Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
27 giugno 2018
(prof. M. Bisceglia)

Traccia A

1. Data la seguente funzione: $f :]0,3] \to \begin{cases} \log x & \text{se } x \in]0,1] \\ x-1 & \text{se } x \in]1,3] \end{cases}$, dire se è *dotata di minimo*; dire se è *invertibile*, e se lo è, *riportare la sua inversa*, e dire se è *limitata*.

2. Data la funzione $h(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$, dire se è *regolare* in $x_0 = +\infty$; nel caso lo sia, se risulta *convergente* o *divergente*, *verificandone* la sua correttezza.

3. Studiare la funzione $f : X \to f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1} \in R$, e tracciarne approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione $g(x) = \begin{cases} e^{\log(x-1)} & \forall x > 1 \\ \arccos x & \forall x \le 1 \end{cases}$, verificare se *soddisfa le ipotesi* dei Teoremi di Weierstrass e di Bolzano.

5. Data la funzione $p(x) = \dfrac{2x+1}{3x^2 - x}$, *calcolare l'area* del rettangoloide della funzione nell'intervallo $[1,2]$.

6. Data la funzione profitto, $f(x,y) = 2x^3 - 3xy + 2y^2$, determinare gli eventuali *punti estremanti* e verificare la loro *natura*.

Svolgimento traccia A

1. Si osserva dall'immagine $f(]0,3]) =]-\infty,2]$ come la funzione *non è dotata di minimo*; inoltre essendo composta da due funzioni invertibili, la funzione *f è invertibile*; e risulta $f^{-1} :]-\infty,2] \to \begin{cases} e^y & \text{se } y \in]-\infty,0] \\ y+1 & \text{se } x \in]0,2] \end{cases}$; infine la sua inversa *è limitata* in quanto limitato è il dominio della funzione *f*.

2. Data la seguente funzione $h(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$ essendo il suo dominio non limitato superiormente, tanto è vero che $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$, la funzione è *regolare* in $x_0 = +\infty$; e risulta $\lim_{x \to +\infty} \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) = -\infty$, quindi a funzione è *divergente negativamente*; infine per la definizione di limite, equivalentemente $\forall I_{-\infty}, \exists I_{+\infty} / se\, x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[\cap I_{+\infty} \Rightarrow h(x) \in I_{-\infty}$. Pertanto $\forall \varepsilon > 0$, deve $\exists \delta$ per cui $h(x) < -\varepsilon$, ovvero

$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)<-\varepsilon \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(2x-1)<\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-\varepsilon}$, ovvero $2x-1>2^{\varepsilon} \Leftrightarrow x>\frac{2^{\varepsilon}+1}{2}$ pertanto ponendo $\delta=\frac{2^{\varepsilon}+1}{2}$ si è quindi individuato un intorno di $+\infty$, pertanto il limite è corretto

3. *Data la seguente funzione*: $f : X \rightarrow f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x-1} \in R$.

I. *Dominio*:

Essendo una funzione razionale, il numeratore è definito $x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2,+\infty[$,

il denominatore $\forall x \in R-\{1\}$,

pertanto $X=[-2,+\infty[\cap(R-\{1\})=[-2,1[\cup]1,+\infty[$

Quindi tale funzione è definita $\forall x \in [-2,1[\cup]1,+\infty[$, ovvero

$$f : [-2,1[\cup]1,+\infty[\rightarrow f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x-1} \in R$$

II. *Segno della funzione:*

Essendo il numeratore sempre positivo, vedere dove $f(x)>0 \Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1$

Pertanto $f(x)>0 \Leftrightarrow x \in]1,+\infty[\cap X=]1,+\infty[$

Conseguentemente $f(x)<0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,1[\cap X=]-2,1[$

Si osserva che $f(-2)=0$, quindi tocca il punto $(-2,0)$. Mentre $f(0)=-\sqrt{2}$ pertanto passa per il punto $(0,-\sqrt{2})$.

III. *Limiti significativi*:

Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare il limite nel punto di accumulazione che non appartiene al dominio e nell'estremo superiore.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x)=\lim_{x \to 1^-}\sqrt{x+2}\lim_{x \to 1^-}\frac{1}{x-1}=\sqrt{3}(-\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x)=\lim_{x \to 1^+}\sqrt{x+2}\lim_{x \to 1^+}\frac{1}{x-1}=\sqrt{3}(+\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+2}}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = 0$$

Pertanto la retta $x=1$ è un asintoto verticale a destra ed a sinistra, mentre le retta $y=0$ è un asintoto orizzontale a destra.

IV. *Derivata prima e monotonia:*

$$f'(x) = \frac{\frac{x-1}{2\sqrt{x+2}} - \sqrt{x+2}}{(x-1)^2} = \frac{x-1-2(x+2)}{(x-1)^2 2\sqrt{x+2}} = \frac{-x-5}{(x-1)^2 2\sqrt{x+2}} = -\frac{x+5}{(x-1)^2 2\sqrt{x+2}}$$., quindi

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{x+5}{(x-1)^2 2\sqrt{x+2}} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+5}{(x-1)^2 2\sqrt{x+2}} < 0$, pertanto essendo il denominatore sempre positivo nell'insieme di definizione della funzione, è sufficiente studiare $x+5<0 \Leftrightarrow x<-5 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-5[\cap X = \varnothing$, conseguentemente la funzione è strettamente decrescente nel suo dominio.

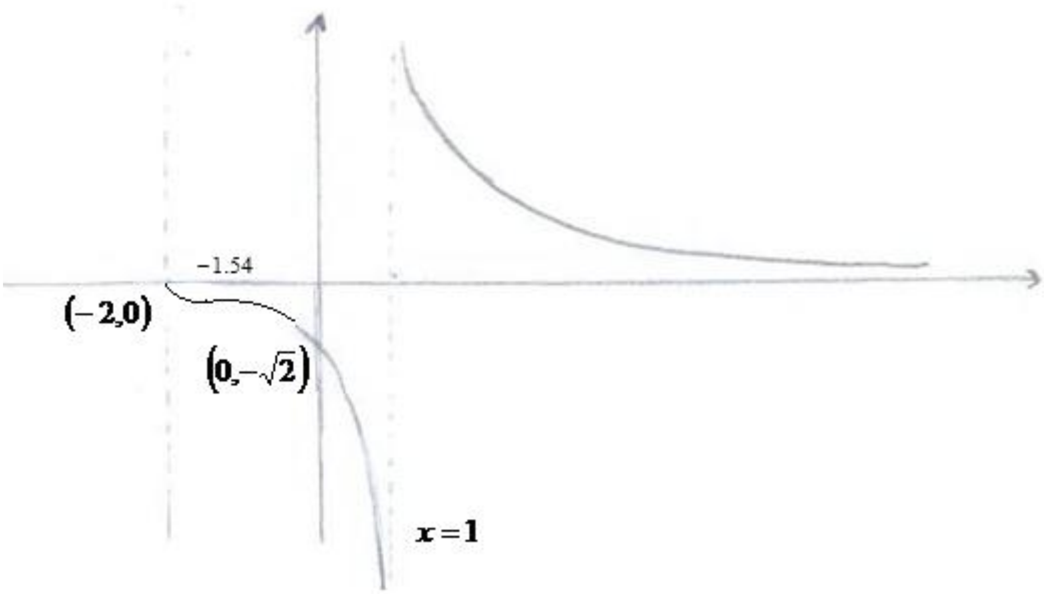
V. *Derivata seconda e concavità:*

$$f''(x) = -\frac{(x-1)^2 2\sqrt{x+2} - (x+5)\left[2(x-1)2\sqrt{x+2} + \frac{2(x-1)^2}{2\sqrt{x+2}}\right]}{\left((x-1)^2 2\sqrt{x+2}\right)^2} = .$$

$$= -\frac{(x-1)^2 2(x+2) - (x+5)2(x-1)2(x+2) - (x+5)(x-1)^2}{\left((x-1)^2 2\sqrt{x+2}\right)^2 \sqrt{x+2}} =$$

$= \frac{3x^2+30x+39}{\left((x-1)^2 2\sqrt{x+2}\right)^2 \sqrt{x+2}}(x-1)$, pertanto essendo il denominatore sempre positivo nell'insieme di definizione della funzione, per studiare $f''(x)>0$ è sufficiente studiare $(3x^2+30x+39)(x-1)>0$, per cui essendo il delta del polinomio di secondo grado positivo, abbiamo $x_{1,2} = \frac{-30\pm\sqrt{432}}{6} = \begin{cases}-1.54\\-8.46\end{cases}$ pertanto $f''(x)<0 \Leftrightarrow x \in]-8.46,-1.54[$, ed essendo $f''(x)>0 \Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1 \Leftrightarrow x \in]1,+\infty[$, pertanto intersecando i due intervalli con il dominio della funzione, ed osservando che
$\nexists f''_d(-2)$ e per una conseguenza del Teorema di Lagrange, possiamo affermare $f''_d(-2) = \lim_{x\to-2^+} f''(x) = \lim_{x\to-2^+} \frac{3x^2+30x+39}{\left((x-1)^2 2\sqrt{x+2}\right)^2\sqrt{x+2}}(x-1) = +\infty$, pertanto si ha:

$f''(x)>0 \Leftrightarrow x \in [-2,-1.54[\cup]1,+\infty[$ quindi strettamente convessa, e risulta
$f''(x)<0 \Leftrightarrow x \in]-1.54,1[$ quindi strettamente concava, con un punto di flesso proprio in $(-1.54, f(-1.54))$.



e quindi dedurre che:

$f([-2,1[\cup]1,+\infty[) =]-\infty,0]\cup]0,+\infty[$, $f([-2,1[) =]-\infty,0]$, $f(]1,+\infty[) =]0,+\infty[$, f è biunivoca, su $]-\infty,0]\cup]0,+\infty[$.

4. Essendo $g(x)=\begin{cases} e^{\log(x-1)} & \forall x>1 \\ \arccos x & \forall x\le 1 \end{cases}$, si osserva che $g(1)=\arccos 1=0$, il $\lim_{x\to1^-} g(x)=\lim_{x\to1^-}\arccos x=0$ ed il $\lim_{x\to1^+} g(x)=\lim_{x\to1^+} e^{\log(x-1)}=0$, quindi continua nel suo insieme di definizione $\forall x\in[-1,+\infty[$, pertanto trattandosi di un intervallo, la funzione *soddisfa le ipotesi* del Teorema Bolzano, *ma non quelle* del teorema di Weierstrass, in quanto il dominio non è limitato.

5. Data la funzione $p(x)=\frac{2x+1}{3x^2-x}$, si ha: $\int\frac{2x+1}{3x^2-x}dx$, e quindi se si osserva che $D(3x^2-x)=6x-1$, possiamo scrivere la funzione razionale $\frac{2x+1}{3x^2-x}=\frac{2x}{3x^2-x}+\frac{1}{3x^2-x}=\frac{1}{3}\frac{6x-1+1}{3x^2-x}+\frac{1}{3x^2-x}=\frac{1}{3}\frac{6x-1}{3x^2-x}+\frac{1}{3}\frac{1}{3x^2-x}+\frac{1}{3x^2-x}$, si ha $\int\frac{2x+1}{3x^2-x}dx=\int\left(\frac{1}{3}\frac{6x-1}{3x^2-x}+\frac{4}{3}\frac{1}{3x^2-x}\right)dx=\frac{1}{3}\int\frac{6x-1}{3x^2-x}dx+\frac{4}{3}\int\frac{1}{3x^2-x}dx$; ovvero $\frac{1}{3}\log|3x^2-x|+\frac{4}{3}\int\frac{1}{3x^2-x}dx$ e per quest'ultimo integrale, essendo in delta positivo si ha

$\frac{1}{3x^2-x}=\frac{1}{3x\left(x-\frac{1}{3}\right)}=\frac{A}{3x}+\frac{B}{x-\frac{1}{3}}=\frac{A\left(x-\frac{1}{3}\right)+B3x}{3x\left(x-\frac{1}{3}\right)}$ di cui al numeratore $Ax+B3x-\frac{A}{3}$ e

per l'identità dei polinomi, si ha $\begin{cases} A+B3=0 \\ -\frac{A}{3}=1 \end{cases}=\begin{cases} B=1 \\ A=-3 \end{cases}$ per cui

$\int \frac{1}{3x^2 - x}dx = -\int \frac{3}{3x}dx + \int \frac{1}{x-\frac{1}{3}}dx = -\log|3x| + \log\left|x - \frac{1}{3}\right|$ conseguentemente una primitiva risulta : $P(x) = \frac{1}{3}\log|3x^2 - x| - \frac{4}{3}\log|3x| + \frac{4}{3}\log\left|x - \frac{1}{3}\right| + c$; per cui l'area cercata sarà $\left[\frac{1}{3}\log|3x^2 - x| - \frac{4}{3}\log|3x| + \frac{4}{3}\log\left|x - \frac{1}{3}\right|\right]_1^2 = \frac{1}{3}\left(\log 5 + 4\log\frac{5}{4}\right)$.

6. Data la $f(x,y) = 2x^3 - 3xy + 2y^2$ il suo gradiente $\nabla f(x,y) = [f_x(x,y), f_y(x,y)] = [6x^2 - 3y, -3x + 4y]$. gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} 6x^2 - 3y = 0 \\ -3x + 4y = 0 \end{cases} = \begin{cases} 6x^2 - 3\frac{3x}{4} = 0 \\ y = \frac{3x}{4} \end{cases} = \begin{cases} x\left(6x - \frac{9}{4}\right) = 0 \\ y = \frac{3x}{4} \end{cases}$, e quindi i due punti stazionari sono $(0,0)$ e $\left(\frac{9}{24}, \frac{9}{32}\right)$. per poterli classificare dobbiamo calcolare il determinante Hessiano, per cui $f_{xx}(x,y) = 12x$, $f_{yy}(x,y) = 4$, $f_{xy}(x,y) = -3$ e $f_{yx}(x,y) = -3$, per cui $H_f(x,y) = \begin{vmatrix} 12x & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 48x - 9$, controlliamo quindi la natura del punto $(0,0)$, $H_f(0,0) = -9 < 0$ abbiamo un punto di sella, mentre per il punto $\left(\frac{9}{24}, \frac{9}{32}\right)$, $H_f\left(\frac{9}{24}, \frac{9}{32}\right) = 9 > 0$ ed $f_{xx}\left(\frac{9}{24}, \frac{9}{32}\right) = \frac{9}{2} > 0$, per cui il punto stazionario $\left(\frac{9}{24}, \frac{9}{32}\right)$ è un punto di minimo ed il suo valore è $f\left(\frac{9}{24}, \frac{9}{32}\right) = -0.05273$.