-1[$

ntervalli in cui il grafico di f è al di sopra dell'asse delle x: $]-\infty,-2[$, $]-1,+\infty[$

unti comuni al grafico di f ed agli assi coordinati: $(-1,0)$, $(0, 1/24)$

ntervalli in cui il grafico di f è al di sotto dell'asse delle x: $]-2,-1[$

imiti significativi per f:

$\lim_{x\to(-2)^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to(-2)^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$;

quazioni degli asintoti del grafico di f: $r: x=-2$ asintoto verticale a destra e a sinistra;
$r: y=0$ asintoto orizzontale a destra ed a sinistra;

$$f'(x)= \frac{-2x-1}{3(x+2)^4} \quad \forall x \in D_f;$$

$f'(x)>0 \iff x \in]-\infty,-2[\cup]-2,-1/2[$

$f'(x)=0 \iff x=-1/2$

$f'(x)<0 \iff x \in]-1/2,+\infty[$

unti angolosi o cuspidali per il grafico di f: // //

ntervalli in cui f è strettamente crescente: $]-\infty,-2[$, $]-2,-1/2]$

ntervalli in cui f è strettamente decrescente: $[-1/2,+\infty[$

unti ~~di minimo o~~ di massimo relativo per f: $x=-1/2$ con $f(-1/2)=4/81$

unti di minimo o di massimo assoluti per f: // //

$$f''(x)= \frac{2x}{(x+2)^5} \quad \forall x \in D_f;$$

$f''(x)>0 \iff x \in]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$

$f''(x)=0 \iff x=0$

$f''(x)<0 \iff x \in]-2,0[$

ntervalli in cui il grafico di f volge la concavità verso l'alto: $]-\infty,-2[$, $[0,+\infty[$

ntervalli in cui il grafico di f volge la concavità verso il basso: $]-2,0]$

unti di flesso per f: $x=0$ con $f(0)=1/24$

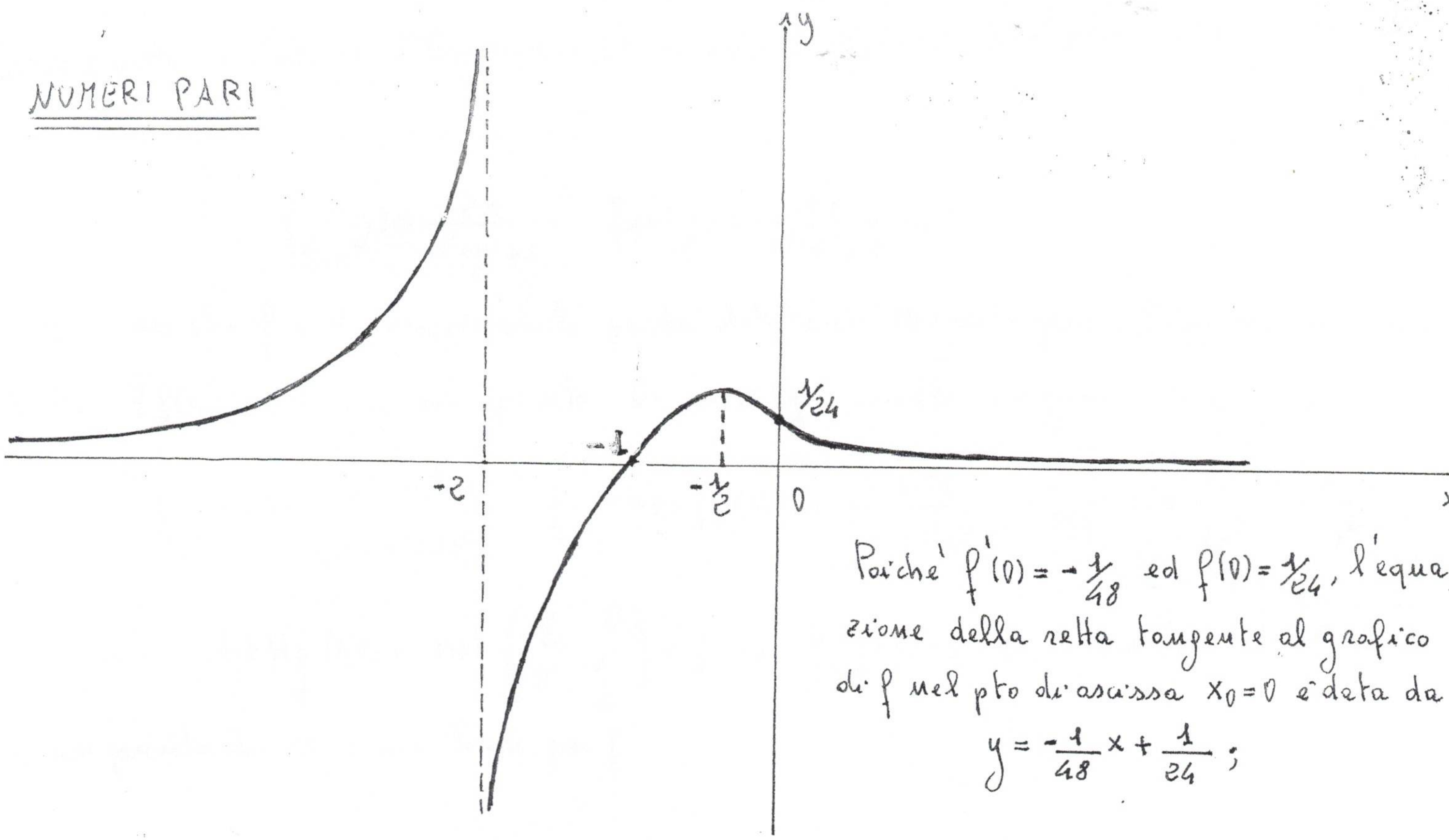
f è biunivoca (iniettiva)? NO

Indicare l'insieme dei valori di f: $\mathbb{R}$

Agli ultimi due quesiti conviene rispondere dopo aver tracciato il grafico di f.

TRACCIARE IL GRAFICO DELLA FUNZIONE f:

NUMERI PARI



Poichè $f'(0) = -\frac{1}{48}$ ed $f(0) = \frac{1}{24}$, l'equazione della retta tangente al grafico di f nel pto di ascissa $x_0 = 0$ è data da

$$y = -\frac{1}{48}x + \frac{1}{24};$$

4°)
$$\int \frac{\log(\sqrt{2x}-4)}{x\sqrt{2x}}\,dx =$$

$$\boxed{\sqrt{2x} = t \Rightarrow 2x = t^2 \Rightarrow x = t^2/2 \Rightarrow dx = t\,dt;}$$

per parti

$$\int \frac{\log(t-4)}{t^2/2 \cdot t}\cdot t\,dt = \int \frac{2\log(t-4)}{t^2}\,dt = 2\int \log(t-4)\cdot D\left(-\frac{1}{t}\right)dt =$$

$$-\frac{2}{t}\log(t-4) + 2\int \frac{1}{t(t-4)}\,dt = -\frac{2}{t}\log(t-4) + 2\int\left(\frac{-1/4}{t} + \frac{1/4}{t-4}\right)dt =$$

$$-\frac{2}{t}\log(t-4) + \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-4}{t}\right| + c = -\frac{2}{\sqrt{2x}}\log(\sqrt{2x}-4) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2x}-4}{\sqrt{2x}}\right) + c;$$

Risulta $D_h =]8,+\infty[$; la funzione h è continua nell'intervallo D_h e dunque è dotata di primitive per il teorema di Torricelli - Barrow; h non è integrabile in D_h, perchè illimitata e definita su un intervallo illimitato.

Prova scritta di Matematica per l'Economia - CdL Triennale in EA
Appello del 16 luglio 2024 - Numeri DISPARI

Tempo massimo per lo svolgimento della prova: 2 ore

(1) Data la funzione
$$h(x) = \frac{\log(3 - \sqrt{6x})}{x\sqrt{6x}},$$
determinarne il dominio D_h e dire perchè h è dotata di primitiva, giustificando la risposta. Effettuando la sostituzione $\sqrt{6x} = t$, calcolare la generica primitiva di h. Dire, infine, se la funzione h è localmente integrabile secondo Riemann in D_h.

(2) Calcolare il seguente limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x\big(\log x - \log(\operatorname{tg} x)\big)}.$$

(3) Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{2-x}{3(x-1)^3}$$
e tracciarne approssimativamente il grafico. Determinare, inoltre, l'equazione della rettta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 3$.

(4) Data la funzione
$$f(x,y) = \log(2 - x^2 - y^2) + 2\pi,$$
determinarne il dominio D_f, calcolarne le derivate parziali prime e seconde e dire quindi se f è differenziabile, giustificando esaurientemente la risposta; individuare, infine, gli eventuali punti di estremo locale.

Prova scritta di MaV. per l'Economia (EA) del 16/07/2024 - NUMERI DISPARI

1°) Risulta $D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<2\}$ (cerchio aperto di centro l'origine e raggio $\sqrt{2}$); in ogni $(x,y)\in D_f$ si calcola

$$f_x(x,y) = \frac{-2x}{2-x^2-y^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{-2y}{2-x^2-y^2},$$

e si deduce che f è differenziabile perché dotata di derivate parziali prime continue. Si ha $\vec{\nabla} f(x,y) = \vec{0}$ nel solo punto $O=(0,0)\in D_f$; inoltre in ogni $(x,y)\in D_f$ si ha

$$f_{xx}(x,y) = \frac{2y^2-2x^2-4}{(2-x^2-y^2)^2}, \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{-4xy}{(2-x^2-y^2)^2}, \quad f_{yy}(x,y) = \frac{2x^2-2y^2-4}{(2-x^2-y^2)^2}$$

ed essendo $\det H_f(0,0) = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1 > 0$, $f_{xx}(0,0) = -1 < 0$, si conclude che $O=(0,0)$ è un punto di massimo locale per f.

2°) Poiché per $x \to 0^+$:

$$\operatorname{sen} x - x \simeq -\frac{1}{6}x^3, \quad x\left(\log x - \log(\operatorname{tg} x)\right) = x\cdot\log\left(\overbrace{\frac{x}{\operatorname{tg} x}}^{\to 1}\right) \simeq x\cdot\left(\frac{x}{\operatorname{tg}x}-1\right) \simeq$$

$$\operatorname{tg}x\cdot\left(\frac{x}{\operatorname{tg}x}-1\right) = x - \operatorname{tg}x \simeq -\frac{1}{3}x^3,$$

si ha che il limite assegnato è uguale al $\lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{6}x^3}{-\frac{1}{3}x^3} = \frac{1}{2}$.

°) Studiare la seguente funzione:

$f(x)= \dfrac{2-x}{3(x-1)^3}$

nsieme di definizione: $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

$(x)>0 \iff x \in]1,2[$

$(x)=0 \iff x = 2$

$(x)<0 \iff x \in]-\infty,1[\cup]2,+\infty[$

ntervalli in cui il grafico di f è al di sopra dell'asse delle x: $]1,2[$

unti comuni al grafico di f ed agli assi coordinati: $(2,0)$, $(0,-2/3)$

ntervalli in cui il grafico di f è al di sotto dell'asse delle x: $]-\infty,1[$, $]2,+\infty[$

imiti significativi per f:

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$;

quazioni degli asintoti del grafico di f: $v: x=1$ asintoto verticale a destra e a sinistra;

$: y=0$ asintoto orizzontale a destra e a sinistra;

$f'(x)= \dfrac{2x-5}{3(x-1)^4} \quad \forall x \in D_f$;

$f'(x)>0 \iff x \in]5/2,+\infty[$

$f'(x)=0 \iff x = 5/2$

$f'(x)<0 \iff x \in]-\infty,1[\cup]1,5/2[$

unti angolosi o cuspidali per il grafico di f: // //

ntervalli in cui f è strettamente crescente: $[5/2,+\infty[$

ntervalli in cui f è strettamente decrescente: $]-\infty,1[$, $]1,5/2]$

unti di minimo ~~o di massimo~~ relativo per f: $x = 5/2$ con $f(5/2) = -4/81$

unti di minimo o di massimo assoluti per f: // //

$f''(x)= \dfrac{-2x+6}{(x-1)^5} \quad \forall x \in D_f$;

$f''(x)>0 \iff x \in]1,3[$

$f''(x)=0 \iff x = 3$

$f''(x)<0 \iff x \in]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$

ntervalli in cui il grafico di f volge la concavità verso l'alto: $]1,3]$

ntervalli in cui il grafico di f volge la concavità verso il basso: $]-\infty,1[$, $[3,+\infty[$

unti di flesso per f: $x = 3$ con $f(3) = -1/24$

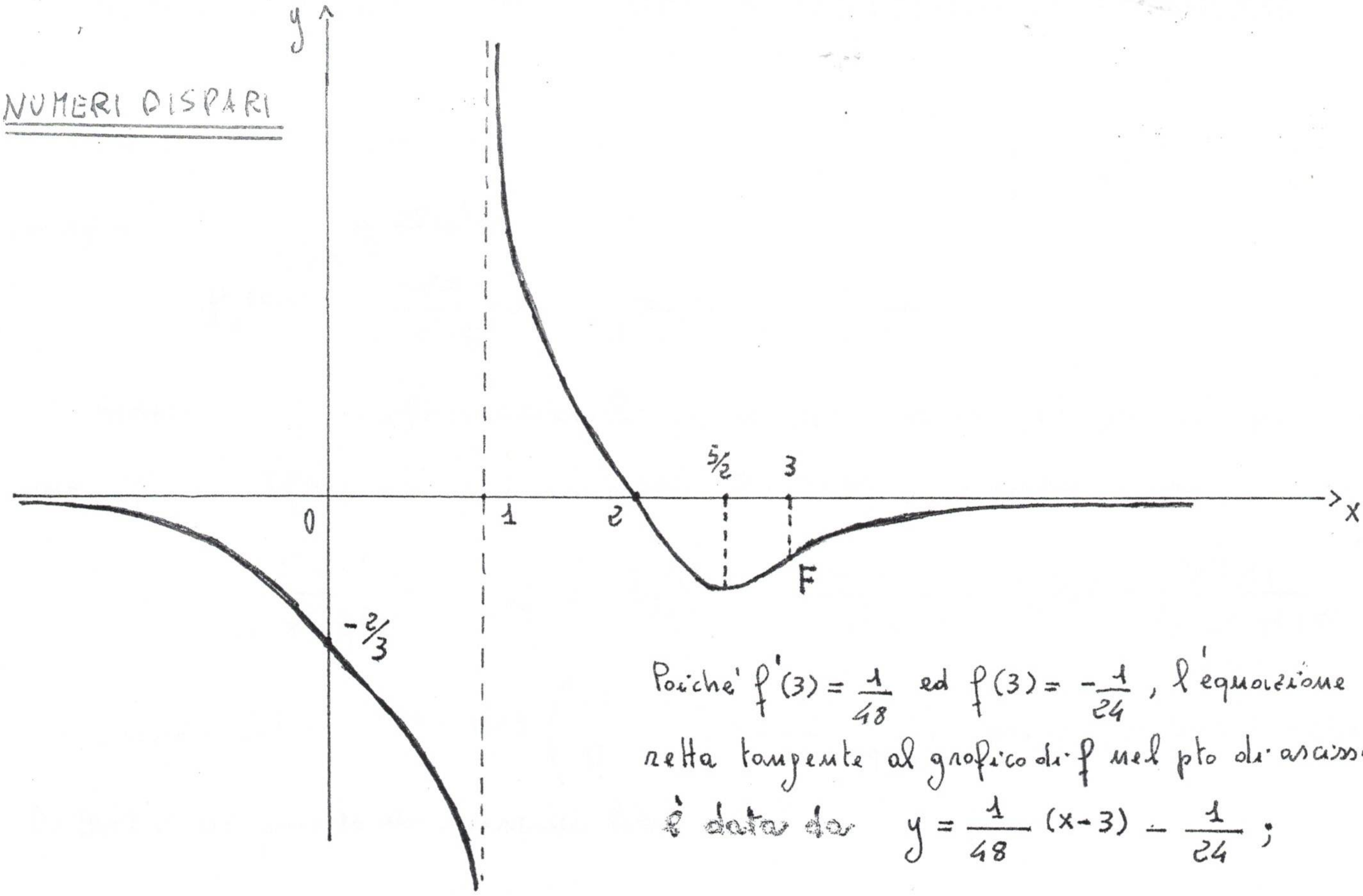
f è biunivoca (iniettiva)? NO

Indicare l'insieme dei valori di f: $\mathbb{R}$

Agli ultimi due quesiti conviene rispondere dopo aver tracciato il grafico di f.

TRACCIARE IL GRAFICO DELLA FUNZIONE f:

NUMERI DISPARI



Poiché $f'(3) = \frac{1}{48}$ ed $f(3) = -\frac{1}{24}$, l'equazione della retta tangente al grafico di f nel pto di ascissa $x_0 = 3$ è data da $y = \frac{1}{48}(x-3) - \frac{1}{24}$;

1°) $\displaystyle\int \frac{\log(3-\sqrt{6x})}{x\sqrt{6x}}\,dx =$

$\boxed{\sqrt{6x} = t \Rightarrow 6x = t^2 \Rightarrow x = t^2/6 \Rightarrow dx = \tfrac{1}{3}t\,dt;}$

$$\int \frac{\log(3-t)}{\frac{t^2}{6}\cdot t}\cdot\frac{1}{3}t\,dt = \int \frac{2\log(3-t)}{t^2}\,dt = 2\int \log(3-t)\cdot D\left(-\frac{1}{t}\right)dt \overset{\text{per parti}}{=}$$

$$-\frac{2}{t}\log(3-t) + 2\int\frac{1}{t(t-3)}\,dt = -\frac{2}{t}\log(3-t) + 2\int\left(\frac{-1/3}{t} + \frac{1/3}{t-3}\right)dt =$$

$$-\frac{2}{t}\log(3-t) + \frac{2}{3}\log\left|\frac{t-3}{t}\right| + c = -\frac{2}{\sqrt{6x}}\log(3-\sqrt{6x}) + \frac{2}{3}\log\left(\frac{3-\sqrt{6x}}{\sqrt{6x}}\right) + c;$$

Risulta $D_h =]0, 3/2[$; la funzione h è continua nell'intervallo D_h e dunque è dotata di primitive per il teorema di Torricelli-Barrow; h è localmente integrabile in D_h (ovvero $h_{|[a,b]}$ è integrabile $\forall [a,b] \subset D_h$), in quanto continua.