Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
08 febbraio 2017
(prof. Bisceglia)

Traccia A

1. Calcolare il seguente $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2+x+1}-\sqrt{4x^2+3}$, e verificare che sia corretto.

2. Data la funzione $h: x\in\left[\frac{(1-e)}{2},\frac{(1-e^{-1})}{2}\right]\to\begin{cases}\dfrac{arcsen\log(1-2x)}{sen(e^x-1)} & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$, individuare il punto di discontinuità e classificarlo.

3. Studiare la funzione $x\to f(x)=\dfrac{1}{arctg(x-1)}$, e tracciarne approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione $g: x\in R\to\begin{cases}2x+1 & x\in\left]-\infty,2\right]\\ 2^x+h & x\in\left]2,+\infty\right[\end{cases}$, dire, per quale valore del parametro *h* soddisfa le ipotesi del Teorema degli Zeri.

5. Data la funzione $p(x)=\dfrac{x-2}{x^2-16}$, calcolare la primitiva *P* tale che $P(3)=0$ e scrivere l'equazione della tangente sulla primitiva *P*, nel punto 1.

6. Data la funzione $f(x,y)=\log(xy^2-x^2y)$, determinare il suo gradiente, ed eventuali punti stazionari.
(A.A. 2016/2017)

Svolgimento - Traccia A

1. Essendo $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2+x+1}-\sqrt{4x^2+3}=\lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-|x|\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}\right)$, ovvero
$\lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-|x|\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}\right)=\lim_{x\to+\infty}|x|\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}\right)$ quindi
$\lim_{x\to+\infty}|x|\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}\right)=\lim_{x\to+\infty}|x|(\sqrt{3}-2)=-\infty=\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{3}-2)=-\infty$. Per cui si ha
$x(\sqrt{3}-2)<-\varepsilon\Leftrightarrow x>\frac{\varepsilon}{2-\sqrt{3}}\Leftrightarrow x>\frac{\varepsilon}{2-\sqrt{3}}$, e quindi posto $\delta=\frac{\varepsilon}{2-\sqrt{3}}$, abbiamo individuato un intorno di più infinito.

2. h è continua in $\left[(1-e)/2,(1-e^{-1})/2\right]-\{0\}$ e risultando $h(0)=2$ e $\lim_{x\to0}h(x)=$
$$=\lim_{x\to0}\frac{arcsen\log(1-2x)}{sen(e^x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{arcsen\log(1-2x)}{\log(1-2x)}\frac{\log(1-2x)}{-2x}(-2x)\frac{1}{\frac{sen(e^x-1)}{e^x-1}\frac{e^x-1}{x}x}=-2\neq2=h(0)$$
h ha in zero un punto di discontinuità eliminabile.

3. Data la funzione: $x \to f(x) = \dfrac{1}{arctg(x-1)}$.

Ricordando che la funzione arcotangente è definita in *R*, ed è nulla se e solo se l'argomento è zero l'insieme di definizione di *f* è: $\{x \in R, x-1 \neq 0\}$ ed essendo $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \Leftrightarrow x \in R - \{1\} =]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$ è:

$$f : x \in]-\infty,1[\cup]1,+\infty[\to \frac{1}{arctg(x-1)}$$

e risultando:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{arctg(x-1)} > 0 \Leftrightarrow arctg(x-1) > 0 = arctgtg\, 0 = arctg\, 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow x \in]1,+\infty[$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{arctg(x-1)} = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,1[\cup]1,+\infty[-]1,+\infty[=]-\infty,1[$$

il grafico di *f* si trova al di sopra dell'asse delle *x* in $]1,+\infty[$, al di sotto dell'asse delle *x* in $]-\infty,1[$, ha in comune con gli assi il punto $(0, f(0)) = \left(0, \dfrac{1}{arctg(-1)}\right) = (0,-4/\pi)$ ed essendo:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{arctg(x-1)} = -\frac{2}{\pi}, \ \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{1}{arctg(x-1)} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{1}{arctg(x-1)} = +\infty \ \text{e} \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{arctg(x-1)} = \frac{2}{\pi}$$

il grafico di *f* ha tre asintoti: la retta di equazione $y = -2/\pi$ asintoto orizzontale a sinistra, la retta di equazione $x = 1$ asintoto verticale a sinistra e a destra e la retta di equazione $y = 2/\pi$ asintoto orizzontale a destra.

Essendo:

$$f'(x) = D\frac{1}{arctg(x-1)} = -\frac{1}{\left(1+(x-1)^2\right)arctg^2(x-1)} \ \text{se} \ x \in]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$$

e

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing \ \text{ed} \ f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$$

quindi la funzione *f* è strettamente decrescente in $]-\infty,1[$ ed in $]1,+\infty[$.

Risultando infine:

$$f''(x) = D\frac{-1}{\left(1+(x-1)^2\right)arctg^2(x-1)} = \frac{D\left(1+(x-1)^2\right)arctg^2(x-1)}{\left(1+(x-1)^2\right)^2 arctg^4(x-1)} = \frac{2(x-1)arctg^2(x-1) + 2arctg(x-1)}{\left(1+(x-1)^2\right)^2 arctg^4(x-1)} =$$

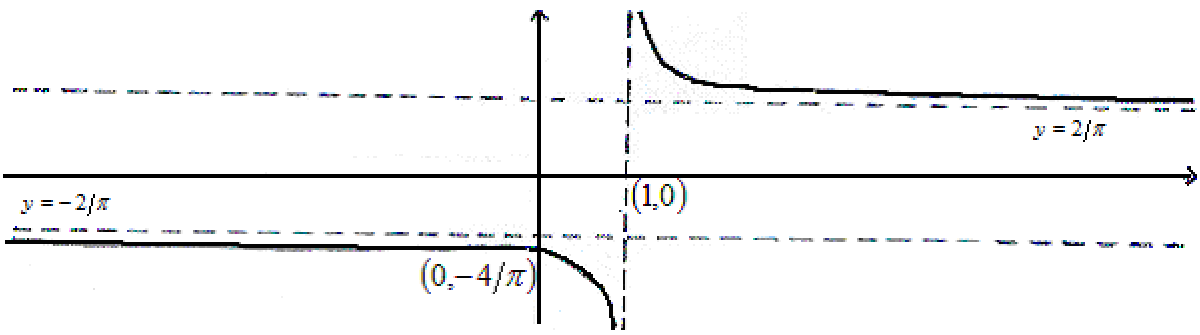
$= \dfrac{2(x-1)arctg(x-1)+2}{\left(1+(x-1)^2\right)^2 arctg^3(x-1)} =$ se $x \in]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$ ed osservando che $\dfrac{2(x-1)arctg(x-1)+2}{\left(1+(x-1)^2\right)^2 arctg^2(x-1)}$ è maggiore di zero per ogni elemento x di $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

è:

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow arctg(x-1)>0 \Leftrightarrow x\in]1,+\infty[,\ f''(x)=0 \Leftrightarrow x\in\varnothing \text{ ed } f''(x)<0 \Leftrightarrow x\in]-\infty,1[$$

e pertanto f è strettamente convessa in $]1,+\infty[$ e strettamente concava in $]-\infty,0[$.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di f:



e quindi dedurre che:

$f(]-\infty,1[\cup]1,+\infty[) =]-\infty,-2/\pi[\cup]2/\pi,+\infty[$, f è biunivoca, non limitata inferiormente e non limitata superiormente.

OSSERVAZIONE. È immediato convincersi che f è una funzione $(1,0)$-simmetrica pertanto avremmo potuto limitarci a tracciare il grafico G della restrizione di f a $]1,+\infty[$ ed ottenere il grafico di f unendo a G la curva G' simmetrica di G rispetto al punto $(1,0)$.

4. Essendo g evidentemente continua in $R-\{2\}$, ed osservando che $g(2)=5$, che $\lim_{x\to 2^-} g(x)=5$ e che $\lim_{x\to 2^+} g(x)=4+h=g(2)\Leftrightarrow h=1$, la funzione risulterà continua anche in 2 per il parametro $h=1$, ed essendo $g(x)>0 \Leftrightarrow 2x+1>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{1}{2}$, quindi esistono due punti per cui $g(-1)\cdot g(1)<0$, quindi la funzione soddisferebbe tutte le ipotesi del Teorema degli Zeri.

5. Essendo $p(x)=\dfrac{x-2}{x^2-16}$, si osserva che $\dfrac{x-2}{x^2-16}=\dfrac{x-2}{x^2-4^2}=\dfrac{x-2}{(x-4)(x+4)}$ quindi possiamo scrivere la nostra funzione come $\dfrac{A}{(x-4)}+\dfrac{B}{(x+4)}=\dfrac{A(x+4)+B(x-4)}{(x-4)(x+4)}=\dfrac{(A+B)x+4(A-B)}{(x-4)(x+4)}$, pertanto per la similitudine dei polinomi deve essere $\begin{cases} A+B=1 \\ 4(A-B)=-2 \end{cases} = \begin{cases} A+B=1 \\ A=-\dfrac{1}{2}+B \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}+B+B=1 \\ A=-\dfrac{1}{2}+B \end{cases} = \begin{cases} B=\dfrac{3}{4} \\ A=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

pertanto $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2-16}dx = \frac{1}{4}\int\frac{1}{x-4}dx+\frac{3}{4}\int\frac{1}{x+4}dx$ per cui $P(x)=\dfrac{1}{4}\log|x-4|+\dfrac{3}{4}\log|x+4|+c$ e quindi $P(3)=0 \Leftrightarrow = \frac{1}{4}\log|3-4|+\frac{3}{4}\log|3+4|+c=0 \Leftrightarrow c=-\frac{3}{4}\log 7$ ovvero la primitiva cercata è $P(x)=\frac{1}{4}\log|x-4|+\frac{3}{4}\log|x+4|-\frac{3}{4}\log 7$. Infine l'equazione della tangente sulla primitiva *P*, nel punto 1, è: $y=P'(1)(x-1)+P(1) \Leftrightarrow y=p(1)(x-1)+P(1)$ ovvero $y=\frac{1}{15}(x-1)+\frac{1}{4}\log|-3|+\frac{3}{4}\log\frac{5}{7}$.

6. Data la $f(x,y)=\log\left(xy^2-x^2y\right)$ il suo gradiente $\nabla f(x,y)=\left[f_x(x,y), f_y(x,y)\right]$. per cui, essendo $f'_x(x,y)=\frac{1}{xy^2-x^2y}D_x\left(xy^2-x^2y\right)=\frac{y^2-2xy}{xy^2-x^2y}=\frac{y(y-2x)}{y\left(xy-x^2\right)}=\frac{y-2x}{xy-x^2}$ e $f'_y(x,y)=\frac{1}{xy^2-x^2y}D_y\left(xy^2-x^2y\right)=\frac{2yx-x^2}{xy^2-x^2y}=\frac{x(2y-x)}{x\left(y^2-xy\right)}=\frac{2y-x}{y^2-xy}$ per cui $\nabla f(x,y)=\left[\frac{2x-y}{x^2-xy},\frac{2y-x}{y^2-xy}\right]$ gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases}\frac{2x-y}{x^2-xy}=0\\ \frac{2y-x}{y^2-xy}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-y=0\\ 2y-x=0\end{cases}=\begin{cases}2x=y\\ 2y=x\end{cases}$ quindi l'unico punto che annulla quest'ultimo sistema è il punto $P_1(0,0)$, ma tale punto pone il sistema del gradiente sotto forma indeterminata, pertanto non è un punto stazionario.