Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
22 settembre 2017
(prof. Bisceglia)

1. Calcolare il seguente $\lim_{x\to+\infty} \frac{3\sqrt[3]{x}-2}{2x^2+x-\sqrt{x}}$, e verificare che sia corretto.

2. Data la funzione $h: x \in R \to \begin{cases} \frac{senx}{x} & \text{se } x \in \left]-\infty,0\right[\\ 0 & \text{se } x=0 \\ \frac{arcsenx}{senx} & \text{se } x \in \left]0,1\right[\\ 2\text{x -1} & \text{se } x \in \left[1,+\infty\right[\end{cases}$, dire se esistono dei punti di discontinuità e classificarli.

3. Studiare la funzione $x \to f(x) = \frac{1}{arctg(x-1)}$, e tracciarne approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione $g: x \in [0,1] \to kx^2+2x+\frac{1}{3}$, dire, per quali valori del parametro k soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle.

5. Data la funzione $p(x) = \frac{x-2}{x^2-16}$, calcolare la primitiva *P* tale che $P(3)=0$ e scrivere l'equazione della tangente sulla primitiva *P*, nel punto 1.

6. Data la funzione $f(x,y) = \log(xy^2 - x^2y)$, determinare il suo gradiente, ed eventuali punti stazionari.
(A.A. 2016/2017)

Svolgimento

1. Essendo $\lim_{x\to+\infty} \frac{3\sqrt[3]{x}-2}{2x^2+x-\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^{\frac{1}{3}}-2}{2x^2+x-x^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}\left(3-2x^{-\frac{1}{3}}\right)}{x^2\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)} =$, ovvero $\frac{3}{2}\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}} = 0$.

Per cui si ha $\left|\frac{3\sqrt[3]{x}-2}{2x^2+x-\sqrt{x}} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} < \varepsilon$, per cui essendo la radice sempre positiva è sufficiente studiare la seguente diseguaglianza $\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < \sqrt[3]{x^5} \Leftrightarrow x^5 > \frac{1}{\varepsilon^3} \Leftrightarrow x > \sqrt[5]{\frac{1}{\varepsilon^3}}$ pertanto posto $\delta = \sqrt[5]{\frac{1}{\varepsilon^3}}$, abbiamo individuato un intorno di più infinito.

2. Essendo $h: x \in R \to \begin{cases} \dfrac{senx}{x} & \text{se } x \in \left]-\infty,0\right[\\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{arcsenx}{senx} & \text{se } x \in \left]0,1\right[\\ 2x-1 & \text{se } x \in \left[1,+\infty\right[\end{cases}$, si osserva che $h(0)=0$, ed $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{senx}{x}=1$ così come $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{arcsenx}{senx} = \lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{arcsenx}{x}\dfrac{x}{senx}\right) = \lim_{x\to 0^+}\dfrac{arcsenx}{x}\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\dfrac{senx}{x}} = 1$ per cui nel punto 0, la funzione ha un punto di discontinuità eliminabile. Mentre, essendo $h(1)=1$ ed essendo $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{arcsenx}{senx} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{sen1}$ ed $\lim_{x\to 1^+}(2x-1)=1$, la funzione ha nel punto 1, una discontinuità di prima specie.

3. Data la funzione $x \to f(x) = \dfrac{1}{arctg(x-1)}$

Ricordando che la funzione arcotangente è definita in *R*, ed è nulla se e solo se l'argomento è zero l'insieme di definizione di *f* è: $\{x \in R, x-1 \neq 0\}$ ed essendo

$$x-1\neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \Leftrightarrow x \in R-\{1\} = \left]-\infty,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[\text{ è:}$$

$$f: x \in \left]-\infty,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[\to \frac{1}{arctg(x-1)}$$

e risultando:

$$f(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1}{arctg(x-1)}>0 \Leftrightarrow arctg(x-1)>0 = arctgtg\,0 = arctg\,0 \Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1 \Leftrightarrow x \in \left]1,+\infty\right[$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{arctg(x-1)} = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$$

$$f(x)<0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[-\left]1,+\infty\right[= \left]-\infty,1\right[$$

il grafico di *f* si trova al di sopra dell'asse delle *x* in $\left]1,+\infty\right[$, al di sotto dell'asse delle *x* in $\left]-\infty,1\right[$, ha in comune con gli assi il punto $(0, f(0)) = \left(0, \dfrac{1}{arctg(-1)}\right) = (0,-4/\pi)$ ed essendo:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{arctg(x-1)} = -\frac{2}{\pi}, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{arctg(x-1)} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{arctg(x-1)} = +\infty \text{ e } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{arctg(x-1)} = \frac{2}{\pi}$$

il grafico di *f* ha tre asintoti: la retta di equazione $y=-2/\pi$ asintoto orizzontale a sinistra, la retta di equazione $x=1$ asintoto verticale a sinistra e a destra e la retta di equazione $y=2/\pi$ asintoto orizzontale a destra.

Essendo:

$$f'(x) = D\frac{1}{arctg(x-1)} = -\frac{1}{\left(1+(x-1)^2\right)arctg^2(x-1)} \text{ se } x \in \left]-\infty,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$$

e

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x \in \varnothing \text{ ed } f'(x)<0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$$

quindi la funzione f è strettamente decrescente in $]-\infty,1[$ ed in $]1,+\infty[$.

Risultando infine:

$$f''(x)=D\frac{-1}{\left(1+(x-1)^2\right)arctg^2(x-1)}=\frac{D\left(\left(1+(x-1)^2\right)arctg^2(x-1)\right)}{\left(1+(x-1)^2\right)^2 arctg^4(x-1)}=\frac{2(x-1)arctg^2(x-1)+2arctg(x-1)}{\left(1+(x-1)^2\right)^2 arctg^4(x-1)}=$$

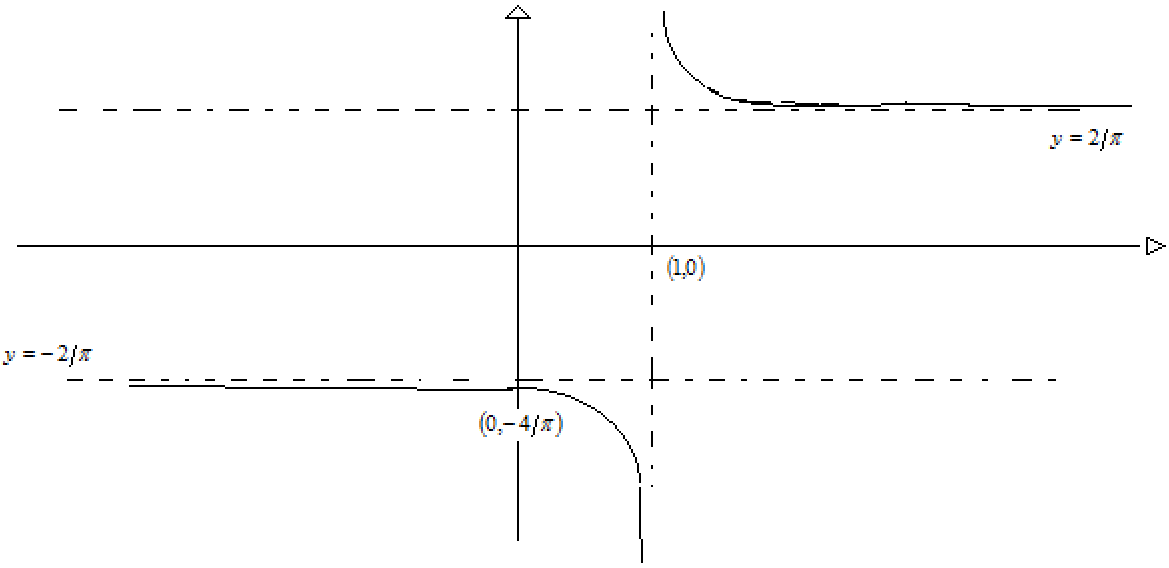
$$=\frac{2(x-1)arctg(x-1)+2}{\left(1+(x-1)^2\right)^2 arctg^3(x-1)}=\text{ se } x\in\,]-\infty,1[\,\cup\,]1,+\infty[$$

ed osservando che $\frac{2(x-1)arctg(x-1)+2}{\left(1+(x-1)^2\right)^2 arctg^2(x-1)}$ è maggiore di zero per ogni elemento x di $]-\infty,1[\,\cup\,]1,+\infty[$ è:

$f''(x)>0 \Leftrightarrow arctg(x-1)>0 \Leftrightarrow x\in\,]1,+\infty[$, $f''(x)=0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$ ed $f''(x)<0 \Leftrightarrow x\in\,]-\infty,1[$

e pertanto f è strettamente convessa in $]1,+\infty[$ e strettamente concava in $]-\infty,0[$.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di f:



e quindi dedurre che:

$f(]-\infty,1[\,\cup\,]1,+\infty[)=\,]-\infty,-2/\pi[\,\cup\,]2/\pi,+\infty[$, f è biunivoca, non limitata inferiormente e non limitata superiormente.

OSSERVAZIONE. È immediato convincersi che f è una funzione $(1,0)$-simmetrica pertanto avremmo potuto limitarci a tracciare il grafico G della restrizione di f a $]1,+\infty[$ ed ottenere il grafico di f unendo a G la curva G' simmetrica di G rispetto al punto $(1,0)$.

4. Essendo g continua e derivabile in $[0,1]$, per completare le ipotesi del Teorema di Rolle, deve essere $g(0)=g(1) \Leftrightarrow \frac{1}{3}=k+2+\frac{1}{3} \Leftrightarrow k=\frac{1}{3}-2-\frac{1}{3} \Leftrightarrow k=-\frac{6}{3}$.

5. Essendo $p(x)=\frac{x-2}{x^2-16}$, si osserva che $\frac{x-2}{x^2-16}=\frac{x-2}{x^2-4^2}=\frac{x-2}{(x-4)(x+4)}$ quindi possiamo scrivere la nostra funzione come $\frac{A}{(x-4)}+\frac{B}{(x+4)}=\frac{A(x+4)+B(x-4)}{(x-4)(x+4)}=\frac{(A+B)x+4(A-B)}{(x-4)(x+4)}$, pertanto per la

similitudine dei polinomi deve essere $\begin{cases} A+B=1 \\ 4(A-B)=-2 \end{cases} = \begin{cases} A+B=1 \\ A=-\frac{1}{2}+B \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{2}+B+B=1 \\ A=-\frac{1}{2}+B \end{cases} = \begin{cases} B=\frac{3}{4} \\ A=\frac{1}{4} \end{cases}$

pertanto $\int \frac{x-2}{x^2-16}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-4}dx + \frac{3}{4}\int \frac{1}{x+4}dx$ per cui $P(x) = \frac{1}{4}\log|x-4| + \frac{3}{4}\log|x+4| + c$ e quindi $P(3)=0 \Leftrightarrow = \frac{1}{4}\log|3-4| + \frac{3}{4}\log|3+4| + c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{3}{4}\log 7$ ovvero la primitiva cercata è $P(x) = \frac{1}{4}\log|x-4| + \frac{3}{4}\log|x+4| - \frac{3}{4}\log 7$. Infine l'equazione della tangente sulla primitiva *P*, nel punto 1, è: $y = P'(1)(x-1) + P(1) \Leftrightarrow y = p(1)(x-1) + P(1)$ ovvero $y = \frac{1}{15}(x-1) + \frac{1}{4}\log|-3| + \frac{3}{4}\log\frac{5}{7}$.

6. Data la $f(x,y) = \log(xy^2 - x^2y)$ il suo gradiente $\nabla f(x,y) = \lfloor f_x(x,y), f_y(x,y) \rfloor$. per cui, essendo $f'_x(x,y) = \frac{1}{xy^2 - x^2y} D_x(xy^2 - x^2y) = \frac{y^2 - 2xy}{xy^2 - x^2y} = \frac{y(y-2x)}{y(xy - x^2)} = \frac{y-2x}{xy - x^2}$ e $f'_y(x,y) = \frac{1}{xy^2 - x^2y} D_y(xy^2 - x^2y) = \frac{2yx - x^2}{xy^2 - x^2y} = \frac{x(2y-x)}{x(y^2 - xy)} = \frac{2y-x}{y^2 - xy}$ per cui $\nabla f(x,y) = \left[\frac{2x-y}{x^2-xy}, \frac{2y-x}{y^2-xy}\right]$ gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} \frac{2x-y}{x^2-xy} = 0 \\ \frac{2y-x}{y^2-xy} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=0 \\ 2y-x=0 \end{cases} = \begin{cases} 2x=y \\ 2y=x \end{cases}$ quindi l'unico punto che annulla quest'ultimo sistema è il punto $P_1(0,0)$, ma tale punto pone il sistema del gradiente sotto forma indeterminata, pertanto non è un punto stazionario.