Esercizi sul Polinomio di Taylor

- Approssimare la funzione $f(x) = \ln(1+\sin x)$ con il polinomio di Taylor di ordine $n = 2$ e punto iniziale $x_0 = 0$.

  Soluzione

  Per approssimare la funzione, occorre determinare la derivata prima e seconda:

  $$f'(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x}; \quad f''(x) = \frac{-\sin x(1+\sin x) - \cos x(\cos x)}{(1+\sin x)^2} = \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2}$$

  Possiamo scrivere $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\dfrac{(x-x_0)^2}{2}$.
  Nel nostro caso $f(0) = 0;\quad f'(0) = 1;\quad f''(0) = -1$. Quindi:

  $$f(x) \approx 0 + 1 \cdot (x) - 1 \cdot \frac{x^2}{2} = x - \frac{x^2}{2}$$

- Approssimare la funzione $f(x) = e^{\sin x}$ con il polinomio di Taylor di ordine $n = 2$ e punto iniziale $x_0 = 0$.

  Soluzione

  Per approssimare la funzione, occorre determinare la derivata prima e seconda:

  $$f'(x) = e^{\sin x}\cos x; \quad f''(x) = e^{\sin x}\cos x \cdot \cos x + e^{\sin x} \cdot - \sin x = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x)$$

  Possiamo scrivere $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\dfrac{(x-x_0)^2}{2}$.
  Nel nostro caso $f(x_0) = e^{\sin 0} = e^0 = 1;\quad f'(x_0) = e^{\sin 0}\cos 0 = 1;\quad f''(x_0) = e^{\sin 0}(\cos^2 0 - \sin 0) = 1$.

  Quindi:

  $$e^{\sin x} \approx 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} + x + 1$$

- Approssimare la funzione $f(x) = \arctan(x)$ con il polinomio di Taylor di ordine $n = 2$ e punto iniziale $x_0 = 1$.

  Soluzione.

  Per approssimare la funzione, occorre determinare la derivata prima e seconda:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}; \quad f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

  Possiamo scrivere $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\dfrac{(x-x_0)^2}{2}$.
  Nel nostro caso $f(x_0) = \arctan(1) = \frac{\Pi}{4}; \quad f'(1) = \frac{1}{2}; \quad f''(1) = -\frac{1}{2}$.
  Quindi $f(x) \approx \frac{\Pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}\frac{(x-1)^2}{2}$, ossia:

$$f(x) \approx -\frac{x^2}{4} + x + \frac{\Pi}{4} - \frac{3}{4}$$

Esercizi sui Limiti Notevoli

- Utilizzando i limiti notevoli, calcolare il $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{2x}$

  Soluzione

  $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{2x} = \dfrac{0}{0}$. Per risolvere tale limite possiamo ricorrere ai limiti notevoli. Moltiplicando e dividendo per $3x$ otteniamo:

  $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{2x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{3x} \cdot \dfrac{3x}{2x} = \dfrac{3}{2} \lim_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{3x}$. Ponendo $3x = y$, se $x \to 0$ allora $y \to 0$, avremo:

  $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{3x} = \lim_{y\to 0} \dfrac{e^{y}-1}{y} = 1$. Quindi $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-1}{2x} = \dfrac{3}{2}$

- Calcolare i seguenti limiti:

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sin\frac{3}{x}}$;

Soluzione

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sin\frac{3}{x}} = \frac{0}{0}$. Per risolvere tale limite possiamo ricorre ai limiti notevoli. Moltiplicando e dividendo per $\frac{1}{x}$ al numeratore e $\frac{3}{x}$ al denominatore si ottiene:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sin\frac{3}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x}}{\frac{\sin\frac{3}{x}}{\frac{3}{x}}\cdot\frac{3}{x}}$. Ponendo $\frac{1}{x} = y$ e $\frac{3}{x} = z$ se $x \to +\infty$ allora $y \to 0$ e $z \to 0$. Quindi:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\frac{3}{x}}{\frac{3}{x}} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$. Di conseguenza:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x}}{\frac{\sin\frac{3}{x}}{\frac{3}{x}}\cdot\frac{3}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{3}{x}} = \frac{1}{3}.$$

- $\lim_{n} \sqrt{n^2-1} - \sqrt{n+1}$

Soluzione

$\lim_{n} \sqrt{n^2-1} - \sqrt{n+1} = +\infty - \infty$. Per risolvere questa forma indeterminata occorre razionalizzare:

$$\lim_{n} \sqrt{n^2-1} - \sqrt{n+1} = \lim_{n} \sqrt{n^2-1} - \sqrt{n+1} \cdot \frac{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n+1}} =$$

$$\lim_n \frac{n^2+n}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n+1}} = \lim_n \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}+\sqrt{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}}$$

$$= \lim_n \frac{n^2}{n+\sqrt{n}} = \lim_n \frac{n^2}{n\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \lim_n n = +\infty$$

(NB: $\lim_n \frac{1}{n} = 0; \quad \lim_n \frac{1}{\sqrt{n}} = 0; \quad \lim_n \frac{1}{n^2} = 0$*)*

- Utilizzando i limiti notevoli, calcolare i seguenti limiti:

• $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x}}{\sin x}$;

Soluzione

$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x}}{\sin x} = \frac{0}{0}$. Per risolvere tale limite possiamo ricorrere ai limiti notevoli. Moltiplicando e dividendo per x si ottiene:

$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x}}{x} \cdot \frac{x}{\sin x}$. Ponendo $-x = y$, se $x \to 0$ allora $y \to 0$, avremo:

$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x}}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{1-e^{y}}{-y} = \lim_{y\to 0} \frac{e^{y}-1}{y} = 1; \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = 1.$

Quindi: $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x}}{\sin x} = 1.$

• $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\ln(1+x)}$;

Soluzione

• $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\ln(1+x)} = \frac{0}{0}$. Per risolvere tale limite possiamo ricorrere ai limiti notevoli. Moltiplicando e dividendo per $2x$ al numeratore e per x al denominatore si ottiene:

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}{\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot x} = 2\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\ln(1+x)}{x}}$. Ponendo $2x = y$, se $x \to 0$ allora $y \to 0$, avremo:

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$. Inoltre $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Quindi: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\ln(1+x)} = 2$.

Massimi e Minimi Assoluti

- Determiniare i punti di minimo e massimo assoluto della funzione $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

  Soluzione

  La funzione $f(x)$ é definita per $1-x^2 \geq 0$, ossia nel dominio $D = [-1, 1]$. Essendo D un insiem chiuso e limitato, per il teorma di Weiestrass, la funzione é dotata di minimi e massimi assoluti. I punti di minimo e di massimo assoluto vanno ricercati:

  • Punti di frontiera: $x = +1; x = -1$. Nel nostro caso $f(1) = 0$; $f(-1) = 0$.

  • Punti che annullano la derivata prima: $f'(x) = -\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 0 \Leftrightarrow$ $x = 0; \quad f(0) = 1$

  • Punti di non derivabilitá: $f'(x) = -\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1, 1[$.
  I punti di non derivabilitá sono i $x = 1$ e $x = -1$ che coicindono con i punti di frontiera.
  Quindi possiamo affermare che il punto $x = 0$ é un punto di massimo assoluto, i punti $x = 1$ e $x = -1$ sono punti di minimo assoluto.

- Determinare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione $f(x) = |x-1| + x^2$ nell'intervallo $[0,2]$

  Soluzione.

  I punti di massimo e di minimo vanno ricercati:

  • Punti di frontiera $x = 0, 2$. Nel nostro caso $f(0) = 1$ e $f(2) = 5$.

  • Punti di non derivabilitá. La derivata é $f'(x) = \frac{|x-1|}{(x-1)} + 2x$.
  In questo caso $x - 1 \neq 0$ e quindi la funzione non é derivabile in $x = 1$. Calcolando il valore della funzione abbiamo $f(1) = 1$.

  • Punti che annullano la derivata prima. In questo caso, per semplicitá la funzione diventa:

$$\begin{cases} (x-1) + x^2 & \text{se} \quad x - 1 > 0 \\ -(x-1) + x^2 & \text{se} \quad x - 1 < 0 \end{cases}$$

  Quindi ponendo la derivata prima pari a zero abbiamo:

$$\begin{cases} 1 + 2x & \text{se} \quad x \in]1,2] \\ -1 + 2x & \text{se} \quad x \in [0,1[\end{cases}$$

  In questo caso, $1 + 2x = 0$ se $x = -\frac{1}{2}$ ma questo punto non appartiene all'intervallo $]1,2]$. Mentre $-1 + 2x = 0$ se $x = \frac{1}{2}$ che appartiene all'intervallo $[0,1[$. Quindi l'unico punto in cui si annulla la derivata prima é $x = \frac{1}{2}$. Quindi otteniamo che $f(\frac{1}{2})) = \frac{3}{4}$.

  Confrontando i tre casi, possiamo dedurre che $x = 2$ é un punto di massimo assoluto mentre $x = \frac{1}{2}$ é un punto di minimo assoluto.