Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
15 aprile 2019
(prof. Bisceglia)

Traccia F

1. Trovare, *se possibile* un punto di *approssimazione* con un errore $\varepsilon \le 8^{-1}$ dell'equazione $arctg(x+1)=0$, nell'intervallo $\left[-\frac{5}{3},0\right]$.

2. Calcolare, *se possibile*, il seguente limite: $\lim_{x\to-\infty} arc\cot g \frac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x+1)}}$.

3. *Studiare* la funzione $x \to f(x) = arctg\frac{2}{x-1}$, e tracciarne *approssimativamente* il grafico.

4. Data la funzione $g(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{se } x \ge 0 \\ \arccos\frac{1}{1-x} & \text{se } x<0\end{cases}$ individuare *eventuali* punti di discontinuità, e *classificarli*.

5. Calcolare l'area sottostante la funzione $p(x)=\frac{x^2}{x^2+3}$, nell'intervallo $\left[0,\sqrt{3}\right]$.

6. Data la funzione costi, $g(x,y,z)=4x^2-2xy+2y^2+3x+7y-2z$, nel rispetto di una *produzione limitata* a $x-y+z=100$; determinare la combinazione dei tre prodotti con *costo minimo*.

Svolgimento traccia F

1. Data la funzione $arctg(x+1)=0$, funzione continua, definita in un intervallo chiuso e limitato, ed osservando che $f(-1)=0$, ed $-1\in\left]-\frac{5}{3},0\right[$, ed essendo strettamente crescente, risulterà $f(0)\cdot f\left(-\frac{5}{3}\right)<0$, ricorrono quindi tutte le ipotesi del teorema degli zeri, pertanto $\exists x_0 \in \left]-\frac{5}{3},0\right[\ / \ f(x_0)=0$. Per cui sapendo che $|x_0-c_n|<c_n-a_n=\frac{b-a}{2^{n+1}}\le 8^{-1}$, si ha $\frac{b-a}{2^{n+1}}\le 8^{-1} \Leftrightarrow \frac{b-a}{8^{-1}}\le 2^{n+1} \Leftrightarrow n \ge \frac{\log(b-a)8}{\log 2}-1$ quindi $n \ge \frac{\log\left(\left(\frac{5}{3}\right)8\right)}{\log 2}-1=2.74$ quindi, ponendo $n=3$ si trova il punto di approssimazione con un errore $\in\le 8^{-1}$. Per semplificare i calcoli, sfruttiamo la stretta crescenza della funzione, e che si annulla per $x=-1$.

N	A_n	c_n	b_n	$f(a_n)$	$f(c_n)$	$f(b_n)$
0	-5/3	-5/6	0	—	+	+
1	-5/3	-15/12	-5/6	—	—	+

2	-15/12	-25/24	-5/6	—	—	+
3	-25/24	-45/48	-5/6	—	+	+

che risulta essere $c_4 = -\dfrac{45}{48}$, in quanto $\left|\dfrac{45}{48}-\dfrac{25}{24}\right| \le \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \dfrac{5}{48} \le \dfrac{1}{8}$.

2. Essendo $\lim\limits_{x\to-\infty} arc\cot g \dfrac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x+1)}}$ il limite di una funzione composta, e ricordando cha la funzione arcocotangente è definita $\forall x \in R$, e la funzione logaritmo per $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$ ed inoltre $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) \ne 0 \Leftrightarrow x \ne 0$, ed infine per la funzione radice risulta $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > 0 = \log_{\frac{1}{2}} 1 \Leftrightarrow x+1<1 \Leftrightarrow x<0$ pertanto il dominio risulta $\forall x \in R \cap \left]-1,+\infty\right[- \{0\} \cap \left]-\infty,0\right[\Leftrightarrow \forall x \in \left]-1,0\right[$ pertanto non è possibile effettuare tale limite in quanto il dominio è limitato inferiormente.

3. *Data la seguente funzione*: $x \to f(x) = arctg \dfrac{2}{x-1}$.

   I. *Dominio*:

   l'insieme dei valori della funzione *f* è incluso in $arctg(R) = \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, quindi *f* è limitata e pertanto il grafico di *f* può avere solo asintoti orizzontali. Ricordando che la funzione arcotangente è definita in *R*, l'insieme di definizione di *f* coincide con l'insieme di definizione di $x \to 2/(x-1)$ e quindi l'insieme di definizione di *f* è: $\{x \in R, x-1 \ne 0\}$ ed essendo $x-1 \ne 0 \Leftrightarrow 1 \ne x \Leftrightarrow x \in R - \{1\} = \left]-\infty,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$ è: $f: x \in \left]-\infty,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[\to arctg \dfrac{2}{x-1}$

   II. *Segno*:

   risultando $f(x) > 0 \Leftrightarrow arctg \dfrac{2}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x \in \left]1,+\infty\right[$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow arctg \dfrac{2}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{x-1} < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,1\right[$ ed inoltre $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$ il grafico di *f* si trova al di sotto dell'asse delle *x* in $\left]-\infty,1\right[$ ed al di sopra dell'asse delle *x* in $\left]1,+\infty\right[$, ha in comune con gli assi il punto $(0, f(0)) = (0, arctg\,-2)$

   III. *Asintoti*:
   essendo

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} arctg \dfrac{2}{x-1} = arctg 0 = 0$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} arctg \dfrac{2}{x-1} = \lim\limits_{y\to-\infty} arctg y = -\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} arctg \dfrac{2}{x-1} = \lim\limits_{y\to+\infty} arctg y = \dfrac{\pi}{2}$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} arctg \dfrac{2}{x-1} = arctg 0 = 0$

   il grafico di *f* ha un solo asintoto: la retta di equazione $y=0$ asintoto orizzontale a sinistra e a destra.

IV. *Monotonia*: Essendo:

$$f'(x) = D arctg \frac{2}{x-1} = \frac{1}{1+\frac{4}{(x-1)^2}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{-2}{x^2-2x+5} \quad \text{se } x \in \left]-\infty,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$$

e

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-2}{x^2-2x+5} > 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2}{x^2-2x+5} = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$ ed inoltre essendo il denominatore sempre positivo risulta $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$ quindi f è strettamente decrescente in $\left]-\infty,1\right[$ ed in $\left]1,+\infty\right[$.

V. *Convessità*:

Risultando infine:

$$f''(x) = D\frac{-2}{x^2-2x+5} = \frac{4(x-1)}{(x^2-2x+5)^2} \quad \text{se } x \in \left]-\infty,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$$

è:

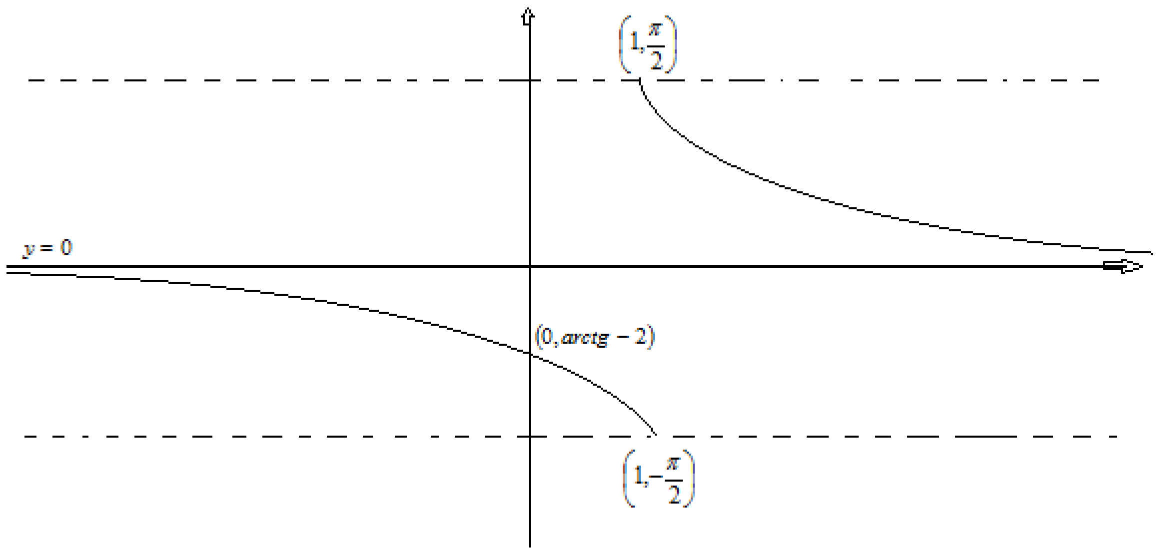
$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in R - \{1\}$ e $\frac{4(x-1)}{(x^2-2x+5)^2} > 0 \Leftrightarrow x \in R - \{1\}$ e $x > 1 \Leftrightarrow x \in \left]1,+\infty\right[$,

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \in R - \{1\}$ e $\frac{4(x-1)}{(x^2-2x+5)^2} = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$,

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[- \left]1,+\infty\right[= \left]-\infty,1\right[$ e pertanto la funzione f è strettamente convessa in $\left]1,+\infty\right[$ e strettamente concava in $\left]-\infty,1\right[$.

VI. *Punti di flesso*: anche se $\exists$ un intorno sinistro di 1 in cui la funzione è strettamente concava ed $\exists$ un intorno destro di 1 in cui la funzione è strettamente convessa, non essendo definita nel punto 1, non esistono punti di flesso.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:



e quindi dedurre che:

$f\left(\left]-\infty,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[\right) = \left]-\pi/2,0\right[\cup \left]0,\pi/2\right[$, $f\left(\left]-\infty,1\right[\right) = \left]-\pi/2,0\right[$, $f\left(\left]1,+\infty\right[\right) = \left]0,\pi/2\right[$, f è biunivoca su $\left]-\pi/2,0\right[\cup \left]0,\pi/2\right[$, $\inf_{x \in R-\{1\}} f(x) = -\pi/2$ e $\sup_{x \in R-\{1\}} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

OSSERVAZIONE. È facile rendersi conto che *f* è $(1,0)$-simmetrica, quindi avremmo potuto limitarci a tracciare il grafico *G* della restrizione di *f* a $]1,+\infty[$ e completare il grafico di *f* unendo a *G* la curva G' simmetrica di *G* rispetto al punto $(1,0)$.

4. Data la seguente funzione $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & \text{se } x\geq 0\\ \arccos\dfrac{1}{1-x} & \text{se } x<0\end{cases}$, definita $\dfrac{1}{1-x}\in[-1,1]$ ovvero $-1\leq\dfrac{1}{1-x}\leq 1$; per cui $\dfrac{1}{1-x}\geq -1 \Leftrightarrow \dfrac{2-x}{1-x}\geq 0 \Leftrightarrow \forall x\in(]-\infty,1[\cup[2,+\infty[)$ ed $\dfrac{1}{1-x}\leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{1-x}\leq 0 \Leftrightarrow \forall x\in(]-\infty,0]\cup]1,+\infty[)$, quindi la funzione arcoseno è definita $\forall x\in(]-\infty,0]\cup[2,+\infty[)$, ed osservando che $g(0)=\dfrac{\pi}{2}$, il $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\dfrac{\pi}{2}$ ed il $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\arccos\dfrac{1}{1-x}=0$, il punto 0 per la funzione data, è un punto discontinuità di *prima specie*.

5. Data la funzione $p(x)=\dfrac{x^2}{x^2+3}$, per calcolare l'area del rettangoloide della stessa, dobbiamo trovare le sue primitive, quindi $\int\dfrac{x^2}{x^2+3}dx=\int\dfrac{x^2+3-3}{3+x^2}dx=\int dx-\int\dfrac{3}{3+x^2}dx$, ed osservando che il secondo integrale può essere ricondotto $\sqrt{3}\int\dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}dx$, quindi $\int\dfrac{x^2}{x^2+3}dx=x-\sqrt{3}arctg\dfrac{x}{\sqrt{3}}+c$, per cui l'area cercata sarà $\left[x-\sqrt{3}arctg\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right]_0^{\sqrt{3}}=\sqrt{3}-\sqrt{3}arctg1=\sqrt{3}\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

6. Data la $g(x,y,z)=4x^2-2xy+2y^2+3x+7y-2z$ essendoci il vincolo $x-y+z=100$, possiamo esprimerla in funzione di due variabili, ponendo $x-y+z=100\Leftrightarrow z=100-x+y$ e sfruttando la funzione $h(x,y)$ per cui la funzione data diventa $g(x,y,h(x,y))=\delta(x,y)=4x^2-2xy+2y^2+3x+7y-2(100-x+y)$, ovvero $\delta(x,y)=4x^2-2xy+2y^2+5x+5y-200$ il cui gradiente è $\nabla\delta(x,y)=(\delta'_x=8x-2y+5,\delta'_y=4y-2x+5)$, gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases}8x-2y+5=0\\4y-2x+5=0\end{cases}=\begin{cases}y=4x+\dfrac{5}{2}\\16x+10-2x+5=0\end{cases}=\begin{cases}y=-\dfrac{25}{14}\\x=-\dfrac{15}{14}\end{cases}$ e quindi il punto stazionario è $\left(-\dfrac{15}{14},-\dfrac{25}{14}\right)$ e se osserviamo l'Hessiano, per cui $\delta''_{xx}=8$, $\delta''_{yy}=4$, $\delta''_{xy}=-2$

e $\delta''_{yx} = -2$, per cui $H_\delta(x,y) = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 32 - 4 = 28$, quindi la natura del punto $\left(-\frac{15}{14}, -\frac{25}{14}\right)$ e di minimo, che nel vincolo forniscono $z = 100 + \frac{15}{14} - \frac{25}{14} = \frac{1390}{14}$ e danno un costo complessivo $g(x,y,z) = 4\left(-\frac{15}{14}\right)^2 - 2\left(-\frac{15}{14}\right)\left(-\frac{25}{14}\right) + 2\left(-\frac{25}{14}\right)^2 + 3\left(-\frac{15}{14}\right) + 7\left(-\frac{25}{14}\right) - 2\left(\frac{1390}{14}\right) = -207{,}14$
.