Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale 11 settembre 2019 (prof. Bisceglia)

Traccia A

1. Trovare, *se possibile,* un punto di *approssimazione* con un errore $\varepsilon \le \frac{1}{8}$ dell'equazione $x^4-3x^3+1=0$, nell'intervallo $[0,1]$.

2. Dopo aver verificata la *regolarità* del seguente limite, far vedere la corretta *convergenza* o *divergenza*: $\lim_{x\to 1}\log\sqrt{x-1}$.

3. *Studiare* la funzione $x \to f(x)=\sqrt{x^2-1}$, e *tracciarne approssimativamente* il grafico.

4. Data la funzione $h: x\in[0,1]\to\begin{cases}\dfrac{arcsen\log(x+1)}{x}+k(x-1) & x\in\,]0,1] \\ 1-k & x=0\end{cases}$, dire se *soddisfa le ipotesi* del Teorema di Rolle.

5. Data la funzione $p(x)=\dfrac{4x-1}{2x^2+x+1}$, *calcolare l'insieme delle primitive P*.

6. Data la matrice $A=\begin{pmatrix} k & 1 & 3 \\ -1 & k & 2 \\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$, ed il vettore $b=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ studiare il sistema $A\alpha=b$ al variare di *k*.

Svolgimento traccia A

1. Data la funzione $x^4-3x^3+1=0$, funzione continua, definita in un intervallo chiuso e limitato, ed osservando che $f(0)=1$, ed $f(1)=1-3+1<0$, pertanto $f(0)\cdot f(1)<0$, ricorrono quindi tutte le ipotesi del teorema degli zeri, pertanto $\exists x_0\in\,]0,1[\,/\, f(x_0)=0$. Per cui sapendo che $|x_0-c_n|<c_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^{n+1}}\le 8^{-1}$, si ha $\dfrac{b-a}{2^{n+1}}\le 8^{-1}\Leftrightarrow \dfrac{b-a}{8^{-1}}\le 2^{n+1}\Leftrightarrow n\ge\dfrac{\log(b-a)8}{\log 2}-1$ quindi $n\ge\dfrac{\log((1)8)}{\log 2}-1=2$ quindi, ponendo $n=2$ si trova il punto di approssimazione con un errore $\in\le 8^{-1}$. Per semplificare $a_nb_nc_n\,f(a_n)f(b_n)f(c_n)$ i calcoli, sfruttiamo la stretta crescenza della funzione, e che si annulla per $x=-1$.

n	a_n	c_n	b_n	$f(a_n)$	$f(c_n)$	$f(b_n)$
0	0	1/2	1	+	+	–
1	1/2	3/4	1	+	+	–
2	3/4	7/8	1	+	–	–

che risulta essere $c_2 = \frac{7}{8}$, in quanto $\left|\frac{7}{8} - \frac{3}{4}\right| \leq \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq \frac{1}{8}$.

2. Essendo il dominio della funzione $\log\sqrt{x-1}$ possibile per $\sqrt{x-1} > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$, ovvero $\forall x \in \left]1,+\infty\right[$, pertanto la funzione è regolare nel punto *uno*, in quanto di accumulazione per il dominio e risulta: $\lim_{x\to 1} \log\sqrt{x-1} = -\infty$ essendo il $\lim_{x\to 1}\sqrt{x-1} = 0$ e conseguentemente $\lim_{y\to 0}\log y = -\infty$ quindi la funzione diverge negativamente in *uno*. Servendosi della definizione di limite si ha che $\log\sqrt{x-1} < -\varepsilon \Leftrightarrow \log\sqrt{x-1} < \log e^{-\varepsilon} \Leftrightarrow \sqrt{x-1} < e^{-\varepsilon}$, ovvero $|x-1| < e^{-2\varepsilon} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 < e^{-2\varepsilon} \\ x-1 > -e^{-2\varepsilon} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 + e^{-2\varepsilon} \\ x > 1 - e^{-2\varepsilon} \end{cases}$ pertanto posto $\delta = e^{-2\varepsilon}$ si ha un intorno di *uno* quindi la divergenza del limite è corretta.

3. *Data la seguente funzione*: $x \to f(x) = \sqrt{x^2-1}$.

I. *Dominio*:

Essendo una funzione radice quadrata, deve essere $x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1$, pertanto $X = \left]-\infty,-1\right] \cup \left[1,+\infty\right[$ Quindi tale funzione è definita $\forall x \in \left]-\infty,-1\right] \cup \left[1,+\infty\right[$, ovvero

$$f : \left]-\infty,-1\right] \cup \left[1,+\infty\right[\to f(x) = \sqrt{x^2-1} \in R$$

II. *Segno*:

Deve essere $f(x) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1$.
Pertanto $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$
Conseguentemente $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$
E la funzione passa per i punti $(-1,0)$ e $(1,0)$.

III. *Asintoti*:

Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare solo il limite nell'estremo inferiore e superiore del dominio.
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1} = +\infty$, in quanto trattandosi di funzione composta, si ha $\lim_{x\to-\infty} x^2 - 1 = +\infty$ quindi $\lim_{y\to+\infty}\sqrt{y} = +\infty$ e la stessa convergenza nell'estremo superiore. Si osservi pertanto che $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = -1$ ed $\lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1} + x = 0$ per cui la retta di equazione $y = -x$ è un asintoto obliquo a sinistra; mentre si ha che $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1$ ed $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1} - x = 0$ per cui la retta di equazione $y = x$ è un asintoto obliquo a destra.

IV. *Monotonia*:

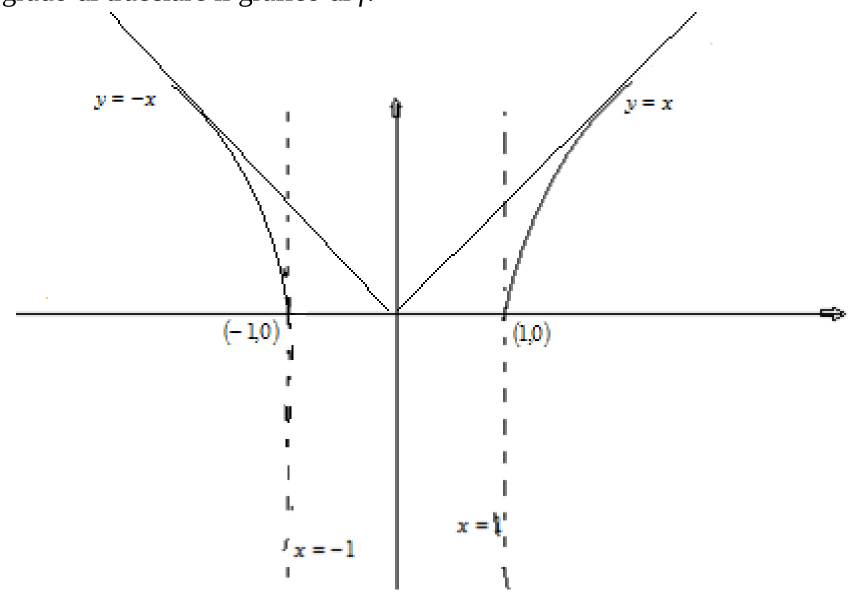
$f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}$., quindi $f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}>0$, ed osservando che tale funzione derivata è definita $\forall x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$ ed il denominatore è strettamente positivo nel suo dominio, risulta $f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left]1,+\infty\right[$ mentre $f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-1\right[$ quindi la funzione è strettamente decrescente in $\left]-\infty,-1\right[$ e strettamente crescente in $\left]1,+\infty\right[$; si osservi in fine che essendo $\lim\limits_{x\to-1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=-\infty$; mentre $\lim\limits_{x\to1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=+\infty$, possiamo quindi concludere che al funzione è strettamente decrescente in $\left]-\infty,-1\right]$ e strettamente crescente in $\left[1,+\infty\right[$;

V. *Convessità*:

Risultando infine: $f''(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}-\dfrac{2x^2}{2\sqrt{x^2-1}}}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}=\dfrac{\left|x^2-1\right|-x^2}{\left|x^2-1\right|\sqrt{x^2-1}}$, ed osservando che che tale funzione derivata seconda è definita $\forall x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$ ed il denominatore è strettamente positivo nel suo dominio, risulta $f''(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{\left|x^2-1\right|-x^2}{\left|x^2-1\right|\sqrt{x^2-1}}>0 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}}>0$ ovvero $f''(x)>0 \Leftrightarrow \forall x\in\varnothing$ mentre $f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$ ed osservando ancora che essendo $\lim\limits_{x\to-1^-} f''(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f''(x)=-\infty$, possiamo concludere che al funzione è strettamente concava nel suo insieme di definizione
.

VI. *Punti di flesso*: conseguentemente non ha punti di flesso.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:



e quindi dedurre che:
$f\left(\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[\right)=\left[0,+\infty\right[$, la funzione non è biunivoca, mentre la sua restrizione a $\left]-\infty,-1\right]$ è biunivoca su $\left[0,+\infty\right[$. Inoltre si osserva che la funzione è pari, oltre ad essere dotata di minimo assoluto

ed avere due punti di minimo.

4. La funzione $h: x \in [0,1] \to \begin{cases} \frac{arcsen \log(x+1)}{x} + k(x-1) & x \in]0,1] \\ 1-k & x=0 \end{cases}$ è evidentemente continua in $[0,1]-\{0\}$ e risultando $h(0)=1-k$ ed il $\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{arcsen \log(x+1)}{x} + k(x-1) = 1-k$, in quanto $\lim_{x\to 0} \frac{arcsen \log(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{arcsen \log(x+1)}{\log(x+1)} \frac{\log(x+1)}{x} = \log e$ ed $\lim_{x\to 0} k(x-1) = -k$ pertanto risulta continua in $[0,1]$; inoltre essendo $D\left(\frac{arcsen \log(x+1)}{x} + k(x-1)\right)$ pari a $\frac{\frac{x}{x+1\sqrt{1-(\log(x+1))^2}} + arcsen \log(x+1)}{x^2} + k$ quindi derivabile in $]0,1]$; infine si osserva che $h(0)=h(1) \Leftrightarrow 1-k = arcsen \log 2 \Leftrightarrow k = 1 - arcsen \log 2$ per cui la funzione *soddisfa* le ipotesi del Teorema di Rolle per $k = 1 - arcsen \log 2$.

5. Data la funzione $p(x) = \frac{4x-1}{2x^2+x+1}$, l'insieme delle primitive della seguente funzione è dato dalla soluzione del seguente integrale: $\int \frac{4x-1}{2x^2+x+1} dx$, ed essendo $D(2x^2+x+1) = 4x+1$ si ha $\int \frac{4x-1}{2x^2+x+1} dx = \int \frac{4x-1+1-1}{2x^2+x+1} dx = \int \frac{4x+1}{2x^2+x+1} dx - \int \frac{2}{2x^2+x+1} dx$, ovvero risulta: $\log|2x^2+x+1| - 2\int \frac{1}{2x^2+x+1} dx$, e per quest'ultimo integrale essendo il delta del polinomio al denominatore, negativo, si ha $\frac{1}{2x^2+x+1} = \frac{1}{2\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{-7}{16}\right)}$ ovvero,

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\left(\left(\frac{4x+1}{4}\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1\right)\frac{7}{16}} = \frac{1}{2}\frac{16}{7}\frac{\sqrt{7}}{4} \frac{1}{\left(\left(\frac{4x+1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1\right)} \frac{4}{\sqrt{7}} = 2\frac{\sqrt{7}}{7} \frac{1}{\left(\left(\frac{4x+1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1\right)} \frac{4}{\sqrt{7}}$$

pertanto si ha che l'insieme delle primitive dell'integrale assegnato, risulta: $P(x) = \log|2x^2+x+1| - 4\frac{\sqrt{7}}{7} arctg \frac{4x+1}{\sqrt{7}} + c$.

6. Si tratta di trovare delle soluzioni al sistema $A\alpha = b$; per cui si osserva che essendo $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 3 \\ -1 & k & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, il suo determinante è $\det(A) = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} k & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 + k(-k-6) = -k^2 - 6k + 3$, quindi per $-k^2 - 6k + 3 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq -3 \pm 2\sqrt{3}$ il sistema è di Cramer e pertanto le soluzioni risultano il

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-k^2-6k+3} = \frac{-10k+7}{-k^2-6k+3}$$; $$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{-k^2-6k+3} = \frac{-7k-12}{-k^2-6k+3}$$; ed $$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ -1 & k & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{-k^2-6k+3} = \frac{3k^2-2k+5}{-k^2-6k+3}$$. Per $k=-3\pm 2\sqrt{3}$ la matrice diventa $A = \begin{pmatrix} -3\pm 2\sqrt{3} & 1 & 3 \\ -1 & -3\pm 2\sqrt{3} & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ed il suo determinante risulta $\det(A)=0$, pertanto la $Car(A)=2$ mentre la caratteristica della matrice completa risulta ancora pari a 3 in quanto $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3\pm 2\sqrt{3} & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \left(-3\pm 2\sqrt{3}\right)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 37 \mp 20\sqrt{3} \neq 0$ e conseguentemente in tal caso il sistema è incompatibile.