Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale – 08 giugno 2016 (prof. Bisceglia)

traccia A

1. Calcolare la primitiva della funzione $p(x)$, che nel punto 0 assume valore 1

$$p(x)=\frac{5x-2}{4x^2-4x+3}$$

2. Calcolare il seguente limite (si consiglia di ricondurlo alla forma $\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}$)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(e^{\left(\frac{3x^7-x}{-x^7+1}\right)}-e^{-3}\right)x^2$$

3. Disegnare approssimativamente il grafico della seguente funzione:

$$x\to f(x)=arctg\,\frac{1}{e^x-1}$$

4. Per quali valori dei parametri *a*,*b*,*c* e *d* la funzione:

$$h:x\in R\to\begin{cases}x^2+x & x\in\left]-\infty,0\right[\\ \mathrm{ax}^3+bx^2+cx+d & x\in[0,1]\\ x^2-x & x\in\left]1,+\infty\right[\end{cases}$$

soddisfa le ipotesi dei Teoremi di BOLZANO. Inoltre, far vedere se in tali valori soddisfa anche le ipotesi del Teorema degli Zeri.

5. Dopo aver giustificato l'esistenza dei punti di minimo e massimo assoluti della funzione in $[-2,2]$, trovare tali punti e calcolare il massimo:

$$g:x\in R\to e^{x^3-3|x|}$$

N.B. 1) Non si possono usare, pena l'annullamento della prova: calcolatrici, cellulari ed appunti vari. 2) Non si accettano elaborati scritti a matita. 3) Va consegnato solo il foglio di bella e la traccia compilata nel riquadro.

Cognome	Nome	Matricola	Firma

Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale – 08 giugno 2016 (prof. Bisceglia)

traccia B

1. Calcolare la primitiva della funzione $p(x)$, che nel punto 0 assume valore 1

$$p(x)=\frac{5x+2}{4x^2-2x+2}$$

2. Calcolare il seguente limite (si consiglia di ricondurlo alla forma $\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}$)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{\left(\frac{x^2+x}{2x^2+1}\right)}-\sqrt{e}\right)x^3$$

3. Disegnare approssimativamente il grafico della seguente funzione:

$$x\to f(x)=arc\cot g\,\frac{1}{e^x-1}$$

4. Per quali valori dei parametri *a*,*b*,*c* e *d* la funzione :

$$h:x\in R\to\begin{cases}2x+x & x\in\left]-\infty,0\right[\\ \mathrm{ax}^3-bx^2+cx+d & x\in[0,1]\\ x^2-x & x\in\left]1,+\infty\right[\end{cases}$$

soddisfa le ipotesi dei Teoremi di BOLZANO. Inoltre, far vedere se in tali valori soddisfa anche le ipotesi del Teorema degli Zeri.

6. Dopo aver giustificato l'esistenza dei punti di minimo e massimo assoluti della funzione in $[-2,2]$, trovare tali punti e calcolare il minimo:

$$g:x\in R\to e^{2x^2-4|x|}$$

Dire se ha punti di discontinuità, e nel caso di quale specie.

N.B. 1) Non si possono usare, pena l'annullamento della prova: calcolatrici, cellulari ed appunti vari. 2) Non si accettano elaborati scritti a matita. 3) Va consegnato solo il foglio di bella e la traccia compilata nel riquadro.

Cognome	Nome	Matricola	Firma

Svolgimento prova scritta del 08 giugno 2016 traccia A

1. Una primitiva della funzione assegnata è data dal seguente integrale:

$\int \frac{5x-2}{4x^2-4x+3}dx$ tenendo conto che $\frac{5x-2}{4x^2-4x+3} = \frac{5x}{4x^2-4x+3} - \frac{2}{4x^2-4x+3}$ e che $D(4x^2-4x+3) = 8x-4$ si può scrivere $\frac{5x-2}{4x^2-4x+3} = \frac{5}{8}\left(\frac{8}{5}\frac{5x}{4x^2-4x+3}\right) - \frac{2}{4x^2-4x+3} = \frac{5}{8}\left(\frac{8x-4+4}{4x^2-4x+3}\right) - \frac{2}{4x^2-4x+3}$ ovvero $\frac{5}{8}\left(\frac{8x-4}{4x^2-4x+3}\right) + \frac{5}{8}\frac{4}{4x^2-4x+3} - \frac{2}{4x^2-4x+3}$ pertanto $\int \frac{5x-2}{4x^2-4x+3}dx = \frac{5}{8}\int \frac{8x-4}{4x^2-4x+3}dx + \int \frac{5}{8}\frac{4}{4x^2-4x+3} - \frac{2}{4x^2-4x+3}dx$, quindi questo secondo integrale è $\int \frac{5}{8}\frac{4}{4x^2-4x+3} - \frac{2}{4x^2-4x+3}dx = \int \frac{1}{2}\frac{5}{4x^2-4x+3} - \frac{2}{4x^2-4x+3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{4x^2-4x+3}dx$

ricordando che $4x^2-4x+3 = 4\left(\left(x-\frac{4}{8}\right)^2 + \frac{32}{64}\right) = 4\left(\left(\frac{2x-1}{2}\sqrt{2}\right)^2+1\right)\frac{1}{2}$ quindi il secondo

integrale diventa $\frac{1}{2}\int \frac{1}{4\left(\left(\frac{2x-1}{2}\sqrt{2}\right)^2+1\right)\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}}{\left(\left(\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)}dx$ infine abbiamo

$\int \frac{5x-2}{4x^2-4x+3}dx = \frac{5}{8}\log\left|4x^2-4x+3\right| + \frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\,\frac{2x-1}{\sqrt{2}}$, per cui sarà

$P(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{8}\log 3 + \frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\,\frac{-1}{\sqrt{2}} + C = 1 \Leftrightarrow C = 1 - \frac{5}{8}\log 3 - \frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\,\frac{-1}{\sqrt{2}}$, quindi la

primitiva cercata è: $P(x) = \frac{5}{8}\log\left|4x^2-4x+3\right| + \frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{2}} + 1 - \frac{5}{8}\log 3 - \frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\,\frac{-1}{\sqrt{2}}$

2. Dato il seguente limite, $\lim_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{3x^7-x}{-x^7+1}} - e^{-3}\right)x^2$, essendo $\left(e^{\frac{3x^7-x}{-x^7+1}} - e^{-3}\right) = e^{-3}\left(e^{\frac{3x^7-x}{-x^7+1}+3} - 1\right)$ ed osservando

che $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^7-x}{-x^7+1}+3 = 0$ possiamo calcolare il limite

$$e^{-3}\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{\frac{3x^7-x}{-x^7+1}+3}-1}{\frac{3x^7-x}{-x^7+1}+3}\right)x^2\,\frac{3x^7-x}{-x^7+1}+3 = \frac{1}{e^3}\log e\lim_{x\to-\infty}x^2\,\frac{-x+3}{-x^7+1} = \frac{1}{e^3}\log e\cdot 0$$

3. Data la funzione $x \to f(x) = arctg\,\frac{1}{e^x-1}$

L'insieme dei valori della funzione *f* è incluso in $arctg(R) = \left]-\pi/2, \pi/2\right[$, quindi *f* è limitata e pertanto il grafico di *f* può avere solo asintoti orizzontali.

Ricordando che la funzione arcotangente è definita in *R*, l'insieme di definizione di *f* coincide con l'insieme di definizione di $x \to \frac{1}{e^x - 1}$ e quindi l'insieme di definizione di f è: $\{x \in R, e^x - 1 \neq 0\}$ ed essendo $e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq 1 = e^0 \Leftrightarrow x \neq 0 \Leftrightarrow \in R - \{0\} =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ è:

$$f : x \in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[\to arctg\,\frac{1}{e^x - 1}$$

e risultando:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow arctg\,\frac{1}{e^x - 1} > 0 = arctgtg\,0 = arctg\,0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 = e^0 \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in]0,+\infty[$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow arctg\,\frac{1}{e^x - 1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e^x - 1} = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[-]0,+\infty[=]-\infty,0[$$

il grafico di f è al di sopra dell'asse delle x in $]0,+\infty[$, al di sotto dell'asse delle x in $]-\infty,0[$, non ha punti in comune con gli assi ed essendo:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} arctg\,\frac{1}{e^x - 1} = arctg(-1) = -\pi/4,$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} arctg\,\frac{1}{e^x - 1} = \lim_{y\to-\infty} arctg y = -\pi/2,$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} arctg\,\frac{1}{e^x - 1} = \lim_{y\to+\infty} arctg y = \pi/2 \text{ e } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} arctg\,\frac{1}{e^x - 1} = arctg\,0 = 0$$

il grafico di f ha due asintoti: la retta di equazione $y = -\pi/4$ asintoto orizzontale a sinistra e la retta di equazione $y = 0$ asintoto orizzontale a destra.

Essendo:

$$f'(x) = D arctg\,\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{(e^x - 1)^2}} \cdot \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2 + 1} \text{ se } x \in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset,\; f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$$

quindi f è strettamente decrescente in $]-\infty,0[$ ed in $]0,+\infty[$.

Risultando infine:

$$f''(x) = D\frac{-e^x}{(e^x - 1)^2 + 1} = -\frac{e^x(e^{2x} - 2e^x + 2) - e^x 2(e^x - 1)e^x}{((e^x - 1)^2 + 1)^2} = -\frac{e^x(e^{2x} - 2e^x + 2 - 2e^{2x} + 2e^x)}{((e^x - 1)^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{e^x(e^{2x} - 2)}{((e^x - 1)^2 + 1)^2} \text{ se } x \in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$$

è:

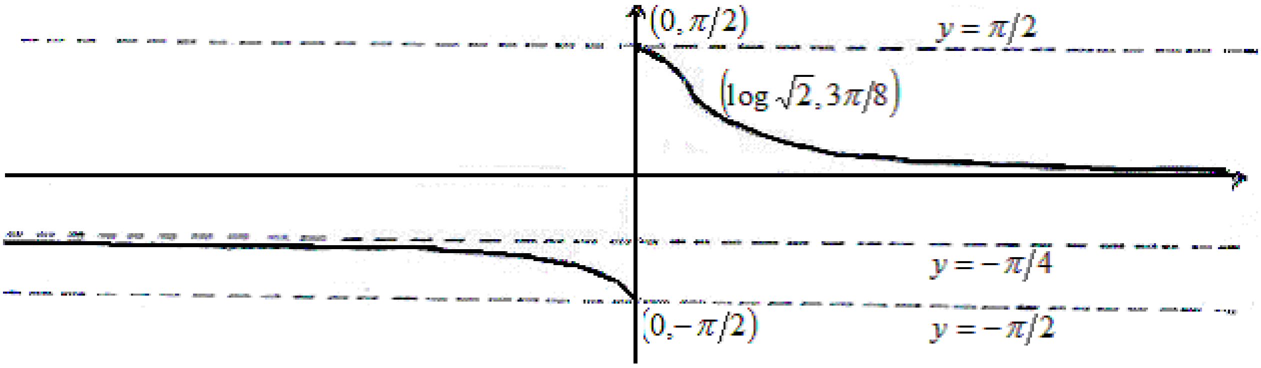
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 2 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 2 = e^{\log 2} \Leftrightarrow 2x > \log 2 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}\log 2 = \log\sqrt{2} \Leftrightarrow x \in]\log\sqrt{2},+\infty[$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \log\sqrt{2}$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[- [\log\sqrt{2},+\infty[=]-\infty,0[\cup]0,\log\sqrt{2}[$$

e pertanto f è strettamente concava in $]-\infty,0[$ ed in $]0,\log\sqrt{2}]$, è strettamente convessa in $[\log\sqrt{2},+\infty[$, ha un punto di flesso proprio in $\log\sqrt{2}$ con valore $f\left(\log\sqrt{2}\right)= arctg\,\frac{1}{e^{\log\sqrt{2}}-1} = arctg\,\frac{1}{\sqrt{2}-1} = arctg\left(\sqrt{2}+1\right)=\frac{3}{8}\pi$

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:



e quindi dedurre che:

$f\left(\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[\right)=\left]-\pi/2,-\pi/4\right[\cup\left]0,\pi/2\right[$, $f\left(\left]-\infty,0\right[\right)=\left]-\pi/2,-\pi/4\right[$, $f\left(\left]0,+\infty\right[\right)=\left]0,\pi/2\right[$, *f* è biunivoca su $\left]-\pi/2,-\pi/4\right[\cup\left]0,\pi/2\right[$, la restrizione di *f* a $\left]-\infty,0\right[$ è biunivoca su $\left]-\pi/2,-\pi/4\right[$, la restrizione di *f* a $\left]0,+\infty\right[$ è biunivoca su $\left]0,\pi/2\right[$, $\inf\limits_{x\in R-\{0\}} arctg\,\frac{1}{e^x-1}=\inf\left(\left]-\pi/2,-\pi/4\right[\cup\left]0,\pi/2\right[\right)=-\pi/2$ e $\sup\limits_{x\in R-\{0\}} arctg\,\frac{1}{e^x-1}=\sup\left(\left]-\pi/2,-\pi/4\right[\cup\left]0,\pi/2\right[\right)=\pi/2$..

4. Tale funzione:

$$h: x\in R\rightarrow\begin{cases} x^2+x & x\in\left]-\infty,0\right[\\ ax^3+bx^2+cx+d & x\in[0,1] \\ x^2-x & x\in\left]1,+\infty\right[\end{cases}$$

Essendo la funzione *f* continua in $\left]-\infty,0\right[$, in $\left]0,1\right[$ ed in $\left]1,+\infty\right[$ gli eventuali punti di discontinuità di *f* sono 0 ed 1.

Risultando: $f(0)=d$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(x^2+x\right)=0$ e $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)=d$ *f* è continua in 0 solo se è $d=0$, assumiamo quindi $d=0$.

Risultando inoltre: $f(1)=a+b+c$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(ax^3+bx^2+cx\right)=a+b+c$ e $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)= =\lim\limits_{x\to1^+}\left(x^2+x\right)=0$ *f* è continua in 1 solo se è $a+b+c=0\Leftrightarrow c=-a-b$, assumiamo quindi $c=-a-b$.

Pertanto la funzione *f* soddisfa le condizioni dei teoremi di BOLZANO solo se è: $d=0$ e $c=-a-b$.

Osservando ora che $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$ ed $f(2)=4-2=2$ la funzione *f* con $d=0$ e $c=-a-b$ soddisfa pure alle ipotesi del TEOREMA DEGLI ZERI.

5. La funzione $g: x \in R \to e^{x^3-3|x|}$ è composta da funzioni continue, quindi continua nell'insieme di definizione ed essendo l'intervallo $[-2,2]$ chiuso e limitato, per il Teorema di Weierstrass la funzione è dotata di minimo e di massimo assoluto. Per il Teorema dei punti critici $\max\limits_{x\in[-2,2]} g(x)=\max\limits_{x\in F} g(x)$, con $F=\{E\cup S\cup C\}$, pertanto è sufficiente trovare eventuali punti stazionari e punti in cui non è derivabile. Osserviamo che $g'(x)=e^{x^3-3|x|}D(x^3-3|x|)$, e ricordando che $D|x|=\frac{|x|}{x}$ con $x\neq 0$ quindi il punto in cui non è derivabile, si ha: $g'(x)=e^{x^3-3|x|}\left(3x^2-3\frac{|x|}{x}\right)=\begin{cases} e^{x^3-3|x|}(3x^2-3) & \text{se } x>0 \\ e^{x^3-3|x|}(3x^2+3) & \text{se } x<0 \end{cases}$, quindi $g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} g'(x)=0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$ ed anche $g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} g'(x)=0 \\ x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=0 \\ x<0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing$ pertanto possiamo affermare che esiste un solo punto stazionario 1 ed un punto singolare 0 quindi l'insieme dei punti critici: $F=\{-2,0,1,2\}$ e conseguentemente $\max\limits_{x\in[-2,2]} g(x)=\max\limits_{x\in F}\{g(-2)g(0)g(1)g(2)\}=\{e^{-14},1,e^{-2}e^2\}=g(2)=e^2$.

Svolgimento prova scritta del 08 giugno 2016 traccia B

1. Una primitiva della funzione assegnata è data dal seguente integrale:

$p(x)=\frac{5x+2}{4x^2-2x+2}$, tenendo conto che $\frac{5x+2}{4x^2-2x+2}=\frac{5x}{4x^2-2x+2}+\frac{2}{4x^2-2x+2}$ e che $D(4x^2-2x+2)=8x-2$ si può scrivere $\frac{5x+2}{4x^2-2x+2}=\frac{5}{8}\left(\frac{8}{5}\frac{5x}{4x^2-2x+2}\right)+\frac{2}{4x^2-2x+2}=\frac{5}{8}\left(\frac{8x+2-2}{4x^2-2x+2}\right)+\frac{2}{4x^2-2x+2}$ ovvero $\frac{5}{8}\left(\frac{8x+2}{4x^2-2x+2}\right)-\frac{5}{8}\frac{2}{4x^2-2x+2}+\frac{2}{4x^2-2x+2}$ pertanto $\int\frac{5x+2}{4x^2-2x+2}dx=\frac{5}{8}\int\frac{8x+2}{4x^2-2x+2}dx+\int-\frac{5}{8}\frac{2}{4x^2-2x+2}+\frac{2}{4x^2-2x+2}dx$, quindi questo secondo integrale è $\int-\frac{1}{4}\frac{5}{4x^2-2x+2}+\frac{2}{4x^2-2x+2}dx=\frac{3}{4}\int\frac{1}{4x^2-2x+2}dx=$ ricordando che $4x^2-2x+2=4\left(\left(x-\frac{2}{8}\right)^2+\frac{28}{64}\right)=4\left(\left(\frac{4x-1}{4}\sqrt{\frac{16}{7}}\right)^2+1\right)\frac{7}{16}$ quindi il secondo integrale diventa

$$\frac{3}{4}\int\frac{1}{4\left(\left(\frac{4x-1}{4}\sqrt{\frac{16}{7}}\right)^2+1\right)\frac{7}{16}}dx=\frac{3}{4}\frac{\sqrt{7}}{4}\frac{4}{7}\int\frac{4/\sqrt{7}}{\left(\left(\frac{4x-1}{\sqrt{7}}\right)^2+1\right)}dx$$

infine abbiamo

$$\int\frac{5x+2}{4x^2-2x+2}dx=\frac{5}{8}\log\left|4x^2-2x+2\right|+\frac{3}{4\sqrt{7}}arctg\frac{4x-1}{\sqrt{7}}$$

, per cui sarà

$$P(0)=1\Leftrightarrow\frac{5}{8}\log 2+\frac{3}{4\sqrt{7}}arctg\frac{-1}{\sqrt{7}}+C=1\Leftrightarrow C=1-\frac{5}{8}\log 2-\frac{3}{4\sqrt{7}}arctg\frac{-1}{\sqrt{7}}$$

, quindi la primitiva cercata è: $P(x)=\frac{5}{8}\log\left|4x^2-2x+2\right|+\frac{3}{4\sqrt{7}}arctg\frac{4x+1}{\sqrt{7}}+1-\frac{5}{8}\log 2-\frac{3}{4\sqrt{7}}arctg\frac{-1}{\sqrt{7}}$

2. Dato il seguente limite, $\lim_{x\to+\infty}\left(e^{\left(\frac{x^2+x}{2x^2+1}\right)}-\sqrt{e}\right)x^3$, essendo

$\left(e^{\left(\frac{x^2+x}{2x^2+1}\right)}-\sqrt{e}\right)=\sqrt{e}\left(e^{\left(\frac{x^2+x}{2x^2+1}-\frac{1}{2}\right)}-1\right)$ ed osservando che $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x}{2x^2+1}-\frac{1}{2}\right)=0$ possiamo

calcolare il limite $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{e}\left(e^{\left(\frac{x^2+x}{2x^2+1}-\frac{1}{2}\right)}-1\right)x^3=\sqrt{e}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{\left(\frac{x^2+x}{2x^2+1}-\frac{1}{2}\right)}-1}{\frac{x^2+x}{2x^2+1}-\frac{1}{2}}\right)x^3\left(\frac{x^2+x}{2x^2+1}-\frac{1}{2}\right)$, quindi si ha $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{e}\left(e^{\left(\frac{x^2+x}{2x^2+1}-\frac{1}{2}\right)}-1\right)x^3=\sqrt{e}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{\left(\frac{x^2+x}{2x^2+1}-\frac{1}{2}\right)}-1}{\frac{x^2+x}{2x^2+1}-\frac{1}{2}}\right)x^3\left(\frac{x^2+x}{2x^2+1}-\frac{1}{2}\right)$ ovvero

$$\sqrt{e}\lim_{x\to+\infty}x^3\left(\frac{2x^2+2x-2x^2-1}{2(2x^2+1)}\right)=\sqrt{e}(+\infty)$$

3. Data la funzione $x\to f(x)=arc\cot g\frac{1}{e^x-1}$

L'insieme dei valori della funzione f è incluso in $arc\cot g(R)=]0,\pi[$, quindi f è limitata e pertanto il grafico di f può avere solo asintoti orizzontali.

Ricordando che la funzione arcocotangente è definita in R, l'insieme di definizione di f coincide con l'insieme di definizione di $x\to\frac{1}{e^x-1}$ e quindi l'insieme di definizione di f è: $\{x\in R, e^x-1\neq 0\}$ ed essendo $e^x-1\neq 0\Leftrightarrow e^x\neq 1=e^0\Leftrightarrow x\neq 0\Leftrightarrow\in R-\{0\}=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ è:

$$f:x\in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[\to arc\cot g\frac{1}{e^x-1}$$

e risultando:

$f(x)=0\Leftrightarrow f(x)<0\Leftrightarrow x\in\varnothing$

$f(x)>0\Leftrightarrow x\in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

il grafico di f è al di sopra dell'asse delle x in $]-\infty,0[$ ed in $]0,+\infty[$, non ha punti in comune con gli assi ed essendo:

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}arc\cot g\frac{1}{e^x-1}=arc\cot g(-1)=3\pi/4$,

$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}arc\cot g\frac{1}{e^x-1}=\lim_{y\to-\infty}arc\cot gy=\pi$,

$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}arc\cot g\frac{1}{e^x-1}=\lim_{y\to+\infty}arc\cot gy=0$ e

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}arctg\frac{1}{e^x-1}=arc\cot g0=\pi/2$

il grafico di f ha due asintoti: la retta di equazione $y=3\pi/4$ asintoto orizzontale a sinistra e la retta di equazione $y=\pi/2$ asintoto orizzontale a destra.

Essendo:

$$f'(x)=Darc\cot g\frac{1}{e^x-1}=\frac{-1}{1+\frac{1}{(e^x-1)^2}}\cdot\frac{-e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{e^x}{(e^x-1)^2+1}\text{ se }x\in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$$

$f'(x)<0\Leftrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x\in\varnothing$, $f'(x)>0\Leftrightarrow x\in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

quindi f è strettamente crescente in $]-\infty,0[$ ed in $]0,+\infty[$.

Risultando infine:

$$f''(x) = D\frac{e^x}{(e^x-1)^2+1} = \frac{e^x\left(e^{2x}-2e^x+2\right)-e^x 2\left(e^x-1\right)e^x}{\left((e^x-1)^2+1\right)^2} = \frac{e^x\left(e^{2x}-2e^x+2-2e^{2x}+2e^x\right)}{\left((e^x-1)^2+1\right)^2} =$$

$$= \frac{e^x\left(2-e^{2x}\right)}{\left((e^x-1)^2+1\right)^2} \text{ se } x \in \left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$$

è:

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2-e^{2x} > 0 \Leftrightarrow e^{2x} < 2 = e^{\log 2} \Leftrightarrow 2x < \log 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{1}{2}\log 2 = \log\sqrt{2} \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,0\right[\cup\left]0,\log\sqrt{2}\right[$$

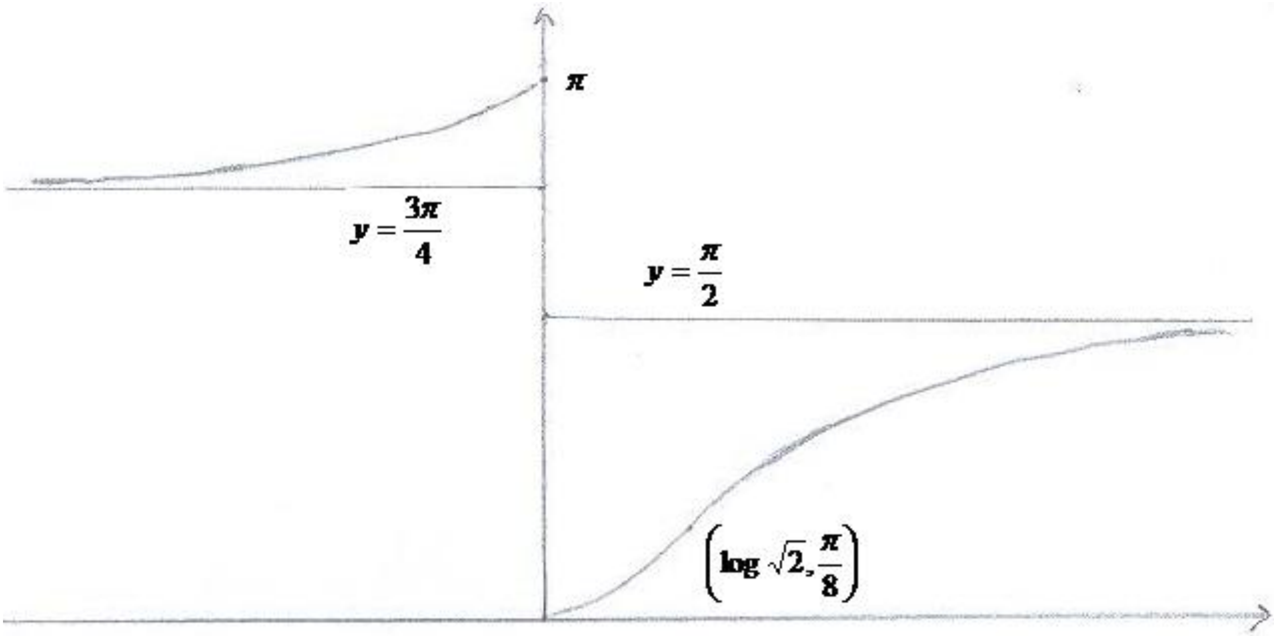
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x}-2 = 0 \Leftrightarrow x = \log\sqrt{2}$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[-\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,\log\sqrt{2}\right[= \left]\log\sqrt{2},+\infty\right[$$

e pertanto *f* è strettamente convessa in $\left]-\infty,0\right[$ ed in $\left]0,\log\sqrt{2}\right[$, è strettamente concava in $\left]\log\sqrt{2},+\infty\right[$, ha un punto di flesso proprio in $\log\sqrt{2}$ con valore

$$f\left(\log\sqrt{2}\right) = arc\cot g\frac{1}{e^{\log\sqrt{2}}-1} = arc\cot g\frac{1}{\sqrt{2}-1} = arc\cot g\left(\sqrt{2}+1\right) = \frac{\pi}{8}$$

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:



e quindi dedurre che:

$f\left(\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[\right) = \left]0,\pi/2\right[\cup\left]3\pi/4,\pi\right[$, $f\left(\left]-\infty,0\right[\right) = \left]3\pi/4,\pi\right[$, $f\left(\left]0,+\infty\right[\right) = \left]0,\pi/2\right[$, *f* è biunivoca su $\left]0,\pi/2\right[\cup\left]3\pi/4,\pi\right[$, la restrizione di *f* a $\left]-\infty,0\right[$ è biunivoca su $\left]3\pi/4,\pi\right[$, la restrizione di *f* a $\left]0,+\infty\right[$ è biunivoca su $\left]0,\pi/2\right[$, $\inf_{x\in R-\{0\}} arc\cot g\frac{1}{e^x-1} = \inf\left(\left]0,\pi/2\right[\cup\left]3\pi/4,\pi\right[\right) = 0$ e

$$\sup_{x\in R-\{0\}} arc\cot g\,\frac{1}{e^x-1}=\sup\left(\left]0,\pi/2\right[\cup\left]3\pi/4,\pi\right[\right)=\pi\,.$$

4. Tale funzione:

$$h:x\in R\to\begin{cases}2x+x & x\in\left]-\infty,0\right[\\ ax^3-bx^2+cx+d & x\in[0,1]\\ x^2-x & x\in\left]1,+\infty\right[\end{cases}$$

Essendo la funzione *f* continua in $\left]-\infty,0\right[$, in $\left]0,1\right[$ ed in $\left]1,+\infty\right[$ gli eventuali punti di discontinuità di *f* sono 0 ed 1.

Risultando: $f(0)=d$, $\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(2x+x)=0$ e $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(ax^3-bx^2+cx+d\right)=d$ f è continua in 0 solo se è $d=0$, assumiamo quindi $d=0$.

Risultando inoltre: $f(1)=a-b+c$, $\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\left(ax^3-bx^2+cx\right)=a-b+c$ e $\lim_{x\to1^+}f(x)=$ $=\lim_{x\to1^+}\left(x^2-x\right)=0$ *f* è continua in 1 solo se è $a-b+c=0\Leftrightarrow c=b-a$, assumiamo quindi $c=-a-b$.

Pertanto la funzione *f* soddisfa le condizioni dei teoremi di BOLZANO solo se è: $d=0$ e $c=b-a$.

Osservando ora che $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-1-\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}$ ed $f(2)=4-2=2$ la funzione *f* con $d=0$ e $c=b-a$ soddisfa pure alle ipotesi del TEOREMA DEGLI ZERI.

5. La funzione $g:x\in R\to e^{2x^2-4|x|}$ è composta da funzioni continue, quindi continua nell'insieme di definizione ed essendo l'intervallo $[-2,2]$ chiuso e limitato, per il Teorema di Weierstrass la funzione è dotata di minimo e di massimo assoluto. Per il Teorema dei punti critici $\min_{x\in[-2,2]}g(x)=\min_{x\in F}g(x)$, con $F=\{E\cup S\cup C\}$, pertanto è sufficiente trovare eventuali punti stazionari e punti in cui non è derivabile. Osserviamo che $g'(x)=e^{2x^2-4|x|}D\left(2x^2-4|x|\right)$, e ricordando che $D|x|=\frac{|x|}{x}$ con $x\neq0$ quindi il punto in cui non è derivabile, si ha: $g'(x)=e^{2x^2-4|x|}\left(4x-4\frac{|x|}{x}\right)=\begin{cases}e^{2x^2-4|x|}(4x-4) & \text{se } x>0\\ e^{2x^2-4|x|}(4x+4) & \text{se } x<0\end{cases}$, quindi

$g'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}g'(x)=0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$ ed anche

$g'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}g'(x)=0\\ x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=0\\ x<0\end{cases}\Leftrightarrow x=-1$ pertanto possiamo affermare che esistono due punti stazionari $\{-1,1\}$ ed un punto singolare 0 quindi l'insieme dei punti critici: $F=\{-2,-1,0,1,2\}$ e conseguentemente

$$\min_{x\in[-2,2]}g(x)=\min_{x\in F}\{g(-2),g(-1),g(0),g(1),g(2)\}=\{1,e^{-2},1,e^{-2},1\}=g(-1)=g(1)=e^{-2}$$