Matematica per l’Economia (A-K) e Matematica Generale – 30 giugno 2016 (prof. Bisceglia)

traccia A

1. Calcolare la primitiva della funzione $p(x)$, che nel punto 0 assume valore -2

$$p : x \in [-1,3] \to \frac{x-2}{(x^2-16)(x^2+1)}$$

2. Calcolare il seguente limite (si consiglia di ricondurlo alla forma $\frac{a^{f(x)}-1}{f(x)}$)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3^{\frac{2x^2+x-1}{2x^2+x+1}}-3+arsen\frac{1}{x^2}\right)\frac{x^4+1}{x^2}$$

3. Studiare la seguente funzione e tracciarne approssimativamente il grafico:

$$x \to f(x) = arcsen\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

4. Per quali valori del parametro *h* la funzione:

$$j : x \in [0,1] \to \begin{cases} 1-h & \text{se } x=0 \\ e^x\,\dfrac{arcsen\log(x+1)}{x}+h(x^2-1) & \text{se } x\in\,]0,1] \end{cases}$$

soddisfa le ipotesi del Teorema di ROLLE.

5. Dopo aver giustificato l’esistenza dei punti di minimo e massimo assoluti della funzione in $[-1,2]$, trovare tali punti e calcolare il massimo:

$$g : x \in R \to |x^2-x|$$

N.B. 1) Non si possono usare, pena l’annullamento della prova: calcolatrici, cellulari ed appunti vari. 2) Non si accettano elaborati scritti a matita. 3) Va consegnato solo il foglio di bella e la traccia compilata nel riquadro.

Cognome	Nome	Matricola	Firma

Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale – 30 giugno 2016 (prof. Bisceglia)

traccia B

1. Calcolare la primitiva della funzione $p(x)$, che nel punto -2 assume valore 0

$$p : x \in [-3,-2] \to \frac{x-1}{(x^2-9)(x^2-1)}$$

2. Calcolare il seguente limite (si consiglia di ricondurlo alla forma $\frac{a^{f(x)}-1}{f(x)}$)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2}^{\frac{3x^3+2x-1}{3x^3-2x+1}}-\sqrt{2}-arsen\frac{1}{x}\right)\frac{x^3-1}{x^2}$$

3. Studiare la seguente funzione e tracciarne approssimativamente il grafico:

$$x \to f(x) = \arccos\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

4. Per quali valori del parametro *h* la funzione:

$$j : x \in [0,1] \to \begin{cases} 1+h & \text{se } x=0 \\ e^x \dfrac{arctg(3^{2x}-1)}{2x}\log_3 e - h(x^3-1) & \text{se } x \in]0,1] \end{cases}$$

soddisfa le ipotesi del Teorema di ROLLE.

5. Dopo aver giustificato l'esistenza dei punti di minimo e massimo assoluti della funzione in $[-1,1]$, trovare tali punti e calcolare il minimo:

$$g : x \in R \to |x^2-2x|$$

N.B. 1) Non si possono usare, pena l'annullamento della prova: calcolatrici, cellulari ed appunti vari. 2) Non si accettano elaborati scritti a matita. 3) Va consegnato solo il foglio di bella e la traccia compilata nel riquadro.

Cognome	Nome	Matricola	Firma

Svolgimento prova scritta del 30 giugno 2016 traccia A

1. Una primitiva della funzione assegnata è data dal seguente integrale:

Calcoliamo $\int \frac{x-2}{(x^2-16)(x^2+1)}dx$ per questo, essendo $x^2-16=(x+4)(x-4)$, poniamo

$$\frac{x-2}{(x^2-16)(x^2+1)}=\frac{A}{x+4}+\frac{B}{x-4}+\frac{Cx+D}{x^2+1}=$$
$$=\frac{(A+B+C)x^3+(-4A+4B+D)x^2+(A+B-16C)x-4A+4B-16D}{(x^2-16)(x^2+1)}$$

e quindi si ha: $x-2=(A+B+C)x^3+(-4A+4B+D)x^2+$
$+(A+B-16C)x-4A+4B-16D \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ -4A+4B+D=0 \\ A+B-16C=1 \\ -4A+4B-16D=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=-C \\ -4A+4B=-D \\ -17C=1 \\ -17D=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1/17 \\ -4A+4B=-2/17 \\ C=-1/17 \\ D=2/17 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow A=\frac{3}{68}, B=\frac{1}{68}, C=-\frac{1}{17}$ e $D=\frac{2}{17}$ e quindi è: $\frac{x-2}{(x^2-16)(x^2+1)}=\frac{3}{68}\frac{1}{x+4}+\frac{1}{68}\frac{1}{x-4}-\frac{1}{17}\frac{x-2}{x^2+1}$ e pertanto risulta:
$\int \frac{x-2}{(x^2-16)(x^2+1)}dx=\frac{3}{68}\int\frac{dx}{x+4}+\frac{1}{68}\int\frac{dx}{x-4}-\frac{1}{17}\int\frac{x-2}{x^2+1}dx=\frac{3}{68}\log|x+4|+\frac{1}{68}\log|x-4|-$
$-\frac{1}{34}\log(x^2+1)+\frac{2}{17}arctgx$ quindi è:

$$F: x\in[-1,3]\to\frac{1}{68}\log\frac{(x+4)^3(4-x)}{(x^2+1)^2}+\frac{2}{17}arctgx+c.$$

c essendo un numero reale tale che risulti: $F(0)=-2\Leftrightarrow\frac{1}{68}\log 4^4+\frac{2}{17}arctg\,0+c=-2\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\frac{2}{17}\log 2+c=-2\Leftrightarrow c=-2\left(\frac{1}{17}\log 2+1\right)$ e pertanto risulta:

$$F: x\in[-1,3]\to\frac{1}{68}\log\frac{(x+4)^3(4-x)}{(x^2+1)^2}+\frac{2}{17}arctgx-2\left(\frac{1}{17}\log 2+1\right).$$

2. Dato il seguente limite, $\lim_{x\to+\infty}\left(3^{\frac{2x^2+x-1}{2x^2+x+1}}-3+arcsen\frac{1}{x^2}\right)\frac{x^4+1}{x^2}$ essendo $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x-1}{2x^2+x+1}=1$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3^{\frac{2x^2+x-1}{2x^2+x+1}}-3+arcsen\frac{1}{x^2}\right)\frac{x^4+1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(3\frac{3^{\frac{2x^2+x-1}{2x^2+x+1}-1}-1}{\frac{2x^2+x-1}{2x^2+x+1}-1}\cdot\frac{-2}{2x^2+x+1}+\frac{arcsen\left(1/x^2\right)}{1/x^2}\frac{1}{x^2}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{x^4+1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(3\frac{3^{\frac{-2}{2x^2+x+1}}-1}{\frac{-2}{2x^2+x+1}}\cdot\frac{-2\left(x^4+1\right)}{x^2\left(2x^2+x+1\right)}+\frac{arcsen\left(1/x^2\right)}{1/x^2}\frac{x^4+1}{x^4}\right)=3\log3(-1)+1=1-3\log3.$$

3. Data la funzione $x\to f(x)=arcsen\frac{x^2-1}{x^2+1}$

L'insieme dei valori della funzione *f* è incluso in $arcsen([-1,1])=[-\pi/2,\pi/2]$, quindi *f* è limitata e pertanto il grafico di *f* può avere solo asintoti orizzontali.

L'insieme di definizione di *f* è: $\left\{x\in R,-1\le\left(x^2-1\right)/\left(x^2+1\right)\le1\right\}$ ed essendo $-1\le\left(x^2-1\right)/\left(x^2+1\right)\le$ $\le1\Leftrightarrow-x^2-1\le x^2-1\le x^2+1\Leftrightarrow-2x^2\le0\le2\Leftrightarrow x\in R$ è:

$$f:x\in R\to arcsen\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

e risultando

$$f(x)>0\Leftrightarrow arcsen\left(\left(x^2-1\right)/\left(x^2+1\right)\right)>0\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)/\left(x^2+1\right)>0\Leftrightarrow x^2-1>0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$$

$$f(x)=0\Leftrightarrow arcsen\left(\left(x^2-1\right)/\left(x^2+1\right)\right)=0\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)/\left(x^2+1\right)=0\Leftrightarrow x^2-1=0\Leftrightarrow x=-1\text{ o }x=1$$

$$f(x)<0\Leftrightarrow x\in R-\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[=\left]-1,1\right[$$

il grafico di *f* si trova al di sopra dell'asse delle *x* in $\left]-\infty,-1\right[$ ed in $\left]1,+\infty\right[$, al di sotto dell'asse delle *x* in $\left]-1,1\right[$, ha in comune con gli assi i punti $(-1,0),(1,0)$ e $(0,arcsen(-1))=(0,-\pi/2)$ e zero è un punto di minimo per *f* ed essendo:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}arcsen\frac{x^2\left(1-1/x^2\right)}{x^2\left(1+1/x^2\right)}=arcsen1=\pi/2,$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}arcsen\frac{x^2\left(1-1/x^2\right)}{x^2\left(1+1/x^2\right)}=arcsen1=\pi/2$$

il grafico di *f* ha un solo asintoto: la retta di equazione $y=\pi/2$ asintoto orizzontale a sinistra e a destra.

Essendo:

$$f'(x)=Darcsen\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\left(x^2-1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2}}}\cdot\frac{2x\left(x^2+1\right)-2x\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1}{\frac{\sqrt{4x^2}}{x^2+1}}\cdot\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{4x}{2|x|\left(x^2+1\right)}=\begin{cases}\dfrac{-2}{x^2+1} & \text{se}\quad x\in\left]-\infty,0\right[\\ \dfrac{2}{x^2+1} & \text{se}\quad x\in\left]0,+\infty\right[\end{cases}$$

e

$$f_s'(0)=\lim_{x\to 0^-}f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-2}{x^2+1}=-2\,,\ \ f_d'(0)=\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{x^2+1}=2$$

f è derivabile in $R-\{0\}$ e non esiste la derivata di *f* in zero, zero è un punto angoloso per *f* ed anche un punto di minimo relativo proprio per *f* ed è:

$$f'(x)>0\Leftrightarrow x\in\left]0,+\infty\right[,\ \ f'(x)=0\Leftrightarrow x\in\varnothing\ \text{ ed }\ f'(x)<0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,0\right[$$

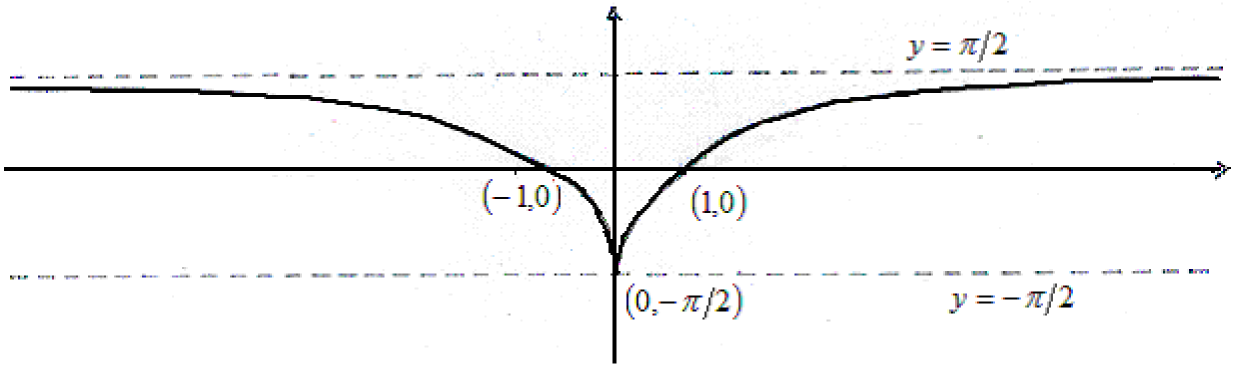
quindi *f* è strettamente crescente in $\left[0,+\infty\right[$ ed è strettamente decrescente in $\left]-\infty,0\right]$.
Risultando infine:

$$f''(x)=\begin{cases}D\dfrac{-2}{x^2+1}=-2D\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{4x}{\left(1+x^2\right)^2} & \text{se}\ \ x\in\left]-\infty,0\right[\\ D\dfrac{2}{x^2+1}=2D\dfrac{1}{x^2+1}=\dfrac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2} & \text{se}\ \ x\in\left]0,+\infty\right[\end{cases}$$

è:

$$f''(x)>0\Leftrightarrow x\in\varnothing\,,\ \ f''(x)=0\Leftrightarrow x\in\varnothing\ \text{ ed }\ f''(x)<0\Leftrightarrow x\in R-\{0\}$$

e pertanto *f* è strettamente concava in $\left]-\infty,0\right[$ ed in $\left]0,+\infty\right[$.
Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:



e quindi dedurre che:

$f(R)=f\left(\left]-\infty,0\right]\right)=f\left(\left[0,+\infty\right[\right)=\left[-\pi/2,\pi/2\right[$, *f* non è biunivoca, le restrizioni di *f* a $\left]-\infty,0\right]$ ed a $\left[0,+\infty\right[$ sono entrambe biunivoche su $\left[-\pi/2,\pi/2\right[$ e $\sup\limits_{x\in R} arcsen\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=\sup\limits_{x\in R}\left[-\pi/2,\pi/2\right[=\pi/2$.

OSSERVAZIONE. È facile rendersi conto che *f* è una funzione pari e pertanto avremmo potuto limitarci a tracciare il grafico *G* della restrizione di *f* a $\left[0,+\infty\right[$ e quindi ottenere il grafico di *f* unendo a *G* la curva G' simmetrica di *G* rispetto all'asse delle *y*.

4. Tale funzione:

$$j : x \in [0,1] \to \begin{cases} 1-h & \text{se } x = 0 \\ e^x \dfrac{arcsen \log(x+1)}{x} + h(x^2-1) & \text{se } x \in]0,1] \end{cases}$$

j è continua in $]0,1]$ ed essendo $j(0) = 1-h$ e $\lim_{x \to 0} j(x) = \lim_{x \to 0}\left(e^x \dfrac{arcsen \log(x+1)}{x} + h(x^2-1)\right) =$ $= \lim_{x \to 0} \dfrac{arcsen \log(x+1)}{\log(x+1)} \dfrac{\log(x+1)}{x} - h = 1-h$ j è continua in $[0,1]$ e risultando:

$$j'(x) = D\left(e^x \dfrac{arcsen \log(x+1)}{x} + h(x^2-1)\right) =$$

$$= e^x \left(\frac{1}{x} arcsen \log(x+1) - \frac{1}{x^2} arcsen \log(x+1) + \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{1-\log^2(1+x)}} \frac{1}{1+x} \right) + 2hx$$ j è derivabile in $]0,1]$, essendo in fine $j(0) = j(1) \Leftrightarrow 1-h = e\, arcsen \log 2 \Leftrightarrow h = 1 - e\, arcsen \log 2$ la funzione j soddisfa alle ipotesi del teorema di ROLLE solo se è: $h = 1 - e\, arcsen \log 2$.

5. La funzione $g : x \in R \to |x^2 - x|$ è composta da funzioni continue, quindi continua nell'insieme di definizione ed essendo l'intervallo $[-1,2]$ chiuso e limitato, per il Teorema di Weierstrass la funzione è dotata di minimo e di massimo assoluto. Per il Teorema dei punti critici $\max_{x \in [-1,2]} g(x) = \max_{x \in F} g(x)$, con $F = \{E \cup S \cup C\}$, pertanto è sufficiente trovare eventuali punti stazionari e punti in cui non è derivabile.

Per il teorema dei Punti Critici, sia $g : [a,b] \to R$, sia g continua in $[a,b]$, sia $F = \{a,b\}$, $S = \{x \in]a,b[/ \nexists g'(x)\}$, $C = \{x \in]a,b[/ g'(x) = 0\}$ e sia $X = F \cup S \cup C$, allora $\max_{x \in [a,b]} g(x) = \max_{x \in X} g(x)$, pertanto per la funzione $g(x) = |x^2 - x|$, $F = \{-1,2\}$, i punti in cui $\nexists g'(x) \Leftrightarrow D|0|$, pertanto $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$, per cui $S = \{0,1\}$ ed infine essendo $g'(x) = \begin{cases} \begin{cases} 2x-1=0 \\ x > 1/2 \end{cases} \\ \begin{cases} 1-2x=0 \\ x < 1/2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1/2$, quindi $C = \{1/2\}$. Pertanto $X = \{-1,0,1/2,1,2\}$ e notando che $g(-1) = 2$, $g(0) = 0$, $g(1/2) = 1/4$, $g(1) = 0$, e $g(2) = 2$, si ha che $\max_{x \in [-1,2]} |x^2 - x| = 2$, con punti di massimo $\{-1,2\}$.

Svolgimento prova scritta del 30 giugno 2016 traccia B

1. Una primitiva della funzione assegnata è data dal seguente integrale:

$\int \frac{x-1}{(x^2-9)(x^2-1)}dx$, per questo, essendo $x^2-9=(x+3)(x-3)$, poniamo

$$\frac{x-1}{(x^2-9)(x^2-1)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-1}=$$

$$=\frac{(A+B+C+D)x^3+(-3A+3B-C+D)x^2+(-A-B-9C-9D)x+3A-3B+9C-9D}{(x^2-9)(x^2-1)}$$

e quindi si ha: $x-1=(A+B+C+D)x^3+(-3A+3B-C+D)x^2+$

$$+(-A-B-9C-9D)x+3A-3B+9C-9D \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C+D=0 \\ -3A+3B-C+D=0 \\ -A-B-9C-9D=1 \\ 3A-3B+9C-9D=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C=-D \\ -3A+3B+D=C \\ 8A+8B=1 \\ -24A+24B=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow A=\frac{1}{12}, B=\frac{1}{24}, C=-\frac{1}{8}$ e $D=0$ e quindi è: $\frac{x-1}{(x^2-9)(x^2-1)}=\frac{1}{12}\frac{1}{x+3}+\frac{1}{24}\frac{1}{x-3}-\frac{1}{8}\frac{1}{x+1}$ e pertanto risulta:

$$\int \frac{x-1}{(x^2-9)(x^2-1)}dx=\frac{1}{12}\int\frac{dx}{x+3}+\frac{1}{24}\int\frac{dx}{x-3}-\frac{1}{8}\int\frac{x-1}{x^2-1}dx=\frac{1}{12}\log|x+3|+\frac{1}{24}\log|x-3|-\frac{1}{8}\log|x+1|$$

quindi è:

$$F: x\in[-3,-2]\to\frac{1}{24}\log\frac{(x+3)^2(3-x)}{(-x-1)^3}+c\,.$$

c essendo un numero reale tale che risulti: $F(-2)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{24}\log 5+c=0 \Leftrightarrow c=-\frac{1}{24}\log 5$ e pertanto risulta:

$$F: x\in[-3,-2]\to\frac{1}{24}\log\frac{(x+3)^2(3-x)}{(-x-1)^3}-\frac{1}{24}\log 5\,.$$

2. Dato il seguente limite, $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2}^{\frac{3x^3+2x-1}{3x^3-2x+1}}-\sqrt{2}-arsen\frac{1}{x}\right)\frac{x^3-1}{x^2}$ essendo $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3+2x-1}{3x^3-2x+1}=1$ si ha

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2}^{\frac{3x^3+2x-1}{3x^3-2x+1}}-\sqrt{2}-arsen\frac{1}{x}\right)\frac{x^3-1}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}^{\frac{3x^3+2x-1}{3x^3-2x+1}-1}-1}{\frac{3x^3+2x-1}{3x^3-2x+1}-1}\frac{4x-1(x^3-1)}{x^2(3x^3-2x+1)}\right)-$$

$$-\lim_{x\to-\infty}\frac{arcsen(1/x)}{1/x}\frac{x^3-1}{x^2}\frac{1}{x}=\sqrt{2}\log\sqrt{2}(0)-1=-1\,.$$

3. Data la funzione $x \to f(x) = \arccos \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

L'insieme dei valori della funzione *f* è incluso in $\arccos([-1,1]) = [0,\pi]$, quindi *f* è limitata e pertanto il grafico di *f* può avere solo asintoti orizzontali.

L'insieme di definizione di *f* è: $\{x \in R, -1 \le (x^2-1)/(x^2+1) \le 1\}$ ed essendo $-1 \le (x^2-1)/(x^2+1) \le$ $\le 1 \Leftrightarrow -x^2-1 \le x^2-1 \le x^2+1 \Leftrightarrow -2x^2 \le 0 \le 2 \Leftrightarrow x \in R$ è:

$$f : x \in R \to \arccos \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

e risultando

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in R$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$

il grafico di *f* si trova al di sopra dell'asse delle *x* e $(0, \arccos(-1)) = (0,\pi)$ e zero è un punto di massimo per *f* ed essendo:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \arccos \dfrac{x^2(1-1/x^2)}{x^2(1+1/x^2)} = \arccos 1 = 0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \arccos \dfrac{x^2(1-1/x^2)}{x^2(1+1/x^2)} = \arccos 1 = 0$

il grafico di *f* ha un solo asintoto: la retta di equazione $y = 0$ asintoto orizzontale a sinistra e a destra.

Essendo:

$$f'(x) = D\arccos \frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{-1}{\sqrt{1-\dfrac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}}} \cdot \frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-1}{\dfrac{\sqrt{4x^2}}{x^2+1}} \cdot \frac{4x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{-4x}{2|x|(x^2+1)} = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2+1} & \text{se} \quad x \in \left]-\infty,0\right[\\[2ex] \dfrac{-2}{x^2+1} & \text{se} \quad x \in \left]0,+\infty\right[\end{cases}$$

e

$f_s'(0) = \lim\limits_{x\to0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{2}{x^2+1} = 2$, $f_d'(0) = \lim\limits_{x\to0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{-2}{x^2+1} = -2$

f è derivabile in $R - \{0\}$ e non esiste la derivata di *f* in zero, zero è un punto angoloso per *f* ed anche un punto di massimo relativo proprio per *f* ed è:

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,0\right[$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$ ed $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]0.+\infty\right[$

quindi *f* è strettamente crescente in $\left]-\infty,0\right]$ ed è strettamente decrescente in $\left[0,+\infty\right[$.

Risultando infine:

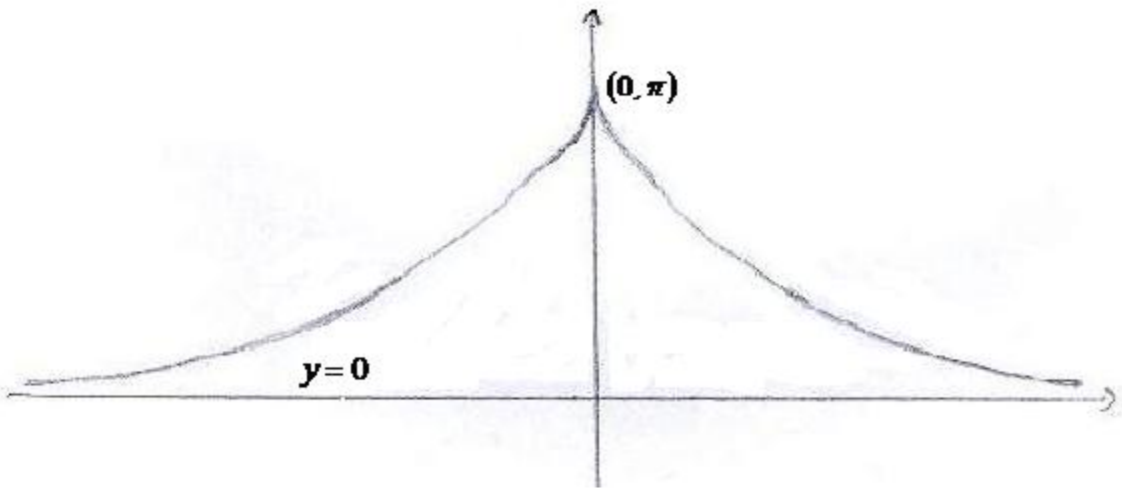
$$f''(x)=\begin{cases} D\dfrac{2}{x^2+1}=2D\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2} & \text{se } x\in\left]-\infty,0\right[\\ D\dfrac{-2}{x^2+1}=-2D\dfrac{1}{x^2+1}=\dfrac{4x}{\left(1+x^2\right)^2} & \text{se } x\in\left]0,+\infty\right[\end{cases}$$

è:

$f''(x)>0 \Leftrightarrow x\in R-\{0\}$, $f''(x)=0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$ ed $f''(x)<0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$

e pertanto *f* è strettamente convessa in $\left]-\infty,0\right[$ ed in $\left]0,+\infty\right[$.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:



e quindi dedurre che:

$f(R)=f\left(\left]-\infty,0\right]\right)=f\left(\left[0,+\infty\right[\right)=\left]0,\pi\right]$, *f* non è biunivoca, le restrizioni di *f* a $\left]-\infty,0\right]$ ed a $\left[0,+\infty\right[$ sono entrambe biunivoche su $\left]0,\pi\right]$ e $\inf\limits_{x\in R}\arccos\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=\inf\limits_{x\in R}\left]0,\pi\right]=0$.

OSSERVAZIONE. È facile rendersi conto che *f* è una funzione pari e pertanto avremmo potuto limitarci a tracciare il grafico *G* della restrizione di *f* a $\left[0,+\infty\right[$ e quindi ottenere il grafico di *f* unendo a *G* la curva G' simmetrica di *G* rispetto all'asse delle *y*.

4. Tale funzione:

$$j: x\in[0,1]\to\begin{cases} 1+h & \text{se } x=0 \\ e^x\dfrac{arctg\left(3^{2x}-1\right)}{2x}\log_3 e-h\left(x^3-1\right) & \text{se } x\in\left]0,1\right] \end{cases}$$

j è continua in $\left]0,1\right]$ ed essendo $j(0)=1+h$ e $\lim\limits_{x\to0} j(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(e^x\dfrac{arctg\left(3^{2x}-1\right)}{2x}\log_3 e-h\left(x^3-1\right)\right)=$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(e^x\dfrac{arctg\left(3^{2x}-1\right)}{\left(3^{2x}-1\right)}\dfrac{\left(3^{2x}-1\right)}{2x}\log_3 e-h\left(x^3-1\right)\right)=1+h$ *j* è continua in $[0,1]$ e risultando:

$$j'(x)=D\left(e^x\dfrac{arctg\left(3^{2x}-1\right)}{2x}\log_3 e-h\left(x^3-1\right)\right)$$

$$= e^x \log_3 e\left(\frac{1}{2x} arctg\left(3^{2x}-1\right) - \frac{1}{2x^2} arctg\left(3^{2x}-1\right) + \frac{1}{x}\frac{3^{2x}\log 3}{1+\left(3^{2x}-1\right)^2}\right) - 3hx^2$$ j è derivabile in $]0,1]$, essendo in fine $j(0) = j(1) \Leftrightarrow 1 + h = e\dfrac{arctg 8}{2}\log_3 e \Leftrightarrow h = e\dfrac{arctg 8}{2}\log_3 e - 1$ la funzione j soddisfa alle ipotesi del teorema di ROLLE solo se è: $h = e\dfrac{arctg 8}{2}\log_3 e - 1$.

5. La funzione $g : x \in R \to \left|x^2 - 2x\right|$ è composta da funzioni continue, quindi continua nell'insieme di definizione ed essendo l'intervallo $[-1,1]$ chiuso e limitato, per il Teorema di Weierstrass la funzione è dotata di minimo e di massimo assoluto. Per il Teorema dei punti critici $\min\limits_{x\in[-1,2]} g(x) = \min\limits_{x\in F} g(x)$, con $F = \{E \cup S \cup C\}$, pertanto è sufficiente trovare eventuali punti stazionari e punti in cui non è derivabile.

Per il teorema dei Punti Critici, sia $g : [a,b] \to R$, sia g continua in $[a,b]$, sia $F = \{a,b\}$, $S = \{x \in]a,b[/ \nexists g'(x)\}$, $C = \{x \in]a,b[/ g'(x) = 0\}$ e sia $X = F \cup S \cup C$, allora $\min\limits_{x\in[a,b]} g(x) = \min\limits_{x\in X} g(x)$, pertanto per la funzione $g(x) = \left|x^2 - 2x\right|$, $F = \{-1,1\}$, punti in cui $\nexists g'(x) \Leftrightarrow D|0|$, pertanto $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0$, per cui $S = \{0,2\}$ ed infine essendo $g'(x) = \begin{cases} \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing \\ \begin{cases} 2 - 2x = 0 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \end{cases}$, quindi $C = \{1\}$. Pertanto $X = \{-1,0,1\}$ e notando che $g(-1) = 3$, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, si ha che $\min\limits_{x\in[-1,1]}\left|x^2 - 2x\right| = 0$, con punto di minimo $\{0\}$.