Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
16 gennaio 2017
(prof. Bisceglia)

Traccia A

1. Calcolare il seguente $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x^2+1}\right)$, e verificare che sia corretto.

2. Data la funzione $h : x \in R \to \begin{cases} \dfrac{senx}{x} & \text{se } x \in]-\infty,0[\\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{arcsenx}{senx} & \text{se } x \in]0,1[\\ 2x-1 & \text{se } x \in [1,+\infty[\end{cases}$, dire se esistono dei punti di discontinuità e classificarli.

3. Studiare la funzione $x \to f(x) = \log|x|/x$, e tracciarne approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione $g : x \in [0,1] \to kx^2 + 2x + \dfrac{1}{3}$, dire, per quali valori del parametro k soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle.

5. Data la funzione $p(x) = \log(x^2+2)$, calcolare, per parte, una primitiva *P*, e riportare l'equazione della tangente sulla primitiva *P*, nel punto 1.

6. Data la funzione $f(x,y) = x^3 - x^2y^2 + x^2$, determinare il suo gradiente, eventuali punti stazionari e classificarli. (A.A. 2016/2017)

Svolgimento - Traccia A

1. Essendo $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}-|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right) =$ $\lim_{x\to-\infty}|x|\left(\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to-\infty}|x| \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to-\infty}|x|\left(\sqrt{2}-1\right) = +\infty$. Per cui si ha $|x|\left(\sqrt{2}-1\right) > \varepsilon \Leftrightarrow |x| > \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}-1} \Leftrightarrow x < -\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}-1}$, in quanto stiamo facendo il limite per *x* che tende a meno infinito, e posto $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}-1}$, abbiamo individuato un intorno di meno infinito.

2. Essendo $h : x \in R \to \begin{cases} \dfrac{senx}{x} & \text{se } x \in \left]-\infty,0\right[\\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{arcsenx}{senx} & \text{se } x \in \left]0,1\right[\\ 2x-1 & \text{se } x \in \left[1,+\infty\right[\end{cases}$, si osserva che $h(0) = 0$, ed $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{senx}{x} = 1$ così come $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{arcsenx}{senx} = \lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{arcsenx}{x}\dfrac{x}{senx}\right) = \lim_{x\to 0^+}\dfrac{arcsenx}{x}\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\dfrac{senx}{x}} = 1$ per cui nel punto 0, la funzione ha un punto di discontinuità eliminabile. Mentre, essendo $h(1) = 1$ ed essendo $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{arcsenx}{senx} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{sen1}$ ed $\lim_{x\to 1^+}(2x-1) = 1$, la funzione ha nel punto 1, una discontinuità di prima specie.

3. *Data la funzione*: $x \to f(x) = \log|x|/x$.

L'insieme di definizione della funzione *f* è: $\{x \in R, x \neq 0\} = R - \{0\} = \left]-\infty,0\right[\cup \left]0,+\infty\right[$ e pertanto è:

$$f : x \in R - \{0\} \to \frac{1}{x}\log|x| = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\log(-x) & \text{se } x \in \left]-\infty,0\right[\\ \dfrac{1}{x}\log x & \text{se } x \in \left]0,+\infty\right[\end{cases}$$

e risultando:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}\log|x| > 0 \Leftrightarrow \left(x<0 \text{ e } \log(-x) < 0 = \log 1\right) \text{ o } \left(x > 0 \text{ e } \log x > 0 = \log 1\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x<0 \text{ e } -x<1) \text{ o } (x>0 \text{ e } x>1) \Leftrightarrow x \in \left]-1,0\right[\cup \left]1,+\infty\right[$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}\log|x| = 0 \Leftrightarrow \log|x| = 0 = \log 1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ o } x = 1$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,0\right[\cup \left]0,+\infty\right[- \left(\left]-1,0\right[\cup \left]1,+\infty\right[\right) = \left]-\infty,-1\right[\cup \left]0,1\right[$$

il grafico di *f* si trova al di sopra dell'asse delle *x* in $\left]-1,0\right[$ ed in $\left]1,+\infty\right[$, si trova al di sotto dell'asse delle *x* in $\left]-\infty,-1\right[$ ed in $\left]0,1\right[$, ha in comune con gli assi i punti $(-1, f(-1)) = (-1,0)$ e $(1, f(1)) = (1,0)$ ed essendo:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\log|x|}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0,\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}\log|x| = (-\infty)(-\infty) = +\infty,\ \lim_{x\to 0^+} f(x) =$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\log|x| = (+\infty)(-\infty) = -\infty \text{ e } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log|x|}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

il grafico di *f* ha due asintoti: la retta di equazione $y = 0$ asintoto orizzontale a sinistra e a destra e la retta di equazione $x = 0$ asintoto verticale a sinistra e a destra.

Essendo:

$$f'(x) = D\frac{\log|x|}{x} = \frac{1-\log|x|}{x^2} \quad \text{se } x \in R - \{0\}$$

è:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1-\log|x|}{x^2} > 0 \Leftrightarrow 1 - \log|x| > 0 \Leftrightarrow \log|x| < 1 = \log e \Leftrightarrow 0 < |x| < e \Leftrightarrow x \in \left]-e,0\right[\cup \left]0,e\right[$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-\log|x|}{x^2}=0 \Leftrightarrow 1-\log|x|=0 \Leftrightarrow \log|x|=1=\log e \Leftrightarrow |x|=e \Leftrightarrow x=-e \quad \text{o} \quad x=e$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in \left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[-\left(\left[-e,0\right[\cup\left]0,e\right]\right)=\left]-\infty,-e\right[\cup\left]e,+\infty\right[$$

quindi *f* è strettamente crescente in $\left[-e,0\right[$ ed in $\left]0,e\right]$, è strettamente decrescente in $\left]-\infty,-e\right]$ ed in $\left[e,+\infty\right[$, ha in $-e$ un punto di minimo relativo proprio ed in *e* un punto di massimo relativo proprio ed essendo $f(-e)=-1/e$ ed $f(e)=1/e$ il grafico di *f* passa per i punti $(-e,-1/e)$ ed $(e,1/e)$.

Risultando infine:

$$f''(x)=D\frac{1-\log|x|}{x^2}=\frac{-x-2x(1-\log|x|)}{x^4}=\frac{2\log|x|-3}{x^3} \quad \forall x\in R-\{0\}$$

è:

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2\log|x|-3}{x^3}>0 \Leftrightarrow (x<0 \text{ e } 2\log|x|-3<0) \text{ o } (x>0 \text{ e } 2\log|x|-3>0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x<0 \text{ e } \log|x|<3/2=\log\sqrt{e^3}\right) \text{ o } \left(x>0 \text{ e } \log|x|>3/2=\log\sqrt{e^3}\right) \Leftrightarrow x\in\left]-\sqrt{e^3},0\right[\cup\left]\sqrt{e^3},+\infty\right[$$

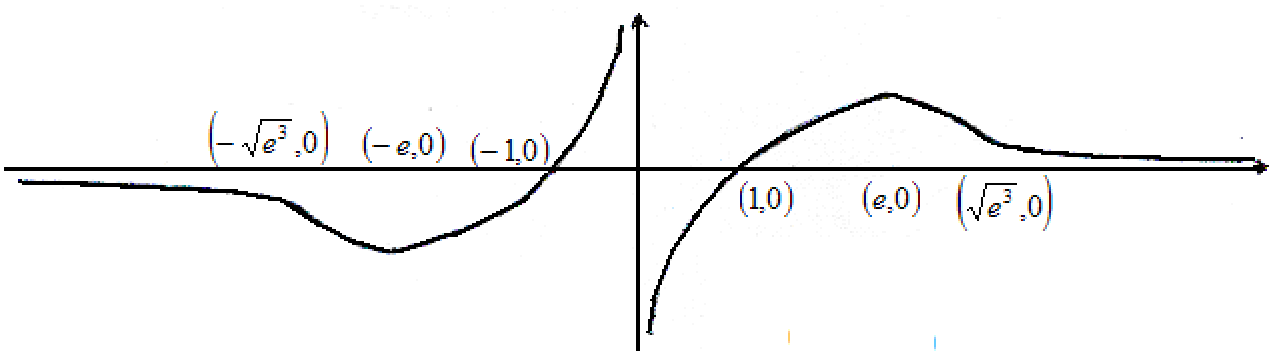
$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2\log|x|-3}{x^3}=0 \Leftrightarrow 2\log|x|-3=0 \Leftrightarrow \log|x|=3/2=\log\sqrt{e^3} \Leftrightarrow |x|=\sqrt{e^3} \Leftrightarrow x=-\sqrt{e^3} \quad \text{o}$$

$$x=\sqrt{e^3}$$

$$f''(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[-\left(\left]-\sqrt{e^3},0\right[\cup\left]\sqrt{e^3},+\infty\right[\right)=\left]-\infty,-\sqrt{e^3}\right[\cup\left]0,\sqrt{e^3}\right[$$

e pertanto *f* è strettamente convessa in $\left]-\sqrt{e^3},0\right[$ ed in $\left]\sqrt{e^3},+\infty\right[$, è strettamente concava in $\left]-\infty,-\sqrt{e^3}\right[$ ed in $\left]0,\sqrt{e^3}\right[$, ed ha due punti di flesso proprio in $-\sqrt{e^3}$ ed in $\sqrt{e^3}$ ed essendo $f\left(-\sqrt{e^3}\right)=-3/2\sqrt{e^3}$ ed $f\left(\sqrt{e^3}\right)=3/2\sqrt{e^3}$ il grafico di *f* passa per i punti $\left(-\sqrt{e^3},-3/2\sqrt{e^3}\right)$ e $\left(\sqrt{e^3},3/2\sqrt{e^3}\right)$.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:



e quindi dedurre che:

$f(R-\{0\})=f(\left]-\infty,0\right[)\cup f(\left]0,+\infty\right[)=\left]-1/e,+\infty\right[\cup\left]-\infty,1/e\right]=R$, $f(\left]-\infty,-e\right])=\left[-1/e,0\right[$, $f(\left[-e,0\right[)= =\left[-1/e,+\infty\right[$, $f(\left]0,e\right])=\left]-\infty,1/e\right]$ ed $f(\left[e,+\infty\right[)=\left[1/e,0\right[$, *f* non è biunivoca, la restrizione di *f* a $\left]-\infty,-e\right]$ è biunivoca su $\left[-1/e,0\right[$, la restrizione di *f* a $\left[-e,0\right[$ è biunivoca su $\left[-1/e,+\infty\right[$, la restrizione di *f* a $\left]0,e\right]$ è biunivoca su $\left]-\infty,1/e\right]$ e la restrizione di *f* a $\left[e,+\infty\right[$ è biunivoca su $\left[1/e,0\right[$.

OSSERVAZIONE. Essendo $f(-x)=\frac{1}{-x}\log|-x|=-\frac{1}{x}\log|x|=-f(x)$, la funzione f è dispari e quindi avremmo potuto tracciare il grafico G della restrizione di f a $]0,+\infty[$ e quindi completare il grafico di f aggiungendo a G la curva G' simmetrica di G rispetto all'origine.

4. Essendo g continua e derivabile in $[0,1]$, per completare le ipotesi del Teorema di Rolle, deve essere $g(0)=g(1)\Leftrightarrow \frac{1}{3}=k+2+\frac{1}{3}\Leftrightarrow k=\frac{1}{3}-2-\frac{1}{3}\Leftrightarrow k=-\frac{6}{3}$.

5. Essendo $p(x)=\log(x^2+2)$, del tipo $g'(x)f(x)$ si procede integrando per parte, quindi $\int g'(x)f(x)dx= f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$ per cui essendo $g(x)=x$ si ha

$$\int\log(x^2+2)dx = x\log(x^2+2)-2\int\frac{x^2}{x^2+2}dx = x\log(x^2+2)-2\int\frac{x^2+2-2}{x^2+2}dx =$$

$$= x\log(x^2+2)-2\left(\int\frac{x^2+2}{x^2+2}dx-2\int\frac{1}{x^2+2}dx\right)= x\log(x^2+2)-2x+2\sqrt{2}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx =$$

$= x\log(x^2+2)-2x+2\sqrt{2}arctg\,\frac{x}{\sqrt{2}}$. Pertanto l'equazione della tangente sulla primitiva, nel punto 1 è $y=P'(1)(x-1)+P(1)$, ovvero $y=\log 3(x-1)+\log 3-2+2\sqrt{2}arctg\,\frac{x}{\sqrt{2}}$.

6. Data la $f(x,y)=x^3-x^2y^2+x^2$ il suo gradiente $\nabla f(x,y)=[f_x(x,y),f_y(x,y)]=[3x^2-2xy^2+2x,-2x^2y]$. gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases}3x^2-2xy^2+2x=0\\ -2x^2y=0\end{cases}=\begin{cases}3x^2-2xy^2+2x=0\\ y=0\end{cases}$, e nella prima si ottiene $3x^2+2x=0\Leftrightarrow x(3x+2)=0$ le cui soluzioni sono $x=0$ e $x=-\frac{2}{3}$, quindi i due punti stazionari sono $(0,0)$ e $\left(-\frac{2}{3},0\right)$. per poterli classificare dobbiamo calcolare il determinante Hessiano, per cui $f_{xx}(x,y)=6x-2y^2+2$, $f_{yy}(x,y)=-2x^2$, $f_{xy}(x,y)=-4xy$ e $f_{yx}(x,y)=-4xy$, per cui $H|f(0,0)|=0$, pertanto per tale punto non possiamo dire nulla, mentre, $H\left|f\left(-\frac{2}{3},0\right)\right|=\frac{16}{9}$ in quanto $f_{xx}\left(-\frac{2}{3},0\right)=6\left(-\frac{2}{3}\right)+2=-2$, $f_{yy}\left(-\frac{2}{3},0\right)=-2\left(-\frac{2}{3}\right)^2=-\frac{8}{9}$ e $f_{xy}\left(-\frac{2}{3},0\right)=f_{yx}\left(-\frac{2}{3},0\right)=0$, conseguentemente il punto stazionario $\left(-\frac{2}{3},0\right)$ è di massimo ed il suo valore è $f\left(-\frac{2}{3},0\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)^3+\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{27}$

Traccia B

1. Calcolare il seguente $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2x^2-1}\right)$, e verificare che sia corretto.

2. Data la funzione $h: x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to\begin{cases}\frac{tgx}{x} & \text{se } x\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right[\\ 0 & \text{se } x=0\\ \frac{arcsenx}{senx} & \text{se } x\in\left]0,1\right[\\ 2x-\frac{\pi}{2} & \text{se } x\in\left[1,\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$, dire se esistono dei punti di discontinuità e classificarli.

3. Studiare la funzione $x\to f(x)=\log|x|/x^2$, e tracciarne approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione $g: x\in[0,1]\to hx^2+x-\frac{1}{3}$, dire, per quali valori del parametro h soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle.

5. Data la funzione $p(x)=\log\left(x^2+\sqrt{2}\right)$, calcolare, per parte, una primitiva *P*, e riportare l'equazione della tangente sulla primitiva *P*, nel punto 1.

6. Data la funzione $f(x,y)=x^3+x^2y^2-x^2$, determinare il suo gradiente, eventuali punti stazionari e classificarli. (A.A. 2016/2017)

Svolgimento - Traccia B

1. Essendo $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2x^2-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-|x|\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}\right)=$ $\lim_{x\to+\infty}|x|\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to+\infty}|x|\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to+\infty}|x|\left(1-\sqrt{2}\right)=-\infty$. Per cui si ha $|x|\left(1-\sqrt{2}\right)<-\varepsilon\Leftrightarrow-|x|\left(\sqrt{2}-1\right)<-\varepsilon\Leftrightarrow|x|\left(\sqrt{2}-1\right)>\varepsilon\Leftrightarrow x>\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}-1}$, in quanto stiamo facendo il limite per *x* che tende a più infinito, e posto $\delta=\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}-1}$, abbiamo individuato un intorno di più infinito.

2. Essendo $h: x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \begin{cases} \frac{tgx}{x} & \text{se } x \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[\\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{arcsenx}{senx} & \text{se } x \in \left]0,1\right[\\ 2x-\frac{\pi}{2} & \text{se } x \in \left[1,\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$, si osserva che $h(0)=0$, ed $\lim_{x\to 0^-}\frac{tgx}{x}=1$ così come $\lim_{x\to 0^+}\frac{arcsenx}{senx}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{arcsenx}{x}\frac{x}{senx}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{arcsenx}{x}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\frac{senx}{x}}=1$ per cui nel punto 0, la funzione ha un punto di discontinuità eliminabile. Mentre, essendo $h(1)=\frac{4-\pi}{2}$ ed essendo $\lim_{x\to 1^-}\frac{arcsenx}{senx}=\frac{\pi}{2sen1}$ ed $\lim_{x\to 1^+}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4-\pi}{2}$, la funzione ha nel punto 1, una discontinuità di prima specie.

3. Data la funzione: $x \to f(x)=\log|x|/x^2$.

   L'insieme di definizione della funzione *f* è: $\{x\in R, x\neq 0\}=R-\{0\}=\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$ e pertanto è:

$$f: x\in R-\{0\}\to\frac{1}{x^2}\log|x|=\begin{cases}\frac{1}{x^2}\log(-x) & \text{se } x\in\left]-\infty,0\right[\\ \frac{1}{x^2}\log x & \text{se } x\in\left]0,+\infty\right[\end{cases}$$

   e risultando:

$$f(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}\log|x|>0 \Leftrightarrow \log|x|>0=\log 1 \Leftrightarrow |x|>1 \Leftrightarrow x>1 \;\; e \;\; x<-1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$$
$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}\log|x|=0 \Leftrightarrow \log|x|=0=\log 1 \Leftrightarrow |x|=1 \Leftrightarrow x=-1 \text{ o } x=1$$
$$f(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[-\left(\left]-\infty,-1\right[\cup\left[1,+\infty\right[\right)=\left]-1,0\right[\cup\left]0,1\right[$$

   il grafico di *f* si trova al di sopra dell'asse delle *x* in $\left]-\infty,-1\right[$ ed in $\left]1,+\infty\right[$, si trova al di sotto dell'asse delle *x* in $\left]-1,0\right[$ ed in $\left]0,1\right[$, ha in comune con gli assi i punti $(-1,f(-1))=(-1,0)$ e $(1,f(1))=(1,0)$ ed essendo:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\log|x|}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2x^2}=0 \quad , \quad \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}\log|x|=(+\infty)(-\infty)=-\infty \quad ,$$
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)==\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\log|x|=(+\infty)(-\infty)=-\infty \text{ e } \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log|x|}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0$$

   il grafico di *f* ha due asintoti: la retta di equazione $y=0$ asintoto orizzontale a sinistra e a destra e la retta di equazione $x=0$ asintoto verticale a sinistra e a destra.

   Essendo:

$$f'(x)=D\frac{\log|x|}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}x^2-2x\log|x|}{x^4}=\frac{1-2\log|x|}{x^3} \quad \text{se } x\in R-\{0\}$$

   è:

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1-2\log|x|}{x^3}>0 \Leftrightarrow (1-2\log|x|>0 \text{ e } x>0) \text{ o } (1-2\log|x|<0 \text{ e } x<0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\log|x|<\frac{1}{2}=\log e^{\frac{1}{2}} \text{ e } x>0\right) \text{o} \left(\log|x|>-\frac{1}{2}=-\log e^{\frac{1}{2}} \text{ e } x<0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(|x|<e^{\frac{1}{2}} \text{ e } x>0\right) \text{ o } \left(|x|>-e^{\frac{1}{2}} \text{ e } x<0\right) \Leftrightarrow x\in \left]-\infty,-\sqrt{e}\right[\cup\left]0,\sqrt{e}\right[$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-2\log|x|}{x^3}=0 \Leftrightarrow 1-2\log|x|=0 \Leftrightarrow \log|x|=\frac{1}{2}=\log e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow |x|=e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x=-\sqrt{e} \quad \text{o} \quad x=\sqrt{e}$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in \left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[-\left(\left]-\infty,-\sqrt{e}\right]\cup\left]0,\sqrt{e}\right]\right)=\left]-\sqrt{e},0\right[\cup\left]\sqrt{e},+\infty\right[$$

quindi f è strettamente crescente in $\left]-\infty,-\sqrt{e}\right[$ ed in $\left]0,\sqrt{e}\right[$, è strettamente decrescente in $\left]-\sqrt{e},0\right[$ ed in $\left]\sqrt{e},+\infty\right[$, ha in $-\sqrt{e}$ un punto di massimo relativo proprio ed in $\sqrt{e}$ un punto di massimo relativo proprio ed essendo $f\left(-\sqrt{e}\right)=1/2e$ ed $f\left(\sqrt{e}\right)=1/2e$ il grafico di f passa per i punti $\left(-\sqrt{e},1/2e\right)$ ed $\left(\sqrt{e},1/2e\right)$. Quindi i punti trovati risultano di massimo assoluti.
Risultando infine:

$$f''(x)=D\frac{1-2\log|x|}{x^3}=\frac{-\frac{2}{x}x^3-3x^2+6x^2\log|x|}{x^6}=\frac{6\log|x|-5}{x^4} \quad \forall x\in R-\{0\}$$

è:

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow \frac{6\log|x|-5}{x^4}>0 \Leftrightarrow 6\log|x|-5>0 \Leftrightarrow \log|x|>\frac{5}{6} \Leftrightarrow |x|>e^{\frac{5}{6}} \Leftrightarrow$$

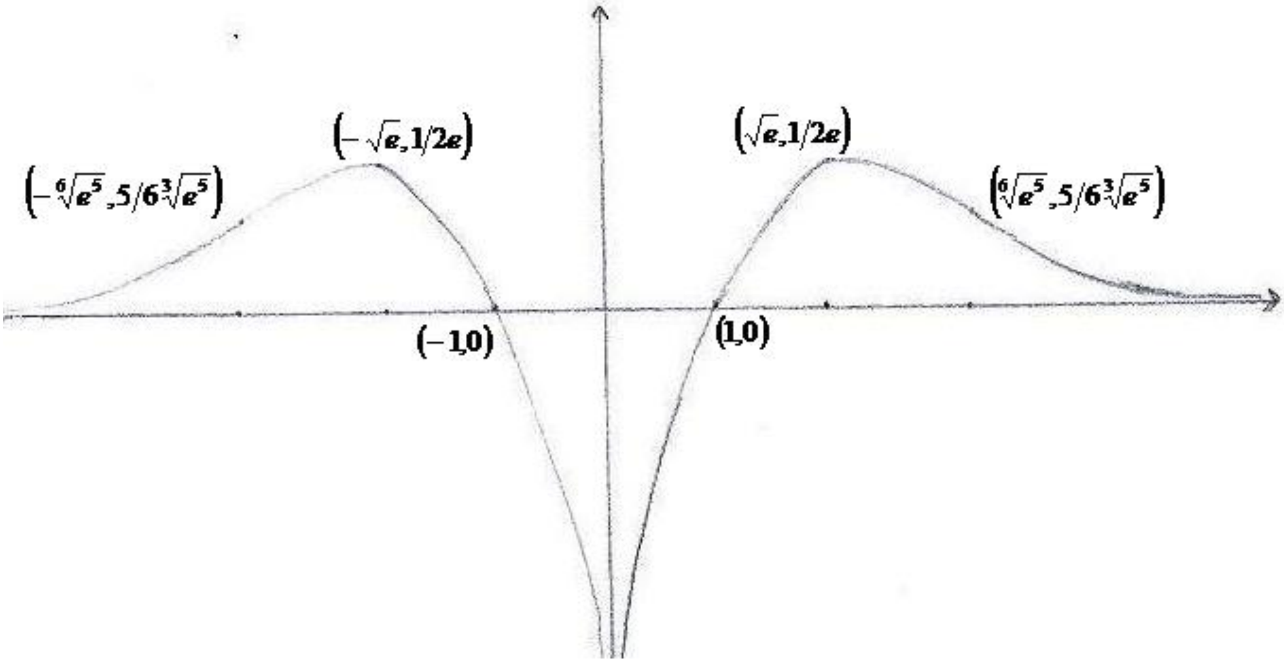
$$\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-\sqrt[6]{e^5}\right[\cup\left]\sqrt[6]{e^5},+\infty\right[$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{6\log|x|-5}{x^4}=0 \Leftrightarrow 6\log|x|-5=0 \Leftrightarrow \log|x|=5/6=\log\sqrt[6]{e^5} \Leftrightarrow |x|=\sqrt[6]{e^5} \Leftrightarrow x=-\sqrt[6]{e^5} \quad \text{o}$$

$$x=\sqrt[6]{e^5}$$

$$f''(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[-\left(\left]-\infty,-\sqrt[6]{e^5}\right]\cup\left[\sqrt[6]{e^5},+\infty\right[\right)=\left]-\sqrt[6]{e^5},0\right[\cup\left]0,\sqrt[6]{e^5}\right[$$

e pertanto f è strettamente convessa in $\left]-\infty,-\sqrt[6]{e^5}\right[$ ed in $\left]\sqrt[6]{e^5},+\infty\right[$, è strettamente concava in $\left]-\sqrt[6]{e^5},0\right[$ ed in $\left]0,\sqrt[6]{e^5}\right[$, ed ha due punti di flesso proprio in $-\sqrt[6]{e^5}$ ed in $\sqrt[6]{e^5}$ ed essendo $f\left(-\sqrt[6]{e^5}\right)=5/6\sqrt[3]{e^5}$ ed $f\left(\sqrt[6]{e^5}\right)=5/6\sqrt[3]{e^5}$ il grafico di f passa per i punti $\left(-\sqrt[6]{e^5},5/6\sqrt[3]{e^5}\right)$ e $\left(\sqrt[6]{e^5},5/6\sqrt[3]{e^5}\right)$.
Siamo ora in grado di tracciare il grafico di f:



e quindi dedurre che:

$f\left(R-\{0\}\right)= f\left(\left]-\infty,0\right[\right)\cup f\left(\left]0,+\infty\right[\right)=\left]-\infty,5/6\sqrt[3]{e^5}\right]$, $f\left(\left]-\infty,-\sqrt{e}\right]\right)=\left]0,1/2e\right]$, $f\left(\left[-\sqrt{e},0\right[\cup\left]0,\sqrt{e}\right]\right)=\left]-\infty,1/2e\right]$, $f\left(\left[\sqrt{e},+\infty\right[\right)=\left]0,1/2e\right]$, *f* non è biunivoca, la restrizione di *f* a $\left]-\infty,-\sqrt{e}\right]$ è biunivoca su $\left]0,1/2e\right]$, la restrizione di *f* a $\left[-\sqrt{e},0\right[$ è biunivoca su $\left]-\infty,1/2e\right]$, così come la restrizione di *f* a $\left]0,\sqrt{e}\right]$ è biunivoca su $\left]-\infty,1/2e\right]$ e la restrizione di *f* a $\left[\sqrt{e},+\infty\right[$ è biunivoca su $\left]0,1/2e\right]$.

OSSERVAZIONE. Essendo $f(-x)=\frac{1}{(-x)^2}\log|-x|=\frac{1}{x^2}\log|x|=f(x)$, la funzione *f* è pari e quindi avremmo potuto tracciare il grafico *G* della restrizione di *f* a $\left]0,+\infty\right[$ e quindi completare il grafico di *f* aggiungendo a *G* la curva G' simmetrica di *G* rispetto alla retta $x=0$.

4. Essendo *g* continua e derivabile in $[0,1]$, per completare le ipotesi del Teorema di Rolle, deve essere
$$g(0)=g(1)\Leftrightarrow -\frac{1}{3}=h+1-\frac{1}{3}\Leftrightarrow h=-\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}\Leftrightarrow h=-\frac{3}{3}.$$

5. Essendo $p(x)=\log\left(x^2+\sqrt{2}\right)$, del tipo $g'(x)f(x)$ si procede integrando per parte, quindi $\int g'(x)f(x)dx= f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$ per cui essendo $g(x)=x$ si ha
$$\int\log\left(x^2+\sqrt{2}\right)dx=x\log\left(x^2+\sqrt{2}\right)-2\int\frac{x^2}{x^2+\sqrt{2}}dx=x\log\left(x^2+\sqrt{2}\right)-2\int\frac{x^2+\sqrt{2}-\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}}dx=$$
$$=x\log\left(x^2+\sqrt{2}\right)-2\int\frac{x^2+\sqrt{2}-\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}}dx=x\log\left(x^2+\sqrt{2}\right)-2\left(\int\frac{x^2+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}}dx-\sqrt{2}\int\frac{1}{x^2+\sqrt{2}}dx\right)=$$
$$=x\log\left(x^2+\sqrt{2}\right)-2x+2\sqrt{2}\int\frac{1}{x^2+\sqrt{2}}dx=x\log\left(x^2+\sqrt{2}\right)-2x+2\sqrt[4]{2}\int\frac{\frac{1}{\sqrt[4]{2}}}{\left(\frac{x}{\sqrt[4]{2}}\right)^2+1}dx=$$

$= x\log\left(x^2+\sqrt{2}\right)-2x+2\sqrt[4]{2}arctg\frac{x}{\sqrt[4]{2}}$. Pertanto l'equazione della tangente sulla primitiva, nel punto 1 è $y=P'(1)(x-1)+P(1)$, ovvero $y=\log\left(1+\sqrt{2}\right)(x-1)+\log\left(1+\sqrt{2}\right)-2+2\sqrt[4]{2}arctg\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

6. Data la $f(x,y)=x^3+x^2y^2-x^2$ il suo gradiente $\nabla f(x,y)=\left[f_x(x,y),f_y(x,y)\right]=\left[3x^2+2xy^2-2x,2x^2y\right]$. gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases}3x^2+2xy^2-2x=0\\2x^2y=0\end{cases}=\begin{cases}3x^2+2xy^2-2x=0\\y=0\end{cases}$, e nella prima si ottiene $3x^2-2x=0\Leftrightarrow x(3x-2)=0$ le cui soluzioni sono $x=0$ e $x=\frac{2}{3}$, quindi i due punti stazionari sono $(0,0)$ e $\left(\frac{2}{3},0\right)$. per poterli classificare dobbiamo calcolare il determinante Hessiano, per cui $f_{xx}(x,y)=6x+2y^2-2$, $f_{yy}(x,y)=2x^2$, $f_{xy}(x,y)=4xy$ e $f_{yx}(x,y)=4xy$, per cui $H\left|f(0,0)\right|=0$, pertanto per tale punto non possiamo dire nulla, mentre, $H\left|f\left(\frac{2}{3},0\right)\right|=\frac{16}{9}$ in quanto $f_{xx}\left(\frac{2}{3},0\right)=6\left(\frac{2}{3}\right)-2=2$, $f_{yy}\left(\frac{2}{3},0\right)=2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$ e $f_{xy}\left(\frac{2}{3},0\right)=f_{yx}\left(\frac{2}{3},0\right)=0$, conseguentemente il punto stazionario $\left(\frac{2}{3},0\right)$ è di minimo ed il suo valore è $f\left(\frac{2}{3},0\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^3-\left(\frac{2}{3}\right)^2=-\frac{4}{27}$.