Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
23 gennaio 2019
(prof. Bisceglia)

Traccia A

1. Data la funzione $h(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}+1 & \text{se } x<0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ senx & \text{se } x>0 \end{cases}$ individuare *eventuali* punti di discontinuità, e *classificarli*.

2. Calcolare, *se possibile*, il seguente limite: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2-3x+1}-2x$.

3. Studiare la funzione $x\to f(x)=\log_2\dfrac{x+2}{x-1}$, e tracciarne approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione $g(x)=\begin{cases} e^{\log(x-1)} & \forall x>1 \\ \arccos x & \forall x\le 1 \end{cases}$, verificare la *se soddisfa le ipotesi* dei Teoremi di *Weierstrass* e di *Bolzano.*

5. Data la funzione $p(x)=sen(x-\pi)$, calcolare il suo valor medio nell'intervallo $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$.

6. Data la $f(x,y)=2x^3-6xy+3y^2$, trovare gli eventuali *punti stazionari interni* e *classificarli*.

Svolgimento traccia A

1. Essendo $h(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}+1 & \text{se } x<0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ senx & \text{se } x>0 \end{cases}$, per cui *f* è continua in $R-\{0\}$; si osserva che $f(0)=0$, il $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}senx=0$ ed il $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}+1=1$; pertanto il punto 0 per la funzione data, è un punto di discontinuità *di prima specie*.

2. Trattandosi del $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2-3x+1}-2x$, si osserva che la funzione $3x^2-3x+1\ge0\Leftrightarrow\forall x\in R$ in quanto $\Delta=9-12<0$, pertanto il dominio *è illimitato*, e risulta: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2-3x+1}-2x=+\infty-\infty$, forma indeterminata, pertanto se osserviamo

$$\frac{\left(\sqrt{3x^2-3x+1}-2x\right)\left(\sqrt{3x^2-3x+1}+2x\right)}{\left(\sqrt{3x^2-3x+1}+2x\right)}=\frac{-x^2-3x+1}{\left(\sqrt{3x^2-3x+1}+2x\right)}=\frac{x^2\left(-1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{|x|\sqrt{3-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+2x}$$ quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(-1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(\sqrt{3-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+2\right)}=-\frac{1}{\sqrt{3}+2}\lim_{x\to+\infty}x=-\infty.$$

3. Data la funzione $f(x)=\log_2\frac{x+2}{x-1}$

Insieme di definizione:

Essendo una funzione logaritmica, deve essere $\frac{x+2}{x-1}>0$, quindi il numeratore è positivo $x\in\left]-2,+\infty\right[$ il denominatore è positivo $x\in\left]1,+\infty\right[$, conseguentemente $\frac{x+2}{x-1}>0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-2\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

pertanto $X=\left]-\infty,-2\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

Quindi tale funzione è definita $\forall x\in\left]-\infty,-2\right[\cup\left]1,+\infty\right[$, ovvero

$$f:\left]-\infty,-2\right[\cup\left]1,+\infty\right[\to f(x)=\log_2\frac{x+2}{x-1}\in R$$

Segno della funzione:

Deve essere $f(x)>0\Leftrightarrow\log_2\frac{x+2}{x-1}>0=\log_2 1\Leftrightarrow\frac{x+2}{x-1}>1\Leftrightarrow\frac{3}{x-1}>0$

Pertanto $f(x)>0\Leftrightarrow x\in\left]1,+\infty\right[\cap X=\left]1,+\infty\right[$

Conseguentemente $f(x)<0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,1\right[\cap X=\left]-\infty,-2\right[$

Limiti significativi:

Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare il limite nei punti di accumulazione che non appartengono al dominio e nell'estremo inferiore e superiore.

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\log_2\frac{x+2}{x-1}=0$, trattandosi di funzione composta, si ha $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{x-1}=1$ e conseguentemente $\lim_{y\to1}\log_2 y=0$

$\lim_{x\to-2^-}f(x)=\lim_{x\to-2^-}\log_2\frac{x+2}{x-1}=-\infty$, in quanto trattasi di funzione composta, per cui $\lim_{x\to-2^-}\frac{x+2}{x-1}=0$ e conseguentemente $\lim_{y\to+\infty}\log_2 y=-\infty$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\log_2\frac{x+2}{x-1}=+\infty$, in quanto trattasi di funzione composta, per cui $\lim_{x\to 1^+}(x+2)\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=3(+\infty)=+\infty$ e conseguentemente $\lim_{y\to +\infty}\log_2 y=+\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\log_2\frac{x+2}{x-1}=0$, trattandosi di funzione composta, si ha $\lim_{x\to +\infty}\frac{x+2}{x-1}=1$ e conseguentemente $\lim_{y\to 1}\log_2 y=0$

Pertanto la retta $y=0$ è un asintoto orizzontale a sinistra e a destra, mentre le rette $x=-2$ ed $x=1$ sono rispettivamente due asintoto verticali a sinistra ed a destra.

Derivata prima e monotonia:

$f'(x)=\log_2\frac{x+2}{x-1}=\log_2 e\frac{x-1}{x+2}\frac{x-1-x-2}{(x-1)^2}=\log_2 e\frac{-3}{(x-1)(x+1)}$, quindi

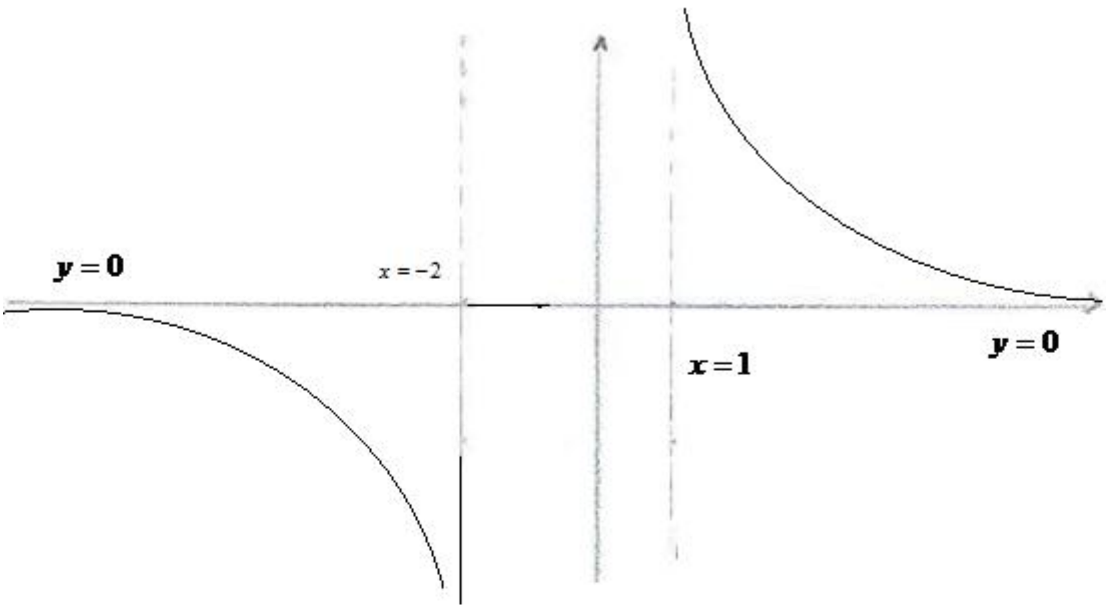
$f'(x)>0\Leftrightarrow \log_2 e\frac{-3}{(x-1)(x+1)}>0$, ed osservando che il logaritmo crescente è positivo, $f'(x)>0\Leftrightarrow x\in\varnothing$ e conseguentemente $f'(x)<0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-2\right[\cup\left]1,+\infty\right[$ quindi la funzione è strettamente decrescente nel suo insieme di definizione.

Derivata seconda e concavità:

$f''(x)=\log_2 e\frac{-3}{(x^2-1)}=-\log_2 e\frac{-6x}{(x^2-1)^2}$, ed osservando che il logaritmo è positivo, risulta

$f''(x)>0\Leftrightarrow \log_2 e\frac{6x}{(x^2-1)^2}>0\Leftrightarrow 6x>0\Leftrightarrow x\in\left]0,+\infty\right[$ conseguentemente

$f''(x)<0\Leftrightarrow 6x<0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,0\right[$ pertanto la funzione è strettamente concava in $\left]-\infty,-2\right[$ ed è strettamente convessa in $\left]1,+\infty\right[$.



e quindi dedurre che:

$f(]-\infty,-2[\cup]1,+\infty[)=R-\{0\}$, $f(]-\infty,-2[)=]-\infty,0[$ ed $f(]1,+\infty[)=]0,+\infty[$, la funzione è biunivoca su $R-\{0\}$.

4. La funzione $g(x)=\begin{cases} e^{\log(x-1)} & \forall x>1 \\ \arccos x & \forall x\le 1 \end{cases}$, è definita $\forall x\in[-1,+\infty[$, in quanto la funzione arcocoseno è definita $\forall x\in[-1,1]$, la funzione esponenziale in tutto *R*, e la funzione log per $x-1>0 \Leftrightarrow \forall x\in]1,+\infty[$, quindi il dominio risulta $\forall x\in[-1,1]\cup]1,+\infty[\Leftrightarrow \forall x\in[-1,+\infty[$; ed osservando che è composta da funzioni elementari, ed inoltre osservando che $f(1)=\arccos 1=0$, il $\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\arccos x=0$ ed il $\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+} e^{\log(x-1)}=0$, quindi continua nel suo dominio, pertanto la funzione *soddisfa le ipotesi del Teorema Bolzano*, ma *non quelle del teorema di Weierstrass*, in quanto il dominio è chiuso, ma non limitato.

5. Data la funzione $p(x)=sen(x-\pi)$, e ricordando che per il teorema della Media dell'integrale definito, $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \Leftrightarrow f(c)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)}$; per cui calcolando $\int sen(x-\pi)dx=-\cos(x-\pi)+c$, e per il teorema Fondamentale del calcolo integrale, si ha: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sen(x-\pi)dx=[-\cos(x-\pi)+c]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-1$; per cui il valor medio della funzione risulta:

$$f(c)=\frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sen(x-\pi)dx}{\pi-\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}$$

6. Data la $f(x,y)=2x^3-6xy+3y^2$ il suo gradiente $\nabla f(x,y)=[f_x(x,y), f_y(x,y)]=[6x^2-6y,6y-6x]$. gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \Leftrightarrow 6x^2-6y=0 \\ f'_y(x,y)=0 \Leftrightarrow 6y-6x=0 \end{cases} = \begin{cases} x^2-y=0 \\ y-x=0 \end{cases} = \begin{cases} x^2-x=0 \\ y=x \end{cases} = \begin{cases} x(x-1)=0 \\ y=x \end{cases}$ le cui soluzioni sono i due punti stazionari $A=(0,0)$ e $B=(1,1)$, quindi i due punti stazionari e per poterli classificare dobbiamo calcolare il determinante Hessiano, per cui $f''_{xx}(x,y)=12x$, $f''_{yy}(x,y)=6$, $f''_{xy}(x,y)=-6$ ed $f_{yx}(x,y)=-6$, essendo $f''_{xx}(x,y)f''_{yy}(x,y)-\left(f''_{xy}(x,y)\right)^2=72-36=36>0$, ed essendo $f''_{xx}(1,1)=12>0$, $f''_{yy}(x,y)=6>0$, conseguentemente il punto stazionario trovato è di minimo ed il suo valore è $f(1,1)=2-6+3=-1$; mentre per il punto $A=(0,0)$ essendo $H|f(0,0)|=-36$, risulta un punto di sella.

Traccia B

1. Data la funzione $h(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}-1 & \text{se } x<0 \\ -1 & \text{se } x=0 \\ senx & \text{se } x>0 \end{cases}$ individuare *eventuali* punti di discontinuità, e *classificarli*.

2. Calcolare, *se possibile*, il seguente limite: $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+3}-x$.

3. *Studiare* la funzione $x\to f(x)=\log_2\frac{x+1}{x-1}$, e *tracciarne approssimativamente* il grafico.

4. Data la funzione $g(x)=\begin{cases} 3^{\log(x-1)}-1 & \forall x>0 \\ arcsenx & \forall x\le 0 \end{cases}$, verificare la *se soddisfa le ipotesi* dei Teoremi di *Weierstrass* e di *Bolzano.*

5. Data la funzione $p(x)=\cos(x+\pi)$, calcolare il suo valor medio nell'intervallo $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

6. Data la $f(x,y)=x^3-x^2y^2+x^2$, trovare gli eventuali *punti stazionari interni* e *classificarli*.

Svolgimento traccia B

1. Essendo $h(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}-1 & \text{se } x<0 \\ -1 & \text{se } x=0 \\ senx & \text{se } x>0 \end{cases}$, per cui *f* è continua in $R-\{0\}$; si osserva che $f(0)=-1$, il $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}senx=0$ ed il $\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}-1=-1$; pertanto il punto 0 per la funzione data, è un punto di discontinuità *di prima specie*.

2. Trattandosi del $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+3}-x$, si osserva che la funzione $x^2+2x+3\ge0\Leftrightarrow\forall x\in R$ in quanto $\Delta=4-12<0$, pertanto il dominio *è illimitato*, e risulta: $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+3}-x=+\infty-\infty$, forma indeterminata, pertanto se osserviamo $\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+3}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x+3}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x+3}+x\right)}=\frac{2x+3}{\left(\sqrt{x^2+2x+3}+x\right)}=\frac{x\left(2+\frac{3}{x^2}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+x}$ quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+\frac{3}{x^2}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)}=\frac{2}{\sqrt{1}+1}=1.$$

3. Data la funzione $f(x)=\log_2 \frac{x+1}{x-1}$

Insieme di definizione:

Essendo una funzione logaritmica, deve essere $\frac{x+1}{x-1}>0$, quindi il numeratore è positivo $x\in\left]-1,+\infty\right[$ il denominatore è positivo $x\in\left]1,+\infty\right[$, conseguentemente $\frac{x+1}{x-1}>0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

pertanto $X=\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

Quindi tale funzione è definita $\forall x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$, ovvero

$$f:\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[\to f(x)=\log_2 \frac{x+1}{x-1}\in R$$

Segno della funzione:

Deve essere $f(x)>0 \Leftrightarrow \log_2 \frac{x+1}{x-1}>0=\log_2 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1}>1 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1}>0$

Pertanto $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left]1,+\infty\right[\cap X=\left]1,+\infty\right[$

Conseguentemente $f(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,1\right[\cap X=\left]-\infty,-1\right[$

Limiti significativi:

Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare il limite nei punti di accumulazione che non appartengono al dominio e nell'estremo inferiore e superiore.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\log_2 \frac{x+1}{x-1}=0$, trattandosi di funzione composta, si ha $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x-1}=1$ e conseguentemente $\lim_{y\to1}\log_2 y=0$

$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}\log_2 \frac{x+1}{x-1}=-\infty$, in quanto trattasi di funzione composta, per cui $\lim_{x\to-1^-}\frac{x+1}{x-1}=0$ e conseguentemente $\lim_{y\to+\infty}\log_2 y=-\infty$

$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\log_2 \frac{x+1}{x-1}=+\infty$, in quanto trattasi di funzione composta, per cui $\lim_{x\to1^+}(x+1)\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}=2(+\infty)=+\infty$ e conseguentemente $\lim_{y\to+\infty}\log_2 y=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\log_2 \frac{x+1}{x-1}=0$, trattandosi di funzione composta, si ha $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=1$ e conseguentemente $\lim_{y\to1}\log_2 y=0$

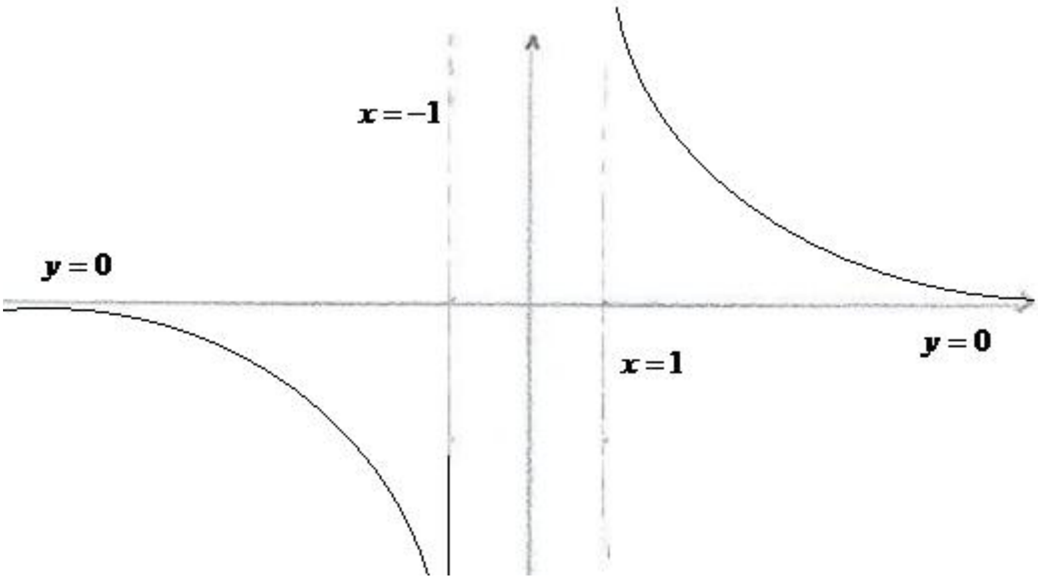
Pertanto la retta $y=0$ è un asintoto orizzontale a sinistra e a destra, mentre le rette $x=-1$ ed $x=1$ sono rispettivamente due asintoto verticali a sinistra ed a destra.

Derivata prima e monotonia:

$f'(x)=\log_2 \frac{x+1}{x-1} = \log_2 e \frac{x-1}{x+1}\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \log_2 e \frac{-2}{(x-1)(x+1)}$, quindi $f'(x)>0 \Leftrightarrow \log_2 e \frac{-2}{(x-1)(x+1)} > 0$, ed osservando che il logaritmo crescente è positivo, $f'(x)>0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$ e conseguentemente $f'(x)<0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$ quindi la funzione è strettamente decrescente nel suo insieme di definizione.

Derivata seconda e concavità:

$f''(x)=\log_2 e \frac{-2}{(x^2-1)} = -\log_2 e \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$, ed osservando che il logaritmo è positivo, risulta $f''(x)>0 \Leftrightarrow \log_2 e \frac{4x}{(x^2-1)^2} > 0 \Leftrightarrow 4x>0 \Leftrightarrow x \in \left]0,+\infty\right[$ conseguentemente $f''(x)<0 \Leftrightarrow 4x<0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,0\right[$ pertanto la funzione è strettamente concava in $\left]-\infty,-1\right[$ ed è strettamente convessa in $\left]1,+\infty\right[$.



e quindi dedurre che:

$f\left(\left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,+\infty\right[\right) = R-\{0\}$, $f\left(\left]-\infty,-1\right[\right) = \left]-\infty,0\right[$ ed $f\left(\left]1,+\infty\right[\right) = \left]0,+\infty\right[$, la funzione è biunivoca su $R-\{0\}$.

4. La funzione $g(x)=\begin{cases} 3^{\log(x-1)}-1 & \forall x>0 \\ arcsenx & \forall x \le 0 \end{cases}$, è definita $\forall x \in [-1,0] \cup \left]1,+\infty\right[$, in quanto la funzione arcoseno, in tale caso, è definita $\forall x \in [-1,0]$, la funzione esponenziale in tutto *R*, e la funzione log per $x-1>0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]1,+\infty\right[$, quindi il dominio risulta $\forall x \in [-1,0] \cup \left]1,+\infty\right[$; ed osservando che è composta da funzioni elementari, quindi continue nel loro dominio, la funzione *non soddisfa, ne le ipotesi del Teorema Bolzano,* in quanto il dominio non è un intervallo, *ne quelle del teorema di Weierstrass,* in quanto il dominio non è chiuso e limitato.

5. Data la funzione $p(x)=\cos(x+\pi)$, e ricordando che per il teorema della Media dell'integrale definito, $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \Leftrightarrow f(c)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)}$; per cui calcolando $\int \cos(x+\pi)dx = sen(x+\pi)+c$, e per il teorema Fondamentale del calcolo integrale, si ha: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x+\pi)dx = [sen(x+\pi)+c]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1$; per cui il valor medio della funzione risulta:

$$f(c)=\frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(x+\pi)dx}{\pi-\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

6. Data la $f(x,y)=x^3-x^2y^2+x^2$ il suo gradiente $\nabla f(x,y)=[f_x(x,y), f_y(x,y)]=[3x^2-2xy^2+2x,-2x^2y]$. gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases}3x^2-2xy^2+2x=0\\ -2x^2y=0\end{cases} = \begin{cases}3x^2-2xy^2+2x=0\\ y=0\end{cases}$, e nella prima si ottiene $3x^2+2x=0 \Leftrightarrow x(3x+2)=0$ le cui soluzioni sono $x=0$ e $x=-\frac{2}{3}$, quindi i due punti stazionari sono $(0,0)$ e $\left(-\frac{2}{3},0\right)$. per poterli classificare dobbiamo calcolare il determinante Hessiano, per cui $f_{xx}(x,y)=6x-2y^2+2$, $f_{yy}(x,y)=-2x^2$, $f_{xy}(x,y)=-4xy$ e $f_{yx}(x,y)=-4xy$, però cui $H_{(0,0)}=0$, pertanto per tale punto non possiamo dire nulla, mentre, $H_{\left(-\frac{2}{3},0\right)}=\frac{16}{9}$ in quanto $f_{xx}\left(-\frac{2}{3},0\right)=6\left(-\frac{2}{3}\right)+2=-2$, $f_{yy}\left(-\frac{2}{3},0\right)=-2\left(-\frac{2}{3}\right)^2=-\frac{8}{9}$ e $f_{xy}\left(-\frac{2}{3},0\right)=f_{yx}\left(-\frac{2}{3},0\right)=0$, conseguentemente il punto stazionario $\left(-\frac{2}{3},0\right)$ è di massimo ed il suo valore è $f\left(-\frac{2}{3},0\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)^3+\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{27}$.