Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
22 gennaio 2020
(prof. Bisceglia)

Traccia A

1. Data la funzione $g(x)=\begin{cases} \arccos\dfrac{1}{1-x} & \text{se } x<0 \\ \pi & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x>0 \end{cases}$ individuare *eventuali* punti di discontinuità, e *classificarli*.

2. Calcolare, *se possibile*, il seguente limite: $\lim\limits_{x\to+\infty} arcsen\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)\cdot x$

3. *Studiare* la funzione $x\to f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x+2}}\in R$, e *tracciarne* approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{se } x<1 \\ 3x-1 & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$, verificare la *derivabilità* nel suo dominio.

5. Data la funzione $p(x)=\left(1+4x^2\right)^{-1}$, calcolare la primitiva P, tale che in $P(0)=\dfrac{\pi}{2}$.

6. Data la funzione $f(x,y)=x^2y^2-x^2y$ *trovare* eventuali punti stazionari e *classificarli*.

Svolgimento traccia A

1. Data la seguente funzione $g(x)=\begin{cases} \arccos\dfrac{1}{1-x} & \text{se } x<0 \\ \pi & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x>0 \end{cases}$, definita $\dfrac{1}{1-x}\in[-1,1]$ ovvero $-1\leq\dfrac{1}{1-x}\leq 1$; per cui $\dfrac{1}{1-x}\geq -1 \Leftrightarrow \dfrac{2-x}{1-x}\geq 0 \Leftrightarrow \forall x\in\left(\left]-\infty,1\right[\cup\left[2,+\infty\right[\right)$ ed $\dfrac{1}{1-x}\leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{1-x}\leq 0 \Leftrightarrow \forall x\in\left(\left]-\infty,0\right]\cup\left]1,+\infty\right[\right)$, quindi la funzione arcoseno è definita $\forall x\in\left(\left]-\infty,0\right]\cup\left[2,+\infty\right[\right)$, ed osservando che $g(0)=\pi$, il $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=0$ ed il $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\arccos\dfrac{1}{1-x}=0$, il punto 0 per la funzione data, è un punto discontinuità *eliminabile*.

2. Essendo $\lim_{x\to+\infty} arcsen\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)\cdot x$ il limite di una funzione composta, e ricordando cha la funzione arcoseno è definita $\forall x\in[-1,1]\Leftrightarrow\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)\in[-1,1]\Leftrightarrow\begin{cases}3^{\frac{1}{x}}-1\le 1\\ 3^{\frac{1}{x}}-1\ge -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3^{\frac{1}{x}}\le 2\\ 3^{\frac{1}{x}}\ge 0\end{cases}$, ovvero

$\begin{cases}3^{\frac{1}{x}}\le 2=3^{\log_3 2}\Leftrightarrow\frac{1}{x}\le\log_3 2\Leftrightarrow\frac{1}{\log_3 2}\le x\\ 3^{\frac{1}{x}}\ge 0\Leftrightarrow\forall x\in R-\{0\}\end{cases}$, quindi il dominio risulta $\forall x\in\left[\frac{1}{\log_3 2},+\infty\right[$,

pertanto è possibile effettuare il limite assegnato in quanto il dominio non è limitato superiormente, ed osservando che il limite $\lim_{x\to+\infty} arcsen\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)\cdot x$ si pone sotto la forma indeterminata $0\cdot\infty$ per cui possiamo ricondurlo ad un limite notevole, ovvero $\lim_{x\to+\infty}\frac{arcsen\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)}\cdot\frac{\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\frac{1}{x}}\frac{1}{x}x=\log 3$

risulta che il $\lim_{x\to+\infty} arcsen\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)=0$, in quanto essendo appunto il limite di una funzione composta in cui il $\lim_{x\to+\infty}\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)=0$ e conseguentemente $\lim_{x\to 0} arcseny=0$.

3. Data la funzione $x\to f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x+2}}\in R$

Insieme di definizione:

Essendo una funzione razionale, il numeratore è definito $\forall x\in R$, mentre il denominatore è definito $x+2>0\Leftrightarrow x\in]-2,+\infty[$,

pertanto $X=]-2,+\infty[\cap R=]-2,+\infty[$

Quindi tale funzione è definita $\forall x\in]-2,+\infty[$, ovvero

$$f:]-2,+\infty[\to f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x+2}}\in R$$

Segno della funzione:

Essendo il denominatore sempre positivo, vedere dove $f(x)>0\Leftrightarrow x-1>0\Leftrightarrow x>1$

Pertanto $f(x)>0\Leftrightarrow x\in]1,+\infty[\cap X=]1,+\infty[$

Conseguentemente $f(x)<0\Leftrightarrow x\in]-\infty,1[\cap X=]-2,1[$

Si osserva che $f(1)=0$, quindi tocca il punto $(1,0)$. Mentre $f(0)=\frac{-1}{\sqrt{2}}$ pertanto passa per il punto $\left(0,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

Limiti significativi:

Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare il limite nel punto di accumulazione che non appartiene al dominio e nell'estremo superiore.

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+} x-1 \lim_{x\to -2^+}\frac{1}{\sqrt{x+2}}=-3(+\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}=+\infty$$

ed osservando che $\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x-1}{x\sqrt{x+2}}=0$

Pertanto non vi sono asintoti orizzontali e nemmeno obliqui e la retta $x=-2$ è un asintoto verticale a destra.

Derivata prima e monotonia:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x+2}-\frac{x-1}{2\sqrt{x+2}}}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2}=\frac{2\left(\sqrt{x+2}\right)^2-x+1}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2 2\sqrt{x+2}}=\frac{x+5}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2 2\sqrt{x+2}}$$., quindi

$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{x+5}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2 2\sqrt{x+2}}>0 \Leftrightarrow x+5>0 \Leftrightarrow x>-5$, pertanto essendo il denominatore sempre positivo nell'insieme di definizione della funzione, è sufficiente studiare $f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left]-5,+\infty\right[\cap X \Leftrightarrow x\in\left]-2,+\infty\right[$, conseguentemente la funzione è strettamente crescente nel suo dominio.

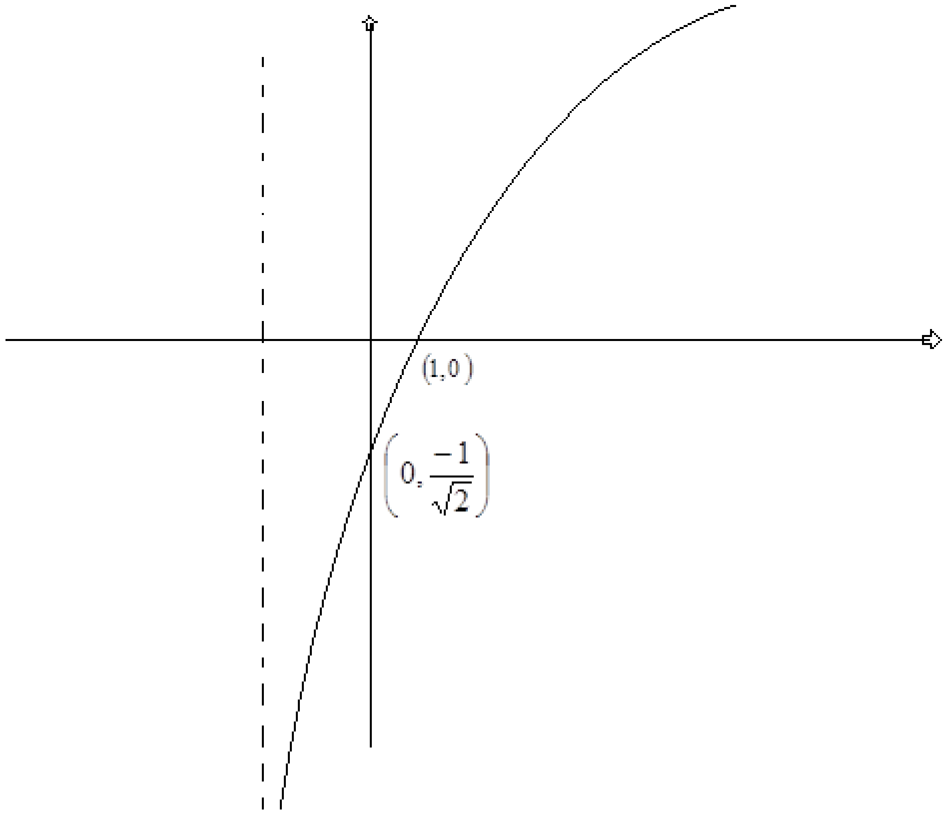
Derivata seconda e concavità:

$$f''(x)=\frac{1}{2}\frac{(x+2)\sqrt{x+2}-(x+5)\left[\sqrt{x+2}+\frac{x+2}{2\sqrt{x+2}}\right]}{\left((x+2)\sqrt{x+2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(x+2)\sqrt{x+2}-\left[\frac{(x+5)(3x+6)}{2\sqrt{x+2}}\right]}{\left((x+2)\sqrt{x+2}\right)^2}=\frac{1}{2}\frac{2(x+2)^2-(x+5)(3x+6)}{2\sqrt{x+2}\left((x+2)\sqrt{x+2}\right)^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{(x+2)(x+11)}{2\sqrt{x+2}\left((x+2)\sqrt{x+2}\right)^2}=-\frac{1}{4}\frac{x+11}{\sqrt{x+2}(x+2)^2}$$, pertanto essendo il denominatore sempre positivo nell'insieme di definizione della funzione, per studiare $f''(x)>0$ è sufficiente studiare

$-(x+11)>0 \Leftrightarrow (x+11)<0 \Leftrightarrow x<-11$, per cui $f''(x)>0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-11\right[$ pertanto la funzione è strettamente convessa in $\forall x \in \left]-\infty,-11\right[\cap \left]-2,+\infty\right[\Leftrightarrow \forall x \in \emptyset$ mentre è strettamente concava in $\forall x \in \left]-2+\infty\right[$.



e quindi dedurre che:

$f\left(\left]-11,+\infty\right[\right)=R$, quindi è illimitata, inoltre f è biunivoca su R.

4. Data la funzione $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{se } x<1 \\ 3x-1 & \text{se } x\geq 1\end{cases}$, definita $\forall x \in R$, la sua funzione derivata prima risulta $f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{se } x<1 \\ 3 & \text{se } x\geq 1\end{cases}$ definita $\forall x \in R$; ma verifichiamo la sua derivabilità nel punto di raccordo $x=1$, per cui deve $\exists \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\in R$, ed essendo $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)=2$ ed $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{3x-1-2}{x-1}=-\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{3(x-1)}{x-1}=3$, la funzione *non è dotata di derivata* in $x=1$ e tale punto *è un punto angoloso* per la funzione data.

5. Si tratta di risolvere il seguente integrale $\int\left(1+4x^2\right)^{-1}dx=\int\frac{1}{\left(1+4x^2\right)}dx=\frac{1}{2}arctg(2x)+c$ pertanto $F(0)=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}arctg(0)+c=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow c=\frac{\pi}{2}$ la primitiva cercata risulta $F(x)=\frac{1}{2}arctg(2x)+\frac{\pi}{2}$.

6. Data la $f(x,y)=x^2y^2-x^2y$ il suo gradiente $\nabla f(x,y)=\lfloor f_x(x,y), f_y(x,y)\rfloor$. per cui, essendo $f_x'(x,y)=2xy^2-2xy$ e $f_y'(x,y)=2yx^2-x^2$ per cui $\nabla f(x,y)=\left[2xy^2-2xy, 2yx^2-x^2\right]$ gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} 2xy^2-2xy=0 \\ 2yx^2-x^2=0 \end{cases}$ pertanto il punti stazionario risulta $P_1=(0,0)$; e considerando il determinante Hessiano $H(x,y)=2x^2(2y^2-2y)-(4xy-2x)^2$ si ha che $H(0,0)=0$ ed essendo $f''(0,0)=0$ il pertanto il punto stazionario $P_1=(0,0)$ è di sella.

Traccia B

1. Data la funzione $g(x)=\begin{cases} arcsen\dfrac{1}{1-x} & \text{se } x<0 \\ \pi & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$ individuare *eventuali* punti di discontinuità, e *classificarli*.

2. Calcolare, *se possibile*, il seguente limite: $\lim\limits_{x\to+\infty} arcsen\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)\cdot x$.

3. *Studiare* la funzione $x\to f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}\in R$, e *tracciarne* approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{se } x<1 \\ 3x-1 & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$, verificare la *derivabilità* nel suo dominio.

5. Data la funzione $p(x)=\left(1-4x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$, calcolare la primitiva *P*, tale che $P(0)=\pi$.

6. Data la funzione $f(x,y)=2x^2y-x^3 2y+xy$ *trovare* eventuali punti stazionari e *classificarli*.

Svolgimento traccia B

1. Data la seguente funzione $g(x)=\begin{cases} arcsen\dfrac{1}{1-x} & \text{se } x<0 \\ \pi & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$, definita $\dfrac{1}{1-x}\in[-1,1]$ ovvero $-1\leq\dfrac{1}{1-x}\leq 1$; per cui $\dfrac{1}{1-x}\geq -1\Leftrightarrow\dfrac{2-x}{1-x}\geq 0\Leftrightarrow\forall x\in(]-\infty,1[\cup[2,+\infty[)$ ed $\dfrac{1}{1-x}\leq 1\Leftrightarrow\dfrac{x}{1-x}\leq 0\Leftrightarrow\forall x\in(]-\infty,0]\cup]1,+\infty[)$, quindi la funzione arcoseno è definita $\forall x\in(]-\infty,0]\cup[2,+\infty[)$, ed osservando che $g(0)=\pi$, il $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\pi$ ed il $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\arccos\dfrac{1}{1-x}=0$, il punto 0 per la funzione data, è un punto discontinuità di *prima specie*.

2. Essendo $\lim_{x\to+\infty} arcsen\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)\cdot x$ il limite di una funzione composta, e ricordando cha la funzione arcoseno è definita $\forall x \in [-1,1] \Leftrightarrow \left(2^{\frac{1}{x}}-1\right) \in [-1,1] \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\frac{1}{x}}-1 \le 1 \\ 2^{\frac{1}{x}}-1 \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\frac{1}{x}} \le 2 \\ 2^{\frac{1}{x}} \ge 0 \end{cases}$, ovvero $\begin{cases} 2^{\frac{1}{x}} \le 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \le 1 \Leftrightarrow 1 \le x \\ 2^{\frac{1}{x}} \ge 0 \Leftrightarrow \forall x \in R-\{0\} \end{cases}$, quindi il dominio risulta $\forall x \in [1,+\infty[$, pertanto è possibile effettuare il limite assegnato in quanto il dominio non è limitato superiormente, ed osservando che il limite $\lim_{x\to+\infty} arcsen\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)\cdot x$ si pone sotto la forma indeterminata $0\cdot\infty$ per cui possiamo ricondurlo ad un limite notevole, ovvero $\lim_{x\to+\infty} \frac{arcsen\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)}\cdot\frac{\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\frac{1}{x}}\frac{1}{x}x = \log 2$.

3. Data la funzione $x \to f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-2}} \in R$

Insieme di definizione:

Essendo una funzione razionale, il numeratore è definito $\forall x \in R$, mentre il denominatore è definito

$$x-2>0 \Leftrightarrow x \in]2,+\infty[,$$

pertanto $X =]2,+\infty[\cap R =]2,+\infty[$

Quindi tale funzione è definita $\forall x \in]2,+\infty[$, ovvero

$$f:]2,+\infty[\to f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-2}} \in R$$

Segno della funzione:

Essendo il denominatore sempre positivo, vedere dove $f(x)>0 \Leftrightarrow x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$

Pertanto $f(x)>0 \Leftrightarrow x \in]-1,+\infty[\cap X =]2,+\infty[$

Conseguentemente $f(x)<0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-1[\cap X \in \varnothing$

Si osserva che $f(x)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \notin]2,+\infty[$, quindi la funzione è sempre positiva nel suo dominio.

Limiti significativi:

Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare il limite nel punto di accumulazione che non appartiene al dominio e nell'estremo superiore.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x+1)\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{\sqrt{x-2}} = 3(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}} = +\infty$$

ed osservando che $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} = 0$

Pertanto non vi sono asintoti orizzontali e nemmeno obliqui e la retta $x=2$ è un asintoto verticale a destra.

Derivata prima e monotonia:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x-2}-\frac{x+1}{2\sqrt{x-2}}}{\left(\sqrt{x-2}\right)^2} = \frac{2\left(\sqrt{x-2}\right)^2-(x+1)}{\left(\sqrt{x-2}\right)^2 2\sqrt{x-2}} = \frac{x-5}{\left(\sqrt{x-2}\right)^2 2\sqrt{x-2}}$$, quindi

$f'(x)>0\,\frac{x-5}{\left(\sqrt{x-2}\right)^2 2\sqrt{x-2}}>0 \Leftrightarrow x-5>0 \Leftrightarrow x>5$, pertanto essendo il denominatore sempre positivo nell'insieme di definizione della funzione, è sufficiente studiare $f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left]5,+\infty\right[\cap X \Leftrightarrow x\in\left]5,+\infty\right[$, conseguentemente la funzione è strettamente crescente $\forall x\in\left]5,+\infty\right[$;

$f'(x)<0 \Leftrightarrow \forall x\in\left]-\infty,5\right[\cap X \Leftrightarrow \forall x\in\left]2,5\right[$, conseguentemente la funzione è strettamente decrescente $\forall x\in\left]2,5\right[$, e risulterà $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=5$ pertanto la funzione nel punto $x=5$ avrà il punto di minimo assoluto, con minimo assoluto $f(5)=\frac{6}{\sqrt{3}}$, quindi passa per il punto $\left(5,\frac{6}{\sqrt{3}}\right)$.

Derivata seconda e concavità:

$$f''(x) = \frac{1}{2}\,\frac{(x-2)\sqrt{x-2}-(x-5)\left[\sqrt{x-2}+\frac{x-2}{2\sqrt{x-2}}\right]}{\left((x-2)\sqrt{x-2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(x-2)\sqrt{x-2}-\left[\frac{(x-5)(3x-6)}{2\sqrt{x-2}}\right]}{\left((x-2)\sqrt{x-2}\right)^2} = \frac{1}{4}\,\frac{2(x-2)-(3x-15)}{\sqrt{x-2}(x-2)^2} = \;= \frac{1}{4}\,\frac{-x+11}{\sqrt{x-2}(x-2)^2}$$, pertanto

essendo il denominatore sempre positivo nell'insieme di definizione della funzione, per studiare $f''(x)>0$ è sufficiente studiare $-x+11>0 \Leftrightarrow \forall x<11$, per cui $f''(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,11\right[$ pertanto la funzione è strettamente convessa in $\forall x\in\left]-\infty,11\right[\cap\left]2,+\infty\right[\Leftrightarrow \forall x\in\left]2,11\right[$ mentre è strettamente concava in $\forall x\in\left]11,+\infty\right[$; assumendo un punto di flesso proprio nel punto $(11, f(11))$

e quindi dedurre che:

$f(]2,+\infty[)=\left[\frac{6}{\sqrt{3}},+\infty\right[$, quindi è dotata di estremo inferiore $\inf f(x)=\frac{6}{\sqrt{3}}$ con $\frac{6}{\sqrt{3}}\in f(]2,+\infty[)$, pertanto dotata di minimo assoluto; non invertibile, in quanto non ingettiva, pertanto la sua restrizione a $[5,+\infty[$ risulta invertibile biunivoca su $\left[\frac{6}{\sqrt{3}},+\infty\right[$.

4. Data la funzione $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{se } x<1\\ 3x-1 & \text{se } x\geq 1\end{cases}$, definita $\forall x\in R$, la sua funzione derivata prima risulta $f'(x)=\begin{cases}2x & \text{se } x<1\\ 3 & \text{se } x\geq 1\end{cases}$ definita $\forall x\in R$; ma verifichiamo la sua derivabilità nel punto di raccordo $x=1$, per cui deve $\exists \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\in R$, ed essendo $\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2$ ed $\lim_{x\to 1^+}\frac{3x-1-2}{x-1}=-\lim_{x\to 1^+}\frac{3(x-1)}{x-1}=3$, la funzione *non è dotata di derivata* in $x=1$ e tale punto *è un punto angoloso* per la funzione data.

5. Si tratta di risolvere il seguente integrale $\int(1-4x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}dx=\frac{1}{2}arcsen(2x)+c$ pertanto $F(0)=\pi \Leftrightarrow \frac{1}{2}arcsen(0)+c=\pi \Leftrightarrow c=\pi$ la primitiva cercata risulta $F(x)=\frac{1}{2}arcsen(2x)+\pi$.

6. Data la funzione $f(x,y)=2x^2y-x^3 2y+xy$ il suo gradiente $\nabla f(x,y)=\lfloor f_x(x,y), f_y(x,y)\rfloor$ per cui, essendo $f'_x(x,y)=4xy-6x^2y+y$ e $f'_y(x,y)=2x^2-2x^3+x$ per cui gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases}4xy-6x^2y+y=0\\ 2x^2-2x^3+x=0\end{cases}$, ovvero $P_1=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},0\right)$, $P_2=\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2},0\right)$ e $P_3=(0,0)$; e considerando il determinante Hessiano $H(x,y)=(-6x^2+4x+1)^2$ si ha che $H(0,0)=1$ ed essendo $f''(0,0)=0$ il punto stazionario $P_3=(0,0)$ risulta di sella; inoltre $H\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2},0\right)=\left(-6\frac{1-\sqrt{3}}{2}+4\frac{1-\sqrt{3}}{2}+1\right)^2=3$ ed essendo $f''\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2},0\right)=0$ il punto stazionario $P_2=\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2},0\right)$ risulta di sella; ed infine $H\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},0\right)=\left(-6\frac{1+\sqrt{3}}{2}+4\frac{1+\sqrt{3}}{2}+1\right)^2=3$ pertanto anche il punto stazionario $P_1=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},0\right)$ essendo $f''\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},0\right)=0$ risulta di sella.