Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
31 ottobre 2018
(prof. M. Bisceglia)

Traccia A

1. Data la funzione $h : x \in R \to \begin{cases} -3^x & \text{se } x < 1 \\ \pi & \text{se } x = 1 \\ 3x & \text{se } x > 1 \end{cases}$, dire se esistono dei punti di discontinuità e classificarli.

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{arcsen(2^x - 1) + senx}{\log_2(1-x)}$, dire se regolare in $x_0 = 0$ e nel caso, a cosa tende la funzione al tendere di x a 0.

3. *Studiare* la funzione $f : X \to f(x) = |x^2 - 1|$, e *tracciarne* approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione $g : x \in [0,1] \to hx^2 - x + 2h$, dire, per quali valori del parametro h soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle.

5. Data la funzione $p(x) = (x^2 - x + 1)e^{\frac{x}{2}}$, calcolare *la primitiva P* tale che $P(0) = 1$; scrivere inoltre l'*equazione della tangente* sulla primitiva *P*, *nel punto* $(1, P(1))$. Inoltre calcolare la distanza della *retta tangente dall'origine*.

Svolgimento traccia A

1. Essendo $h : x \in R \to \begin{cases} -3^x & \text{se } x < 1 \\ \pi & \text{se } x = 1 \\ 3x & \text{se } x > 1 \end{cases}$, si osserva che $h(1) = \pi$, ed $\lim_{x \to 1^-} -3^x = -3$ mentre $\lim_{x \to 1^+} 3x = 3$ per cui nel punto 1, la funzione ha un punto di discontinuità di *prima specie*.

2. La funzione $f(x) = \dfrac{arcsen(2^x - 1) + senx}{\log_2(1-x)}$, per essere regolare in $x_0 = 0$, tale punto deve essere di accumulazione per il dominio della funzione, pertanto, per la funzione arcoseno, si ha $(2^x - 1) \in [-1,1] \Leftrightarrow 2^x \in [0,2] \Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,1]$, mentre la funzione seno è definita in R e per la funzione logaritmo si ha $1 - x \in]0,+\infty[\Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,1[$, ed inoltre $\log_2(1-x) \neq 0 \Leftrightarrow 1 - x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$; pertanto il dominio della funzione risulta $\forall x \in (]-\infty,1] \cap R \cap]-\infty,1[- \{0\}) \Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,0[\cup]0,1[$, per cui essendo zero, un punto di accumulazione per il dominio della funzione, questa è regolare nel punto $x_0 = 0$, è risulta
$$\lim_{x \to 0} \frac{arcsen(2^x - 1) + senx}{\log_2(1-x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{arcsen(2^x - 1)}{2^x - 1} \cdot \dfrac{(2^x - 1)}{x} x + senx}{\dfrac{\log_2(1-x)}{-x}(-x)} = -\log^2 2$$
e quindi la funzione risulta convergente nel punto $x_0 = 0$.

3. *Data la seguente funzione*: $f: X \to f(x) = |x^2 - 1|$.

I. *Dominio*:

Ricordando che la funzione valore assoluto è definita in *R*, l'insieme di definizione di *f* è: $\forall x \in R$ è:

$$f: x \in R \to |x^2 - 1|$$

II. *Segno della funzione:*

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow |x^2 - 1| > 0 \Leftrightarrow \forall x \in R$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow \forall x \in \varnothing$$

il grafico di *f* si trova sempre al di sopra dell'asse delle *x*, ha in comune con gli assi il punto $(-1, f(-1)) = (-1,0)$ ed il punto $(1, f(1)) = (1,0)$ essendo:

III. *Limiti significativi*:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \text{ ed } \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \text{ e } \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ pertanto}$$

il grafico di *f* non ha asintoti.

IV. *Derivata prima e monotonia:*

Essendo:

$$f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ se } x \in \left]-\infty,-1\right] \cup \left[1,+\infty\right[\\ 1 - x^2 \text{ se } x \in \left]-1,1\right[\end{cases}, \text{ si ha:}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \quad \text{se } x \in \left]-\infty,-1\right] \cup \left[1,+\infty\right[\\ -2x \text{ se } x \in \left]-1,1\right[\end{cases}$$

e

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 0 \Leftrightarrow x \in \left]0,+\infty\right[\cap \left(\left]-\infty,-1\right] \cup \left[1,+\infty\right[\right) \Leftrightarrow x \in \left[1,+\infty\right[\\ -2x > 0 \Leftrightarrow 2x < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,0\right[\cap \left]-1,1\right[\Leftrightarrow x \in \left]-1,0\right[\end{cases} \text{ ed}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,0\right[\cap \left(\left]-\infty,-1\right] \cup \left[1,+\infty\right[\right) \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-1\right] \\ -2x < 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x \in \left]0,+\infty\right[\cap \left]-1,1\right[\Leftrightarrow x \in \left]0,1\right[\end{cases}$$

quindi la funzione *f* è strettamente crescente in $\left]1,+\infty\right[$ ed in $\left]-1,0\right[$. ed è strettamente decrescente in $\left]-\infty,-1\right[$ ed in $\left]0,1\right[$.

V. *Derivata seconda e concavità:*

Risultando infine:

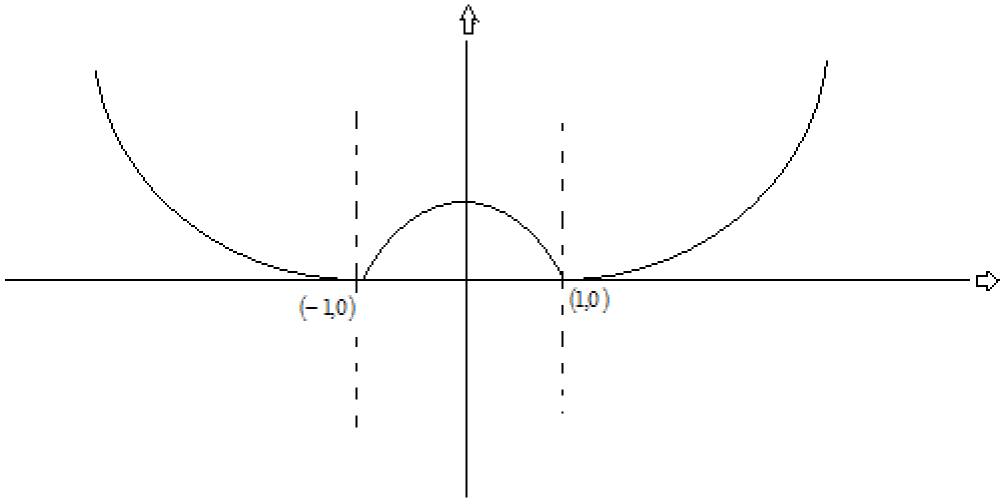
$$f''(x) = \begin{cases} 2 \quad \text{se } x \in \left]-\infty,-1\right] \cup \left[1,+\infty\right[\\ -2 \text{ se } x \in \left]-1,1\right[\end{cases}$$

è:

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \{2 > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-1\right] \cup \left[1,+\infty\right[, \quad f''(x) < 0 \Leftrightarrow \{-2 < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-1,1\right[$$

e pertanto *f* è strettamente convessa in $\left]-\infty,-1\right] \cup \left[1,+\infty\right[$ e strettamente concava in $\left]-1,1\right[$.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:



e quindi dedurre che:
$f(R)=[0,+\infty[$, f non è biunivoca, limitata inferiormente e non limitata superiormente.

OSSERVAZIONE. È immediato convincersi che f è una funzione $(0,0)$-simmetrica, quindi pari, pertanto avremmo potuto limitarci a tracciare il grafico G della restrizione di f a $]0,+\infty[$ ed ottenere il grafico di f unendo a G la curva G' simmetrica di G rispetto al punto $(0,0)$.

4. Per il Teorema di Rolle la funzione $g: x\in[0,1]\to hx^2-x+2h$, soddisfa le ipotesi di continuità in $[0,1]$, e di derivabilità in $]0,1[$, pertanto per completare le ipotesi del Teorema di Rolle, deve essere $g(0)=g(1)\Leftrightarrow 2h=3h-1\Leftrightarrow h=1$.

5. Essendo la funzione $p(x)=(x^2-x+1)e^{\frac{x}{2}}$, calcoliamo la primitiva procedendo per parti, quindi $\int(x^2-x+1)e^{\frac{x}{2}}dx=(x^2-x+1)2e^{\frac{x}{2}}-2\int(2x-1)e^{\frac{x}{2}}dx$ e conseguentemente per questo secondo $\int(2x-1)e^{\frac{x}{2}}dx$ procedendo ancora per parti, quindi si ha $\int(2x-1)e^{\frac{x}{2}}dx=(2x-1)2e^{\frac{x}{2}}-4\int e^{\frac{x}{2}}dx=(4x-2)e^{\frac{x}{2}}-8e^{\frac{x}{2}}$ quindi, $\int(x^2-x+1)e^{\frac{x}{2}}dx=2(x^2-x+1)e^{\frac{x}{2}}-2(4x-2)e^{\frac{x}{2}}+16e^{\frac{x}{2}}=e^{\frac{x}{2}}(2x^2-10x+22)+c$, per cui $P(0)=1\Leftrightarrow e^{\frac{0}{2}}(2(0)^2-10\cdot 0+22)+c=1\Leftrightarrow c=1-22$, quindi la primitiva cercata è $P(x)=e^{\frac{x}{2}}(2x^2-10x+22)-21$. Conseguentemente la retta tangente sulla primitiva P nel punto $(1,P(1))$, essendo $y=P'(1)(x-1)+P(1)$, per cui $P'(1)=p(1)=e^{\frac{1}{2}}$ e $P(1)=14e^{\frac{1}{2}}-21$, si ha che la retta tangente risulta: $y=e^{\frac{1}{2}}(x-1)+14e^{\frac{1}{2}}-21\Leftrightarrow y=e^{\frac{1}{2}}x+13e^{\frac{1}{2}}-21$. Inoltre la distanza della retta tangente $t: e^{\frac{1}{2}}x-y+13e^{\frac{1}{2}}-21=0$ dall'origine, risulta: $d(t,(0,0))=\dfrac{\left|13e^{\frac{1}{2}}-21\right|}{\sqrt{\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2+(-1)^2}}=\dfrac{\left|13e^{\frac{1}{2}}-21\right|}{\sqrt{e+1}}$.