BREVISSIMA INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEI GIOCHI

ERNESTO SOMMA

– MATERIALE DIDATTICO BASATO SU OZ SHY, Industrial Organization, 1995, MIT PRESS. Chapter 2 –

TEORIA DEI GIOCHI: UNA BREVE INTRODUZIONE.

1. COS'È UN GIOCO

DEFINIZIONE 1.1

UN GIOCO IN FORMA NORMALE (O STRATEGICA) È DESCRITTO DA:

1) UN INSIEME DI N GIOCATORI, LA CUI IDENTITÀ È DATA NELL'INSIEME $I \equiv \{1, 2, \dots, N\}$

2) PER OGNI GIOCATORE $i \in I$, UN INSIEME DELLE AZIONI A^i CHE ELENCA TUTTE LE AZIONI A DISPOSIZIONE DI i –
$a^i \in A^i$ denota una particolare azione per il giocatore i-esimo.
Quindi $A^i = \{a^i_1, a^i_2, \dots, a^i_{k_i}\}$, dove k_i è il numero delle azioni disponibili per il giocatore i-esimo.
L'elenco delle azioni scelte dai giocatori è denotato con $a \equiv (a^1, a^2, \dots, a^i, \dots, a^N)$. Questo elenco prende il nome di ESITO del gioco.

3) Per ogni giocatore $i \in I$, la funzione di VINCITA π^i, assegna un numero reale a ciascun possibile esito del gioco. Formalmente:

$$\pi^i(a) = \pi^i : a \to R$$

UN ESEMPIO DI GIOCO IN FORMA NORMALE

ESEMPIO 1.1

		PAESE 2	
		GUERRA	PACE
PAESE 1	GUERRA	1 , 1	3 , 0
	PACE	0 , 3	2 , 2

In questo esempio $N = 2$, $I = \{1, 2\}$

$A^1 = A^2 = \{\text{GUERRA}, \text{PACE}\}$

4 possibili esiti (GUERRA, GUERRA); (PACE, GUERRA);
(GUERRA, PACE); (PACE, PACE)

Il numero in alto a sinistra in ciascuna casella individua la vincita per il giocatore riga. Il numero in basso a destra, la vincita per il giocatore colonna.

AVENDO DESCRITTO UN GIOCO, CHE RAPPRESENTA UNA BEN DEFINITA SITUAZIONE STRATEGICA, ~~[illegible]~~ VOGLIAMO RISPONDERE ALLA SEGUENTE DOMANDA:

POSSIAMO PREVEDERE QUALE AZIONE SCEGLIERANNO I DUE GIOCATORI?

PER RISPONDERE AL QUESITO DOBBIAMO DEFINIRE UN CONCETTO DI EQUILIBRIO.

DEFINIAMO COME

$$a^{\neg i} \equiv (a^1, \dots, a^{i-1}, a^{i+1}, \dots, a^N)$$

L'ELENCO DELLE AZIONI SCELTE DA TUTTI I GIOCATORI ECCETTO IL GIOCATORE i-esimo.

CHIARAMENTE

$$a = (a^i, a^{\neg i})$$

2. CONCETTI DI EQUILIBRIO

2.1 EQUILIBRIO IN AZIONI DOMINANTI

DEFINIZIONE 2.1

UNA AZIONE $\tilde{a}^i \in A^i$ è detta DOMINANTE per il giocatore i-esimo, se $\tilde{a}^i$ massimizza la vincita del giocatore quali che siano le azioni scelte dai restanti giocatori.
Formalmente, per ogni scelta di azione degli altri giocatori $a^{\neg i}$,

$$\pi^i(\tilde{a}^i, a^{\neg i}) \geq \pi^i(a^i, a^{\neg i}) \text{ per ogni } a^i \in A^i$$

~~NELL~~ GIOCO DELL' ESEMPIO 1.1, l'azione a^1 = GUERRA è un' azione dominante per il giocatore 1 (VERIFICATE CHE a^1 = GUERRA soddisfa la definizione di strategia dominante)

DEFINIZIONE 2.2

UN ESITO $(\tilde{a}^1, \tilde{a}^2, \dots, \tilde{a}^N)$, dove $\tilde{a}^i \in A^i \ \forall \ i = 1, 2, \dots, N$,

È DETTO UN EQUILIBRIO IN AZIONI DOMINANTI SE

$\tilde{a}^i$ È UN' AZIONE DOMINANTE PER TUTTI I GIOCATORI i.

- ~~[illegible]~~ LA NOZIONE DI EQUILIBRIO IN AZIONI DOMINANTI È MOLTO INTUITIVA E FORNISCE UNA PREVISIONE DELL' ESITO DI EQUILIBRIO DEL GIOCO MOLTO ATTRAENTE:
- L'EQUILIBRIO È UNICO
- I GIOCATORI HANNO UN SOLO MODO RAGIONEVOLE DI GIOCARE.

PURTROPPO, LA GRAN PARTE DEI GIOCHI NON AMMETTE UN EQUILIBRIO IN AZIONI DOMINANTI

ESEMPIO 2.1

		RACHELE: OPERA	RACHELE: CALCIO
GIACOMO	OPERA	2 , 1	0 , 0
GIACOMO	CALCIO	0 , 0	1 , 2

- LA BATTAGLIA DEI SESSI -

È AGEVOLE VERIFICARE CHE NESSUNO DEI DUE GIOCATORI NELL'ESEMPIO 2.1 HA UNA STRATEGIA DOMINANTE.

ABBIAMO BISOGNO DI UN NUOVO CONCETTO DI EQUILIBRIO

DEFINIZIONE 2.3

UN ESITO $\hat{a} = (\hat{a}^1, \hat{a}^2, \ldots, \hat{a}^N)$, dove $\hat{a}^i \in A^i \; \forall i = 1, 2, \ldots, N$, È DETTO EQUILIBRIO DI NASH (NE) se nessun giocatore ha incentivo a deviare dato che tutti gli altri giocatori non deviano dalle azioni giocate in equilibrio.

Formalmente, per ogni giocatore i, $i = 1, 2, \ldots, N$,

$$\pi^i(\hat{a}^i, \hat{a}^{-i}) \geq \pi^i(a^i, \hat{a}^{-i}) \quad \text{per tutte } a^i \in A^i$$

RELAZIONE TRA EQUILIBRIO DI NASH E EQUILIBRIO IN AZIONI DOMINANTI

– PROPOSIZIONE 2.1

UN EQUILIBRIO IN AZIONI DOMINANTI È UN EQUILIBRIO DI NASH.
MA, UN EQUILIBRIO DI NASH NON È NECESSARIAMENTE UN EQUILIBRIO IN AZIONI DOMINANTI.

LA PROVA DI QUESTA PROPOSIZIONE È INTUITIVA.
LE AZIONI SCELTE DAI GIOCATORI IN UN EQUILIBRIO DI NASH DEVONO ESSERE RISPOSTE OTTIME ALLE AZIONI SCELTE IN EQUILIBRIO DAGLI ALTRI GIOCATORI E NON RISPOSTE OTTIME A QUALSIASI AZIONE SCELTA DAI RIVALI.
L'EQUILIBRIO DI NASH È QUINDI UNA NOZIONE DI EQUILIBRIO PIÙ DEBOLE CHE HA COME CASO SPECIALE QUELLO IN STRATEGIE DOMINANTI.

UNO STRUMENTO UTILE ALLA RICERCA DEGLI EQUILIBRI DI NASH, È QUELLO DELLE

FUNZIONI DI RISPOSTA OTTIMA

DEFINIZIONE 2.4

IN UN GIOCO CON N GIOCATORI, LA FUNZIONE DI RISPOSTA OTTIMA DEL GIOCATORE i È LA FUNZIONE $R^i(a^{\neg i})$, che per ~~una data~~ date azioni $a^{\neg i}$, ASSEGNA UN'AZIONE $a^i = R(a^{\neg i})$ che massimizza la vincita del giocatore i, $\pi^i(a^i, a^{\neg i})$.

PROPOSIZIONE 2.2 Se $\hat{a}$ è un EQUILIBRIO DI NASH, allora $\hat{a}^i = R^i(a^{\neg i})$ per ogni giocatore i.

3. GIOCHI IN FORMA ESTESA

IN QUESTI GIOCHI I GIOCATORI POSSONO MUOVERE IN MOMENTI ~~DIVERSI~~ DI TEMPO DIVERSI.

DEFINIZIONE 3.1

UN GIOCO IN FORMA ESTESA è:

1) UN ALBERO CONTENENTE UN NODO INIZIALE, ALTRI NODI DECISIONALI, NODI TERMINALI e RAMI CHE LEGANO CIASCUN NODO DECISIONALE A QUELLI SUCCESSIVI.

2) UNA LISTA DI $N \geq 1$ GIOCATORI indicati da i, $i = 1, 2, \ldots, N$

3) PER OGNI NODO DECISIONALE L'INDICAZIONE DEL NOME DEL GIOCATORE CHIAMATO A SCEGLIERE UN'AZIONE

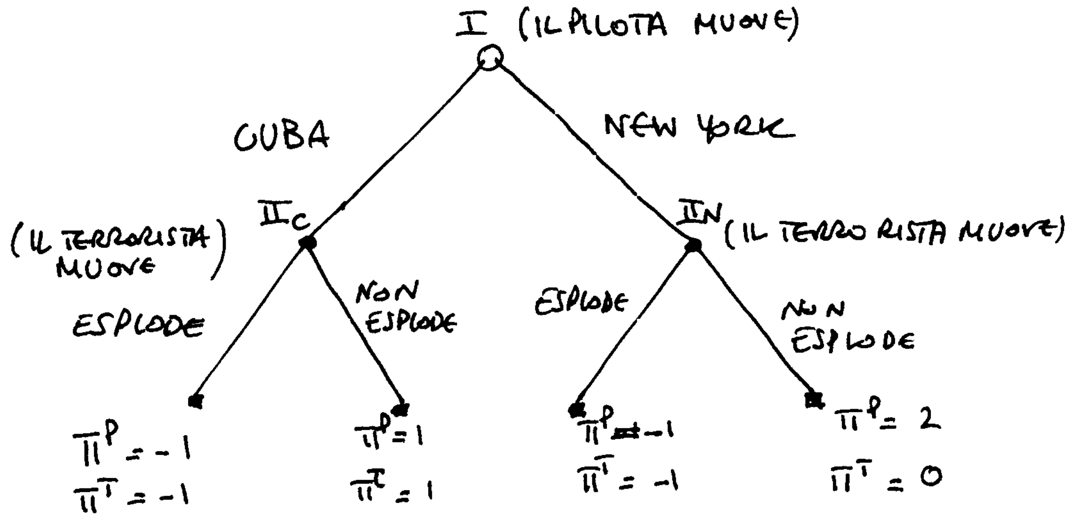
4) PER OGNI GIOCATORE i, LA SPECIFICAZIONE DELL'INSIEME DELLE AZIONI CHE IL GIOCATORE PUÒ SCEGLIERE PER CIASCUN NODO DECISIONALE IN CUI DEVE SCEGLIERE

5) LA SPECIFICAZIONE DELLA VINCITA DI CIASCUN GIOCATORE IN CORRISPONDENZA DI CIASCUN NODO TERMINALE.

DEFINIZIONE 3.2

UNA STRATEGIA PER IL GIOCATORE i, denotata come s^i, è un piano completo di azioni, una per ogni nodo decisionale nel quale il giocatore è chiamato a scegliere.

ESEMPIO 3.1



- IL PILOTA ED IL TERRORISTA -

QUESTO GIOCO HA 8 POSSIBILI ESITI:

$(NY, (B,B))$, $(NY, (B, NB))$, $(NY, (NB, B))$, $(NY, (NB, NB))$
$(C, (B,B))$, $(C, (B, NB))$, $(C, (NB, B))$, $(C, (NB, NB))$

IN FORMA STRATEGICA

		TERRORISTA			
		(B,B)	(B, NB)	(NB, B)	(NB, NB)
PILOTA	NY	-1 , -1	2 , 0	-1 , -1	2 , 0
	CUBA	-1 , -1	-1 , -1	1 , 1	1 , 1

3 EQUILIBRI DI NASH

$$(NY, (NB, NB)), \quad (NY, (B, NB)) \quad e \quad (CUBA, (NB, B))$$

ALCUNI DI QUESTI NE APPAIONO POCO SODDISFACENTI -
INFATTI NON È MAI OTTIMO PER IL TERRORISTA FAR ESPLODERE LA BOMBA.

- SOTTOGIOCHI e EQUILIBRIO PERFETTO NEI SOTTOGIOCHI

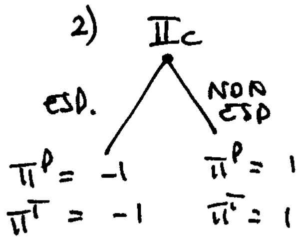
DEFINIZIONE 3.3

UN SOTTOGIOCO SI COMPONE DI UN NODO DECISIONALE DEL GIOCO COMPLETO E DI TUTTI I NODI DECISIONALI E TERMINALI CHE SEGUONO DIRETTAMENTE DA QUESTO -

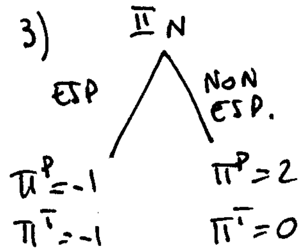
- Nell'esempio 3.1 i SOTTOGIOCHI SONO 3.

1) il gioco completo

2)



3)



DEFINIZIONE 3.4

UN ESITO È DETTO EQUILIBRIO PERFETTO NEI SOTTOGIOCHI (SPE) SE INDUCE UN EQUILIBRIO DI NASH IN OGNI SOTTOGIOCO DEL ~~QUELLO~~ GIOCO ORIGINARIO.

- RISULTATO. NEL GIOCO DELL'ESEMPIO 3.1, L'ESITO (NY,(NB,NB)) COSTITUISCE L'UNICO SPE.

= L'INDUZIONE A RITROSO PUÒ ESSERE IMPIEGATA PER RICERCARE GLI EQ. PERFETTI NEI SOTTOGIOCHI NEI GIOCHI IN FORMA ESTESA.