Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
26 giugno 2019
(prof. Bisceglia)

Traccia A

1. Trovare, *se possibile* un punto di *approssimazione* con un errore $\varepsilon \leq 9^{-1}$ dell'equazione $x^3 + e^{2x} + 1 = 0$, nell'intervallo $[0,1]$.

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{arcsen(2^x - 1) + senx}{\log_2(1-x)}$, dire se regolare in $x_0 = 0$ e verificare la sua eventuale convergenza.

3. *Studiare* la funzione $x \to f(x) = arcsen(2^x - 1)$, e *tracciarne approssimativamente* il grafico.

4. Data la seguente funzione: $g : x \in [0,3] \to \begin{cases} 2x+1 & x \in [0,1] \\ 2^x + 3x - 2 & x \in]1,3] \end{cases}$, dire se soddisfa *le ipotesi* dei teoremi di Bolzano e/o di Weierstrass.

5. Data la funzione $p(x) = \dfrac{2x+1}{x^2 + 2x + 1}$, *calcolare la primitiva P* tale che $P(0) = 1$ e *scrivere l'equazione della tangente* sulla primitiva *P*, nel punto 0.

6. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, determinare la sua *caratteristica* al variare di *h*, e la *matrice* A^{-1}.

Svolgimento traccia A

1. Data la funzione $x^3 + e^{2x} + 1 = 0$, funzione continua, definita in un intervallo chiuso e limitato, ed osservando che $f(0) = 2$, ed $f(1) = 2 + e^2 > 0$, pertanto $f(0) \cdot f(1) > 0$, quindi non ricorrono tutte le ipotesi del teorema degli zeri, e conseguentemente $\nexists x_0 \in]0,1[\, / \, f(x_0) = 0$.
.

2. La funzione $f(x) = \dfrac{arcsen(2^x - 1) + senx}{\log_2(1-x)}$, per essere regolare in $x_0 = 0$, tale punto deve essere di accumulazione per il dominio della funzione, pertanto, per la funzione arcoseno, si ha $(2^x - 1) \in [-1,1] \Leftrightarrow 2^x \in [0,2] \Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,1]$, mentre la funzione seno è definita in R e per la funzione logaritmo si ha $1 - x \in]0,+\infty[\Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,1[$, ed inoltre $\log_2(1-x) \neq 0 \Leftrightarrow 1 - x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$; pertanto il dominio della funzione risulta $\forall x \in (]-\infty,1] \cap R \cap]-\infty,1[- \{0\}) \Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,0[\cup]0,1[$, per cui essendo zero, un punto di accumulazione per il dominio della funzione, questa è regolare nel punto $x_0 = 0$, è risulta $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arcsen(2^x - 1) + senx}{\log_2(1-x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{arcsen(2^x - 1)}{2^x - 1} \cdot \dfrac{(2^x - 1)}{x} x + senx}{\dfrac{\log_2(1-x)}{-x}(-x)} = -\log^2 2$ e quindi la funzione risulta convergente nel punto $x_0 = 0$.

3. *Data la seguente funzione*: $x \to f(x) = arcsen(2^x - 1)$.

I. *Dominio*:

Essendo una funzione arcocoseno, deve essere $-1 \le 2^x - 1 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le 2^x \le 2 \Leftrightarrow x \le 1$, pertanto $X =]-\infty,1]$ Quindi tale funzione è definita $\forall x \in]-\infty,1]$, ovvero

$$f :]-\infty,1] \to f(x) = arcsen(2^x - 1) \in R$$

II. *Segno*:

Deve essere $f(x) > 0 \Leftrightarrow arcsen(2^x - 1) > 0 = arcsen(sen0) \Leftrightarrow 2^x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

Pertanto $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0,+\infty[\cap X =]0,1]$

Conseguentemente $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in -]0,+\infty[\cap X \Leftrightarrow x \in]-\infty,0[$

Si osserva che $f(0) = arcsen(2^0 - 1) = 0$, quindi passa per il punto $(0,0)$, mentre $f(1) = arcsen(1) = \frac{\pi}{2}$, quindi la funzione tocca il punto $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

III. *Asintoti*:

Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare solo il limite nell'estremo inferiore.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} arcsen(2^x - 1) = -\frac{\pi}{2}$, in quanto trattandosi di funzione composta, si ha $\lim_{x \to -\infty} (2^x - 1) = -1$ quindi $\lim_{y \to -1} arcseny = -\frac{\pi}{2}$

Pertanto la retta $y = -\frac{\pi}{2}$ è un asintoto orizzontale a sinistra.

IV. *Monotonia*:

$f'(x) = arcsen(2^x - 1) = \frac{2^x \log_e 2}{\sqrt{1 - (2^x - 1)^2}}$., quindi $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2^x \log_e 2}{\sqrt{1 - (2^x - 1)^2}} > 0$, ed osservando che sia numeratore che il denominatore sono strettamente positivi, tranne nel punto 1, in cui la funzione derivata non è definita e si osserva che $\lim_{x \to 1^-} \frac{2^x \log_e 2}{\sqrt{1 - (2^x - 1)^2}} = 2 \log_e 2(+\infty) = +\infty$, pertanto $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,1[\cup \{1\}$ conseguentemente $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$ quindi la funzione è strettamente crescente nel suo insieme di definizione.

V. *Convessità*:

Risultando infine: $f''(x) = \log_e 2 \frac{2^x \log_e 2\left(1 - (2^x - 1)^2\right) + 2^x (2^x - 1) 2^x \log 2}{\sqrt{1 - (2^x - 1)^2} \left(\sqrt{1 - (2x - 1)^2}\right)^2}$, ovvero

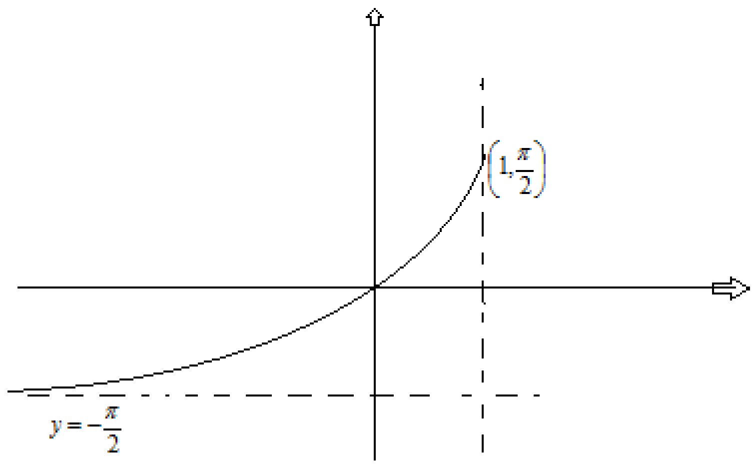
$f''(x) = 2^x (\log_e 2)^2 \frac{2^x}{\sqrt{1 - (2^x - 1)^2} \left(\sqrt{1 - (2^x - 1)^2}\right)^2}$ che come si può osservare risulta $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,1[$ ed osservando che

$$\lim_{x\to 1^-} 2^{2x}(\log_e 2)^2 \frac{1}{\sqrt{1-(2^x-1)^2}\left(\sqrt{1-(2^x-1)^2}\right)^2} = 4\log_e 2(+\infty) = +\infty$$, conseguentemente

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$ quindi la funzione è strettamente convessa nel suo insieme di definizione.

VI. *Punti di flesso*: conseguentemente non ha punti di flesso.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:



e quindi dedurre che:

$f(]-\infty,1]) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, la funzione è biunivoca su $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Essendo $g : x \in [0,3] \to \begin{cases} 2x+1 & x \in [0,1] \\ 2^x + 3x - 2 & x \in]1,3] \end{cases}$, è continua in $[0,3] - \{1\}$ e risultando $g(1) = 3$, $\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-}(2x+1) = 3$ e $\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+}(2^x + 3x - 2) = 3$ la funzione g è continua ed è definita in un intervallo di R quindi g soddisfa le ipotesi del teorema di BOLZANO ed essendo $[0,3]$ una parte chiusa e limitata di R, g soddisfa pure le ipotesi del teorema di WEIERSTRASS.

5. Data la funzione $p(x) = \frac{2x+1}{x^2+2x+1}$, l'insieme delle primitive della seguente funzione è dato da: $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+1}dx$, per cui è: $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+1}dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+1}dx - \int \frac{1}{x^2+2x+1}dx = \log|x^2+2x+1| + \frac{1}{x+1}$, pertanto si ha che l'insieme delle primitive dell'integrale assegnato, risulta: $P(x) = \log|x^2+2x+1| + \frac{1}{x+1} + c$ e conseguentemente $P(0) = 1 \Leftrightarrow \log|1| + 1 + c = 1 \Leftrightarrow c = 0$; quindi la primitiva cercata risulta $P(x) = \log|x^2+2x+1| + \frac{1}{x+1}$; conseguentemente la retta tangente sulla primitiva P nel punto zero, essendo $y = P'(0)(x-0) + P(0)$, per cui $P'(0) = p(0) = 1$ e $P(0) = 0 + 1 = 1$, si ha che la retta tangente risulta: $y = x + 1$.

6. Per poter calcolare la caratteristica, troviamo il $\det(A)=\begin{vmatrix}-1 & h\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1$ si ha $\det(A)=-1$, pertanto la $Car(A)=2$; inoltre essendo $A^{-1}=\dfrac{Agg(A)}{\det(A)}=\dfrac{C^T}{\det(A)}$, si osserva che, essendo $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -h & -1\end{pmatrix}$, conseguentemente $C^T=\begin{pmatrix}1 & -h\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, quindi $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.