Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale – 14 dicembre 2015 - (prof. Bisceglia)

traccia A

1. Calcolare l'insieme delle primitive della seguente funzione:

$$p(x)=\frac{2x+1}{x^2+2x+1}-arcsen\sqrt{x}$$

2. Dopo aver verificato se è possibile, calcolare, il seguente limite:

$$\lim_{x\to-\infty} = \left(3x^2-x\right)\log_{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{5x+1}\right)$$

3. Disegnare approssimativamente il grafico della seguente funzione:

$$f(x)=arctg\,\frac{2x}{1-x^2}$$

4. Data la funzione:

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{arcsen\log(1-3x)}{sen\left(e^x-1\right)} & se\ x\neq 0\\ 1 & se\ x=0\end{cases}$$

   Determinare l'insieme di definizione e studiare l'eventuale esistenza di punti di discontinuità e nel caso affermativo stabilire la specie.

5. Determinare gli eventuali minimi e massimi relativi, ed assoluti, della seguente funzione e scrivere inoltre, le equazioni degli eventuali asintoti:

$$g(x)=\frac{x^2-1}{4x+5}$$

N.B. 1) Non si possono usare, pena l'annullamento della prova: calcolatrici, cellulari ed appunti vari. 2) Non si accettano elaborati scritti a matita. 3) Va consegnato solo il foglio di bella e la traccia compilata nel riquadro.

Cognome	Nome	Matricola	Firma

Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale – 14 dicembre 2015 - (prof. Bisceglia)

traccia B

1. Calcolare l'insieme delle primitive della seguente funzione:

$$p(x) = \frac{2x-1}{x^2+2x+1} + \arccos\sqrt{x}$$

2. Dopo aver verificato se è possibile, calcolare, il seguente limite:

$$\lim_{x\to-\infty} = \left(5x^2+1\right)\log_3\left(1+\frac{1}{3x-1}\right)$$

3. Disegnare approssimativamente il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = arc\cot g\,\frac{2x}{1-x^2}$$

4. Data la funzione:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{arctg\,\log(1-2x)}{sen\left(e^x-1\right)} & se\ x \neq 0 \\ 2 & se\ x = 0 \end{cases}$$

   Determinare l'insieme di definizione e studiare l'eventuale esistenza di punti di discontinuità e nel caso affermativo stabilire la specie.

5. Determinare gli eventuali minimi e massimi relativi, ed assoluti, della seguente funzione e scrivere inoltre, le equazioni degli eventuali asintoti:

$$g(x) = \frac{x^2-1}{4x+5}$$

N.B. 1) Non si possono usare, pena l'annullamento della prova: calcolatrici, cellulari ed appunti vari. 2) Non si accettano elaborati scritti a matita. 3) Va consegnato solo il foglio di bella e la traccia compilata nel riquadro.

Cognome	Nome	Matricola	Firma

Svolgimento prova scritta del 14 dicembre 2015 traccia A

1. L'insieme delle primitive della seguente funzione è dato da:

$\int\left(\frac{2x+1}{x^2+2x+1}-arcsen\sqrt{x}\right)dx=\int\frac{2x+1}{x^2+2x+1}dx-\int arcsen\sqrt{x}dx$, per cui il primo integrale è: $\int\frac{2x+1}{x^2+2x+1}dx=\int\frac{2x+2}{x^2+2x+1}dx-\int\frac{1}{x^2+2x+1}dx=\log\left|x^2+2x+1\right|+\frac{1}{x+1}$, mentre il secondo, integrando per parti, e ponendo $f(x)=arcsen\sqrt{x}$, con $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$ e $g'(x)=1$ con $g(x)=x$, si ha: $\int arcsen\sqrt{x}dx=xarcsen\sqrt{x}-\frac{1}{2}\int\frac{x}{\sqrt{x-x^2}}dx$, si osserva che per questo ultimo integrale $\int\frac{x}{\sqrt{x-x^2}}dx$ se consideriamo la funzione integranda $\frac{x}{\sqrt{x-x^2}}=\frac{-2x+1-1}{-2\sqrt{x-x^2}}=\frac{1-2x}{-2\sqrt{x-x^2}}+\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$, quindi $\int\frac{x}{\sqrt{x-x^2}}dx=-\int\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}dx+\int\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}dx$, si osserva che $D\sqrt{x-x^2}=\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}$, pertanto in definitiva si ha che l'insieme delle primitive dell'integrale assegnato, risulta: $\log\left|x^2+2x+1\right|+\frac{1}{x+1}-xarcsen\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}+\frac{1}{2}arcsen\sqrt{x}+c$

2. Essendo l'insieme di definizione non limitato inferiormente, in quanto $1+\frac{1}{5x+1}>0$ $\forall x\in\left]-\infty,-\frac{2}{5}\right[\cup\left]-\frac{1}{5},+\infty\right[$, è possibile calcolare il limite, quindi si ha:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3x^2-x\right)\log_{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{5x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(3x^2-x\right)\frac{\log_{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{5x+1}\right)}{\frac{1}{5x+1}}\frac{1}{5x+1}=\log_{\frac{1}{2}}e\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-x}{5x+1}=$$

$$=\log_{\frac{1}{2}}e\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(3-1/x)}{x(5+1/x)}=\log_{\frac{1}{2}}e\cdot(-\infty)\cdot\frac{3}{5}=+\infty$$

3. Data la funzione $f(x)=arctg\,\frac{2x}{1-x^2}$

L'insieme dei valori della funzione *f* è incluso in $arctg(R)=\left]-\pi/2,\pi/2\right[$, quindi *f* è limitata e pertanto il grafico di *f* può avere solo asintoti orizzontali.

Ricordando che la funzione arcotangente è definita in *R*, l'insieme di definizione di *f* coincide con l'insieme di definizione di $x \to \dfrac{2x}{1-x^2}$ e quindi $f : x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]-1,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[\to arctg\,\dfrac{2x}{1-x^2}$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow arctg\,\frac{2x}{1-x^2} > 0 = arctgtg\,0 \Leftrightarrow x \neq -1 \text{ e } x \neq 1 \text{ e } \frac{2x}{1-x^2} > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]0,1\right[$$
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow arctg\,\frac{2x}{1-x^2} = 0 = arctgtg\,0 = arctg\,0 \Leftrightarrow x \neq -1 \text{ e } x \neq 1 \text{ e } \frac{2x}{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]-1,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[- \left]-\infty,-1\right[\cup \left[0,1\right[= \left]-1,0\right[\cup \left]1,+\infty\right[$$

il grafico, ha in comune con gli assi il punto $(0,0)$ ed essendo:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} arctg\,\frac{2x}{1-x^2} = \lim_{x\to-\infty} arctg\,\frac{2x}{x^2\left(1/x^2-1\right)} = arctg\,0 = 0,$$
$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} arctg\,\frac{2x}{1-x^2} = \lim_{y\to+\infty} arctgy = \pi/2,$$
$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} arctg\,\frac{2x}{1-x^2} = \lim_{y\to-\infty} arctgy = -\pi/2,$$
$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} arctg\,\frac{2x}{1-x^2} = \lim_{y\to+\infty} arctgy = \pi/2,\ \lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} arctg\,\frac{2x}{1-x^2} = \lim_{y\to-\infty} arctgy = -\pi/2$$
e $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} arctg\,\frac{2x}{1-x^2} = \lim_{x\to+\infty} arctg\,\frac{2x}{x^2\left(1/x^2-1\right)} = arctg\,0 = 0$$

il grafico di *f* ha un asintoto: la retta di equazione $y = 0$ asintoto orizzontale a sinistra e a destra.

Essendo:

$$f'(x) = Darctg\,\frac{2x}{1-x^2} = \frac{1}{1+\dfrac{4x^2}{\left(1-x^2\right)^2}} \cdot 2\frac{1-x^2+2x^2}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{2}{1+x^2} \text{ se } x \in R - \{-1,1\}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]-1,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[,\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$$

quindi *f* è strettamente crescente nel suo dominio

Risultando infine:

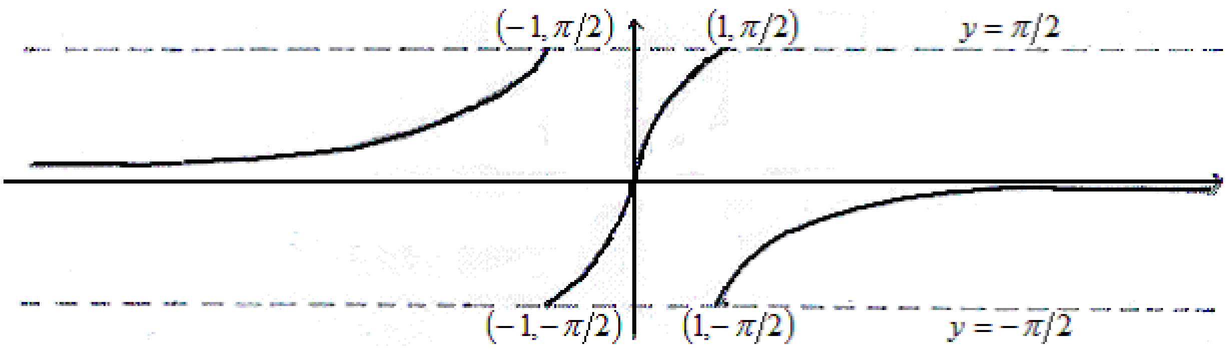
$$f''(x) = D\frac{2}{1+x^2} = \frac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2} \text{ se } x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]-1,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$$
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \text{ e } x \neq 1 \text{ e } \frac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2} > 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \text{ e } x \neq 1 \text{ e } x < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]-1,0\right[$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \text{ e } x \neq 1 \text{ e } \frac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2} = 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \text{ e } x \neq 1 \text{ e } x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]-1,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[- \left]-\infty,-1\right[\cup \left]-1,0\right] = \left]0,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$$

e pertanto *f* è strettamente convessa in $]-\infty,-1[$ ed in $]-1,0[$, è strettamente concava in $]0,1[$ ed in $]1,+\infty[$ e zero è un punto di flesso proprio per *f*.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:



e quindi dedurre che:

$f(]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[)=]-\pi/2,\pi/2[$,

OSSERVAZIONE. È immediato far vedere che *f* è una funzione dispari, quindi avremmo potuto limitarci a tracciare il grafico *G* della restrizione di *f* a $[0,1[\cup]1,+\infty[$ ed ottenere il grafico di *f* unendo a *G* la curva G' simmetrica di *G* rispetto al punto $(0,0)$.

4. Data la funzione:

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{arcsen\log(1-3x)}{sen(e^x-1)} & se\ x\neq 0\\ 1 & se\ x=0\end{cases}$$

Il suo dominio è dato da $sen(e^x-1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$ e $\log e^{-1}=-1\leq\log(1-3x)\leq 1=\log e$, pertanto $e^{-1}-1\leq -3x\leq e-1 \Leftrightarrow \dfrac{e-1}{3}\leq x\leq\dfrac{1-e^{-1}}{3}-\{0\}$ e risultando $f(0)=1$, mentre

$$\lim_{x\to 0}\frac{arcsen\log(1-3x)}{sen(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{arcsen\log(1-3x)}{\log(1-3x)}\frac{\log(1-3x)}{-3x}(-3x)\frac{1}{\dfrac{sen(e^x-1)}{e^x-1}\dfrac{e^x-1}{x}x}=-3\neq 1=f(0)$$ la

funzione ha in zero un punto di discontinuità eliminabile.

5. La funzione assegnata e definita $\forall x \in R-\left\{-\frac{5}{4}\right\}$ ed essendo

$$f'(x)=D\frac{x^2-1}{4x+5}=\frac{2x(4x+5)-4(x^2-1)}{(4x+5)^2}=\frac{8x^2+10x-4x^2+4}{(4x+5)^2}=\frac{4x^2+10x+4}{(4x+5)^2} \text{ se } x\in R-\left\{-\frac{5}{4}\right\}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{4x^2+10x+4}{(4x+5)^2}=0$$

per cui $4x^2+10x+4=0 \Leftrightarrow x=\left\{-\frac{1}{2},-2\right\}$, inoltre $f'(x)>0 \Leftrightarrow 4x^2+10x+4>0$, ovvero $\forall x\in \left]-\infty,-2\right[\cup\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ quindi strettamente crescente, mentre risulta strettamente decrescente $\forall x\in\left]-2,-\frac{1}{2}\right[-\left\{-\frac{5}{4}\right\}$, pertanto il punto -2 risulta un punto di massimo relativo ed il massimo è $f(-2)=-1$, mentre il punto $-\frac{1}{2}$ risulta un punto di minimo relativo con valore $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$.

Inoltre essendo $\lim_{x\to-\frac{5}{4}^-}\frac{x^2-1}{4x+5}=\frac{9}{16}\lim_{x\to-\frac{5}{4}^-}\frac{1}{4x+5}=-\infty$ ed $\lim_{x\to-\frac{5}{4}^+}\frac{x^2-1}{4x+5}=\frac{9}{16}\lim_{x\to-\frac{5}{4}^+}\frac{1}{4x+5}=+\infty$, pertanto la retta $x=-\frac{5}{4}$ è un asintoto verticale sia a destra che a sinistra.

Ed essendo $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{4x+5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}=\frac{1}{4}(-\infty)=-\infty$, conseguentemente $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{4}$ ed

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{4x+5}-\frac{1}{4}x=-\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{5}{4}x+1}{4x+5}=-\frac{5}{16}.$$

Cosi come $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{4x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}=\frac{1}{4}(+\infty)=+\infty$ e $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{4}$ ed ancora

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{4x+5}-\frac{1}{4}x=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5}{4}x+1}{4x+5}=-\frac{5}{16}$, per cui la retta $y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{16}$ è l'equazione dell'asintoto obliquo sia a destra che a sinistra.

Svolgimento prova scritta del 14 dicembre 2015 traccia B

1. L'insieme delle primitive della seguente funzione è dato da:

$\int\left(\frac{2x-1}{x^2+2x+1}+\arccos\sqrt{x}\right)dx=\int\frac{2x-1}{x^2+2x+1}dx+\int\arccos\sqrt{x}dx$, per cui il primo integrale è: $\int\frac{2x-1}{x^2+2x+1}dx=\int\frac{2x+2}{x^2+2x+1}dx-3\int\frac{1}{x^2+2x+1}dx=\log\left|x^2+2x+1\right|+\frac{3}{x+1}$, mentre il secondo, integrando per parti, e ponendo $f(x)=\arccos\sqrt{x}$, con $f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$ e $g'(x)=1$ con $g(x)=x$, si ha: $\int\arccos\sqrt{x}dx=x\arccos\sqrt{x}+\frac{1}{2}\int\frac{x}{\sqrt{x-x^2}}dx$, si osserva che per questo ultimo integrale $\int\frac{x}{\sqrt{x-x^2}}dx$ se consideriamo la funzione integranda $\frac{x}{\sqrt{x-x^2}}=\frac{-2x+1-1}{-2\sqrt{x-x^2}}=\frac{1-2x}{-2\sqrt{x-x^2}}+\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$, quindi $\int\frac{x}{\sqrt{x-x^2}}dx=-\int\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}dx-\int\frac{-1}{2\sqrt{x-x^2}}dx$, si osserva che $D\sqrt{x-x^2}=\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}$, pertanto in definitiva si ha che l'insieme delle primitive dell'integrale assegnato, risulta: $\log\left|x^2+2x+1\right|+\frac{3}{x+1}+x\arccos\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}-\frac{1}{2}\arccos\sqrt{x}+c$

2. Essendo l'insieme di definizione non limitato inferiormente, in quanto $1+\frac{1}{3x-1}>0$ $\forall x\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$, è possibile calcolare il limite, quindi si ha:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(5x^2+1\right)\log_3\left(1+\frac{1}{3x-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(5x^2-1\right)\frac{\log_3\left(1+\frac{1}{3x-1}\right)}{\frac{1}{3x-1}}\frac{1}{3x-1}=\log_3 e\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2+1}{3x-1}=$$

$$=\log_3 e\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(5+1/x^2\right)}{x\left(3-1/x\right)}=\log_3 e\cdot(-\infty)\cdot\frac{5}{3}=-\infty$$

3. Data la funzione: $f(x)=arc\cot g\frac{2x}{1-x^2}$

L'insieme dei valori della funzione f è incluso in $arc\cot g(R)=\left]0,\pi\right[$, quindi f è limitata e pertanto il grafico di f può avere solo asintoti orizzontali.

Ricordando che la funzione arcocotangente è definita in R, l'insieme di definizione di f coincide con l'insieme di definizione di $x \to \dfrac{2x}{1-x^2}$ e quindi $f : x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]-1,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[\to arc\cot g \dfrac{2x}{1-x^2}$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]-1,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$

il grafico, è sempre al di sopra dell'asse delle ascisse, e passa per il punto $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, ed essendo:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} arc\cot g \frac{2x}{1-x^2} = \lim_{x\to-\infty} arc\cot g \frac{2x}{x^2\left(1/x^2 - 1\right)} = arc\cot g 0 = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} arc\cot g \frac{2x}{1-x^2} = \lim_{y\to+\infty} arc\cot g y = 0,$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} arc\cot g \frac{2x}{1-x^2} = \lim_{y\to-\infty} arc\cot g y = \pi,$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} arc\cot g \frac{2x}{1-x^2} = \lim_{y\to+\infty} arc\cot g y = 0,$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} arc\cot g \frac{2x}{1-x^2} = \lim_{y\to-\infty} arc\cot g y = \pi \text{ e}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} arc\cot g \frac{2x}{1-x^2} = \lim_{x\to+\infty} arc\cot g \frac{2x}{x^2\left(1/x^2 - 1\right)} = arctg 0 = \frac{\pi}{2}$$

il grafico di *f* ha un asintoto: la retta di equazione $y = \dfrac{\pi}{2}$ asintoto orizzontale a sinistra e a destra.

Essendo:

$$f'(x) = Darc\cot g \frac{2x}{1-x^2} = -\frac{1}{1+\dfrac{4x^2}{\left(1-x^2\right)^2}} \cdot 2\frac{1-x^2+2x^2}{\left(1-x^2\right)^2} = -\frac{2}{1+x^2} \text{ se } x \in R - \{-1,1\}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]-1,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[,\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$$

quindi *f* è strettamente decrescente nel suo dominio

Risultando infine:

$$f''(x) = D - \frac{2}{1+x^2} = \frac{4x}{\left(1+x^2\right)^2} \text{ se } x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]-1,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$$

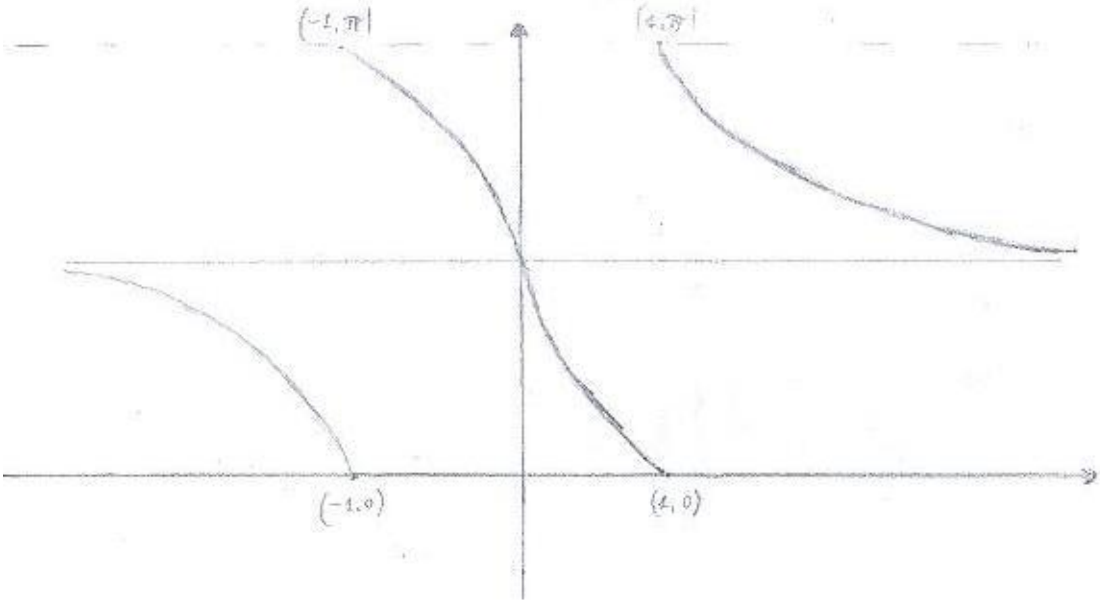
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \text{ e } x \neq 1 \text{ e } \frac{4x}{\left(1+x^2\right)^2} > 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \text{ e } x \neq 1 \text{ e } x < 0 \Leftrightarrow x \in \left]0,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \text{ e } x \neq 1 \text{ e } \frac{4x}{\left(1+x^2\right)^2} = 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \text{ e } x \neq 1 \text{ e } x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]-1,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[- \left]0,1\right[\cup \left]1,+\infty\right] = \left]-\infty,-1\right[\cup \left]-1,0\right[$$

e pertanto *f* è strettamente concava in $\left]-\infty,-1\right[$ ed in $\left]-1,0\right[$, è strettamente convessa in $\left]0,1\right[$ ed in $\left]1,+\infty\right[$ e zero è un punto di flesso proprio per *f*.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:



e quindi dedurre che:

$$f\left(\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[\right)=\left]0,\pi\right[,$$

OSSERVAZIONE. È immediato far vedere che *f* è una funzione $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$-simmetrica, quindi avremmo potuto limitarci a tracciare il grafico *G* della restrizione di *f* a $\left[0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$ ed ottenere il grafico di *f* unendo a *G* la curva G' simmetrica di *G* rispetto al punto $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

4. Data la funzione:

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{arctg\log(1-2x)}{sen\left(e^x-1\right)} & se\ x\neq 0\\ 2 & se\ x=0\end{cases}$$

Il suo dominio è dato da $sen\left(e^x-1\right)\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0$ e $1-2x>0\Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$, pertanto $\forall x\in\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[-\{0\}$ e risultando $f(0)=2$, mentre

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg\log(1-2x)}{sen(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{arctg\log(1-2x)}{\log(1-2x)}\frac{\log(1-2x)}{-2x}(-2x)\frac{1}{\frac{sen(e^x-1)}{e^x-1}\frac{e^x-1}{x}x}=-2\neq 2=f(0)$$ la

funzione ha in zero un punto di discontinuità eliminabile.

5. La funzione assegnata e definita $\forall x\in R-\left\{-\frac{5}{4}\right\}$ ed essendo

$$f'(x)=D\frac{x^2-1}{4x+5}=\frac{2x(4x+5)-4(x^2-1)}{(4x+5)^2}=\frac{8x^2+10x-4x^2+4}{(4x+5)^2}=\frac{4x^2+10x+4}{(4x+5)^2}\quad \text{se } x\in R-\left\{-\frac{5}{4}\right\}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{4x^2+10x+4}{(4x+5)^2}=0$$

per cui $4x^2+10x+4=0\Leftrightarrow x=\left\{-\frac{1}{2},-2\right\}$, inoltre $f'(x)>0\Leftrightarrow 4x^2+10x+4>0$, ovvero $\forall x\in\left]-\infty,-2\right[\cup\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ quindi strettamente crescente, mentre risulta strettamente decrescente $\forall x\in\left]-2,-\frac{1}{2}\right[-\left\{-\frac{5}{4}\right\}$, pertanto il punto -2 risulta un punto di massimo relativo ed il massimo è $f(-2)=-1$, mentre il punto $-\frac{1}{2}$ risulta un punto di minimo relativo con valore $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$.

Inoltre essendo $\lim_{x\to-\frac{5}{4}^-}\frac{x^2-1}{4x+5}=\frac{9}{16}\lim_{x\to-\frac{5}{4}^-}\frac{1}{4x+5}=-\infty$ ed $\lim_{x\to-\frac{5}{4}^+}\frac{x^2-1}{4x+5}=\frac{9}{16}\lim_{x\to-\frac{5}{4}^+}\frac{1}{4x+5}=+\infty$, pertanto la retta $x=-\frac{5}{4}$ è un asintoto verticale sia a destra che a sinistra.

Ed essendo $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{4x+5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}=\frac{1}{4}(-\infty)=-\infty$, conseguentemente $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{4}$ ed

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{4x+5}-\frac{1}{4}x=-\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{5}{4}x+1}{4x+5}=-\frac{5}{16}.$$

Cosi come $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{4x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}=\frac{1}{4}(+\infty)=+\infty$ e $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{4}$ ed ancora

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{4x+5}-\frac{1}{4}x=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5}{4}x+1}{4x+5}=-\frac{5}{16}$, per cui la retta $y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{16}$ è l'equazione dell'asintoto obliquo sia a destra che a sinistra.