Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale – 13 luglio 2016 (prof. Bisceglia)

traccia A

1. Calcolare la primitiva P della funzione p, e scrivere l'equazione della retta tangente a P in -2

$$p : x \in R \to \frac{3x-1}{2x^2+5}$$

2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{\sqrt{5x^2-1}-\sqrt{9x^2+2}}$$

3. Studiare la seguente funzione e tracciarne approssimativamente il grafico:

$$x \to f(x) = arctg\,\frac{1+x^2}{1-x^2}$$

4. Per quali valori del parametro h la funzione:

$$j : x \in]0,5] \to \begin{cases} \log_2(x+1)+3^{x^2+1} & x \in]0,1] \\ \cos(x-1)+h & x \in]1,5] \end{cases}$$

soddisfa le ipotesi dei Teoremi di BOLZANO e di WEIERSTRASS.

5. Data la funzione:

$$g : x \in R \to \begin{cases} sen\,x/x & x \in]-\infty,0[\\ 0 & x=0 \\ arcsen\,x/senx & x \in]0,1[\\ 2x-2 & x \in [1,3] \\ 2 & x \in]3,+\infty[\cap Q \\ 1 & x \in]3,+\infty[\cap (R-Q) \end{cases}$$

dire quali sono i suoi punti di discontinuità e classificarli

N.B. Non si possono usare, pena l'annullamento della prova:
1) calcolatrici, cellulari ed appunti vari.
2) Non si accettano elaborati scritti a matita.
3) Va consegnato solo il foglio di bella e la traccia compilata nel riquadro.

Cognome	Nome	Matricola	Firma

Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale – 13 luglio 2016 (prof. Bisceglia)

traccia B

1. Calcolare la primitiva *P* della funzione *p*, e scrivere l'equazione della retta tangente a *P* in -1

$$p : x \in R \to \frac{3x-2}{4x^2-4x+5}$$

2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{6x^2-2-\sqrt{3x^2+1}}}$$

3. Studiare la seguente funzione e tracciarne approssimativamente il grafico:

$$x \to f(x) = arc\cot g \frac{1+x^2}{1-x^2}$$

4. Per quali valori del parametro *h* la funzione:

$$j : x \in [0,3] \cup \{4,5\} \to \begin{cases} \log_2(x+1)+3^{x^2+1} & x \in [0,1] \cup \{4,5\} \\ \cos(x-1)+h & x \in]1,3] \end{cases}$$

soddisfa le ipotesi dei Teoremi di BOLZANO e di WEIERSTRASS.

5. Data la funzione:

$$g : x \in R \to \begin{cases} arctg\, x/x & x \in]-\infty,0[\\ 2 & x=0 \\ tg\, x/arctgx & x \in]0,1[\\ 3x-3 & x \in [1,3] \\ 2 & x \in]3,+\infty[\cap (R-Q) \\ 1 & x \in]3,+\infty[\cap Q \end{cases}$$

dire quali sono i suoi punti di discontinuità e classificarli

N.B. Non si possono usare, pena l'annullamento della prova:
1) calcolatrici, cellulari ed appunti vari.
2) Non si accettano elaborati scritti a matita.
3) Va consegnato solo il foglio di bella e la traccia compilata nel riquadro.

Cognome	Nome	Matricola	Firma

Svolgimento prova scritta del 13 luglio 2016 traccia A

1. Una primitiva della funzione assegnata è data dal seguente integrale:

$$\int \frac{3x-1}{2x^2+5}dx$$

pertanto tenendo conto che $\frac{3x-1}{2x^2+5} = \frac{3x}{2x^2+5} - \frac{1}{2x^2+5}$ e che $D(2x^2+5) = 4x$ si può scrivere $\frac{3x-1}{2x^2+5} = \frac{3}{4}\frac{4x}{2x^2+5} - \frac{1}{2x^2+5}$ quindi $\int \frac{3x-1}{2x^2+5}dx = \frac{3}{4}\int \frac{4x}{2x^2+5}dx - \int \frac{1}{2x^2+5}dx$, quindi per questo secondo integrale essendo il delta di $2x^2+5$ pari a $\Delta = -40$ ricordando che

$2x^2+5 = 2\left(x^2+\frac{40}{16}\right) = 2\left(\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{5}}\right)^2+1\right)\frac{5}{2}$ quindi il secondo integrale diventa

$\int \frac{1}{2\left(\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{5}}\right)^2+1\right)\frac{5}{2}}dx = \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}/\sqrt{5}}{\left(\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{5}}\right)^2+1\right)}dx$ infine abbiamo

$\int \frac{3x-1}{2x^2+5}dx = \frac{3}{4}\log\left|2x^2+5\right| - \frac{1}{\sqrt{10}}arctg\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{5}}$.

La retta tangente $y = P'(-2)(x+2)+P(-2)$ è:

$$y = -\frac{7}{13}(x+2)+\frac{3}{4}\log 13 - \frac{1}{\sqrt{10}}arctg\frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}.$$

2. Dato il seguente limite, $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{\sqrt{5x^2-1}-\sqrt{9x^2+2}}$ si ha

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{\sqrt{5x^2-1}-\sqrt{9x^2+2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{|x|\sqrt{5-\frac{1}{x^2}}-|x|\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{9}}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{|x|}$ .ovvero

$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{9}}\lim_{x\to-\infty}|x| = \frac{1}{\sqrt{5}-3}(+\infty) = -\infty$

3. Data la funzione $x \to f(x) = arctg\frac{1+x^2}{1-x^2}$

L'insieme dei valori della funzione *f* è incluso in $arctg(R) = \left]-\pi/2, \pi/2\right[$, quindi *f* è limitata e pertanto il grafico di *f* può avere solo asintoti orizzontali.
Ricordando che la funzione arcotangente è definita in *R*, l'insieme di definizione di *f* coincide con l'insieme di definizione di $x \to (1+x^2)/(1-x^2)$ e quindi l'insieme di definizione di *f* è: $\{x \in R, 1-x^2 \neq 0\}$ ed essendo $1-x^2 \neq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq -1$ e $x \neq 1 \Leftrightarrow x \in R-\{-1,1\} = \left]-\infty,-1\right[\cup \left]-1,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$ è:

$$f : x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]-1,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[\to arctg\,\frac{1+x^2}{1-x^2}$$

e risultando:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow arctg\,\frac{1+x^2}{1-x^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2-1<0 \Leftrightarrow x \in \left]-1,1\right[,$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow arctg\,\frac{1+x^2}{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow 1+x^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]-1,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[- \left]-1,1\right[= \left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$$

il grafico di f è al di sopra dell'asse delle x in $\left]-1,1\right[$, è al di sotto dell'asse delle x in $\left]-\infty,-1\right[$ ed in $\left]1,+\infty\right[$ ed ha in comune con gli assi il punto $(0, f(0)) = (0, arctg1) = (0, \pi/4)$ ed essendo:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} arctg\,\frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to-\infty} arctg\,\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}-1} = arctg(-1) = -\pi/4,$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} arctg\,\frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{y\to-\infty} arctgy = -\pi/2,$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} arctg\,\frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{y\to+\infty} arctgy = \pi/2,$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} arctg\,\frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{y\to+\infty} arctgy = \pi/2,$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} arctg\,\frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{y\to-\infty} arctgy = -\pi/2 \text{ e}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} arctg\,\frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to+\infty} arctg\,\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}-1} = arctg(-1) = -\pi/4$$

il grafico di f ha un solo asintoto: la retta di equazione $y = -\pi/4$ asintoto orizzontale a sinistra e a destra.

Essendo:

$$f'(x) = \frac{1}{1+\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{2x(1-x^2)+2x(1+x^2)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{1+x^4} \quad \text{se } x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]-1,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$$

è

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]-1,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[\text{ e } x > 0 \Leftrightarrow x \in \left]0,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]-1,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[\text{ e } x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]-1,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[- \left[0,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[= \left]-\infty,-1\right[\cup \left]-1,0\right[$$

f è strettamente crescente in $\left]0,1\right[$ ed in $\left]1,+\infty\right[$, è strettamente decrescente in $\left]-\infty,-1\right[$ ed in $\left]-1,0\right[$ e quindi zero è un punto di minimo relativo proprio per f.

Risultando infine:

$$f''(x) = D\frac{2x}{1+x^4} = 2\frac{1+x^4-4x^3\cdot x}{\left(1+x^4\right)^2} = 2\frac{1-3x^4}{\left(1+x^4\right)^2} \qquad \text{se } x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]-1,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$$

è:

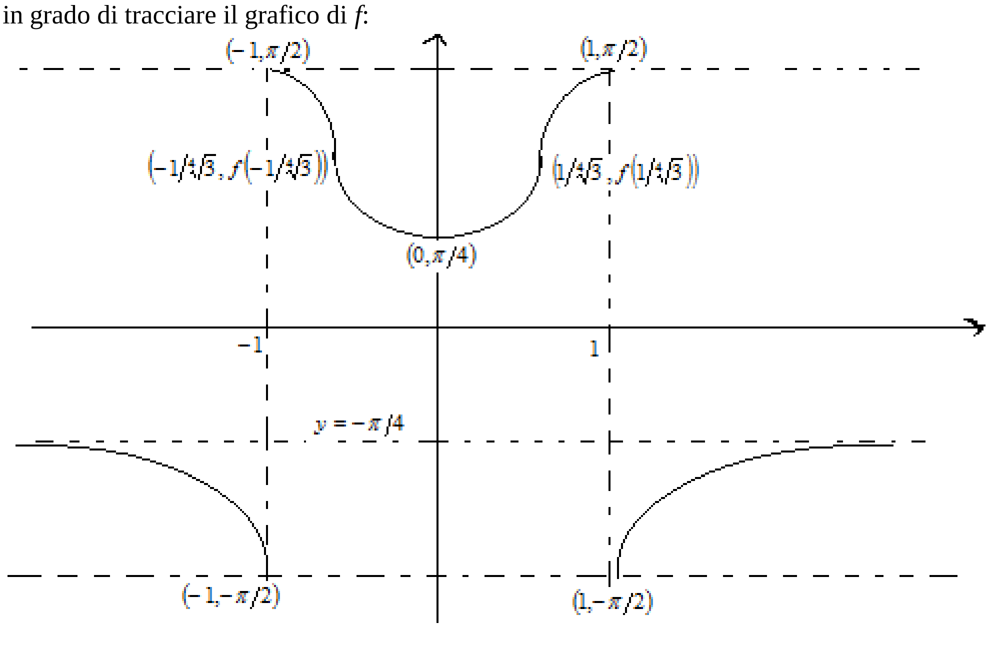
$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ e $x \neq 1$ e $1-3x^4 > 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ e $x \neq 1$ e $\left(1+\sqrt{3}x^2\right)\left(1-\sqrt{3}x^2\right) <$
$< 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ e $x \neq 1$ e $\sqrt{3}x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ e $x \neq 1$ e
$x \in \left]-1/\sqrt[4]{3}, 1/\sqrt[4]{3}\right[\Leftrightarrow x \in \left]-1/\sqrt[4]{3}, 1/\sqrt[4]{3}\right[$
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ e $x \neq 1$ e $1-3x^4 = 0 \Leftrightarrow x = -1/\sqrt[4]{3}$ o $x = 1/\sqrt[4]{3}$
$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]-1,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[- \left[-1/\sqrt[4]{3}, 1/\sqrt[4]{3}\right] = \left]-\infty,-1\right[\cup \left]-1,-1/\sqrt[4]{3}\right[\cup \left]1/\sqrt[4]{3},1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$

f è strettamente convessa in $\left]-1/\sqrt[4]{3}, 1/\sqrt[4]{3}\right[$, è strettamente concava in $\left]-\infty,-1\right[$, in $\left]-1,-1/\sqrt[4]{3}\right[$ in $\left]1/\sqrt[4]{3},1\right[$ ed in $\left]1,+\infty\right[$ e $-1/\sqrt[4]{3}$ e $1/\sqrt[4]{3}$ sono due punti di flesso proprio per f ed il grafico di f passa per i punti

$$\left(-1/\sqrt[4]{3}, f\left(-1/\sqrt[4]{3}\right)\right) = \left(-1/\sqrt[4]{3}, arctg\frac{1+1/\sqrt{3}}{1-1/\sqrt{3}}\right) = \left(-1/\sqrt[4]{3}, arctg\left(2+\sqrt{3}\right)\right) \text{ e } \left(1/\sqrt[4]{3}, f\left(1/\sqrt[4]{3}\right)\right) = \left(1/\sqrt[4]{3}, arctg\right.$$

.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di f:



e quindi dedurre che:

$f\left(R-\{-1,1\}\right) = \left]-\pi/2,-\pi/4\right[\cup \left[\pi/4,\pi/2\right[$, $f\left(\left]-\infty,-1\right[\right) = f\left(\left]1,+\infty\right[\right) = \left]-\pi/2,-\pi/4\right[$, $f\left(\left]-1,0\right]\right) = f\left(\left[0,1\right[\right) = \left[\pi/4,\pi/2\right[$, f non è biunivoca, le restrizioni di f a $\left]-\infty,-1\right[$ ed a $\left]1,+\infty\right[$ sono entrambe biunivoche su $\left]-\pi/2,-\pi/4\right[$, le restrizioni di f a $\left]-1,0\right]$ ed a $\left[0,1\right[$ sono entrambe biunivoche su $\left[\pi/4,\pi/2\right[$.

OSSERVAZIONE. È immediato rendersi conto che f è una funzione pari quindi avremmo potuto limitarci a tracciare il grafico G della restrizione di f a $\left[0,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$ e completare il grafico di f unendo a G la curva

G' simmetrica di *G* rispetto all'asse delle *x*.

4. Tale funzione:

$$j : x \in \left]0,5\right] \to \begin{cases} \log_2(x+1) + 3^{x^2+1} & x \in \left]0,1\right] \\ \cos(x-1) + h & x \in \left]1,5\right] \end{cases}$$

j è continua in $\left]0,5\right] - \{1\}$ e risultando $j(1) = \log_2 2 + 9 = 10$, $\lim_{x\to 1^-} j(x) = = \lim_{x\to 1^-}\left(\log_2(1+x) + 3^{x^2+1}\right) = \log_2 2 + 9 = 10$ e $\lim_{x\to 1^+} j(x) = \lim_{x\to 1^+} \cos(x-1) + h = \cos 0 = 1 + h$ la funzione j è continua se $j(1) = 1 + h \Leftrightarrow 10 = 1 + h \Leftrightarrow h = 9$, in tal caso j soddisfa alle ipotesi dei teoremi di BOLZANO, ma non soddisfa alle ipotesi dei teoremi di WEIERSTRASS.

5.

La funzione $g : x \in R \to \begin{cases} sen\, x/x & x \in \left]-\infty,0\right[\\ 0 & x = 0 \\ arcsen\, x/senx & x \in \left]0,1\right[\\ 2x-2 & x \in [1,3] \\ 2 & x \in \left]3,+\infty\right[\cap Q \\ 1 & x \in \left]3,+\infty\right[\cap (R-Q) \end{cases}$ è composta da funzioni continue, quindi è continua in $\left]-\infty,0\right[\cup \left]0,1\right[\cup \left]1,3\right[$.

Essendo $g(0) = 0$, $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{senx}{x} = 1$ e $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{arcsenx}{senx} = \lim_{x\to 0^+} \frac{arcsenx}{x} x \frac{1}{\frac{senx}{x} x} = 1$

è $\lim_{x\to 0} g(x) = 1 \neq 0 = g(0)$ quindi *f* ha in zero un punto di discontinuità eliminabile.

Essendo $g(1) = 0$, $\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{arcsenx}{senx} = \frac{\pi}{2sen1}$ e $\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+}(2x-2) = 0$ f ha in uno un punto di discontinuità di prima specie.

Se x_0 è un elemento di $\left[3,+\infty\right[$ è: $\lim_{x\to x_0^+} g_{[3,+\infty[\cap Q}(x) = \lim_{x\to x_0^+} 2 = 2$ e $\lim_{x\to x_0^+} g_{[3,+\infty[\cap(R-Q)}(x) = \lim_{x\to x_0^+} 1 = 1$, quindi possiamo asserire che non esiste il $\lim_{x\to x_0^+} g(x)$ e pertanto *g* ha in ogni elemento x_0 di $\left[3,+\infty\right[$ un punto di discontinuità di seconda specie..

Svolgimento prova scritta del 13 luglio 2016 traccia B

1. Una primitiva della funzione assegnata è data dal seguente integrale:

$$\int \frac{3x-2}{4x^2-4x+5}dx$$

pertanto tenendo conto che $\frac{3x-2}{4x^2-4x+5} = \frac{3x}{4x^2-4x+5} - \frac{2}{4x^2-4x+5}$ e che $D(4x^2-4x+5) = 8x-4$ si può scrivere $\frac{3x-2}{4x^2-4x+5} = \frac{3}{8}\frac{8x-4+4}{4x^2-4x+5} - \frac{2}{4x^2-4x+5}$ quindi

$\int \frac{3x-2}{4x^2-4x+5}dx = \frac{3}{8}\int \frac{8x-4}{4x^2-4x+5}dx + \int \frac{3}{8}\frac{4}{4x^2-4x+5} - \frac{2}{4x^2-4x+5}dx$, quindi per questo secondo integrale $-\frac{1}{2}\int \frac{1}{4x^2-4x+5}dx$ essendo il delta di $4x^2-4x+5$ pari a $\Delta = -64$ ricordando che

$4x^2-4x+5 = 4\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1\right)$ quindi il secondo integrale diventa

$-\frac{1}{2}\int \frac{1}{4\left(\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2+1\right)}dx = -\frac{1}{8}\int \frac{1}{\left(1+\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2\right)}dx$ infine abbiamo

$\int \frac{3x-2}{4x^2-4x+5}dx = \frac{3}{8}\log\left|4x^2-4x+5\right| - \frac{1}{8}arctg\,\frac{2x-1}{2}$.

La retta tangente $y = P'(-1)(x+1)+P(-1)$ è:

$$y = -\frac{5}{13}(x+1)+\frac{3}{8}\log 13 - \frac{1}{8}arctg\,\frac{-3}{2}.$$

2. Dato il seguente limite, $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{\sqrt{6x^2-2}-\sqrt{3x^2+1}}$ si ha

$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{\sqrt{6x^2-2}-\sqrt{3x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{|x|\sqrt{6-\frac{2}{x^2}}-|x|\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}} = \frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{|x|}$.ovvero

$\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}\lim_{x\to-\infty}|x| = \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}(+\infty) = +\infty$

3. Data la funzione $x \to f(x) = arc\cot g\,\frac{1+x^2}{1-x^2}$

L'insieme dei valori della funzione *f* è incluso in $arc\cot g(R) =]0,\pi[$, quindi *f* è limitata e pertanto il grafico di *f* può avere solo asintoti orizzontali.

Ricordando che la funzione arccotangente è definita in *R*, l'insieme di definizione di *f* coincide con l'insieme di definizione di $x \to (1+x^2)/(1-x^2)$ e quindi l'insieme di definizione di *f* è: $\{x \in R, 1-x^2 \neq 0\}$ ed essendo $1-x^2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq -1$ e $x \neq 1 \Leftrightarrow x \in R - \{-1,1\} =]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$ è:

$$f : x \in]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[\to arc\cot g \frac{1+x^2}{1-x^2}$$

e risultando:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow arc\cot g \frac{1+x^2}{1-x^2} > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[,$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow arc\cot g \frac{1+x^2}{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$$

il grafico di *f* è sempre nel suo insieme di definizione al di sopra dell'asse delle *x* ed ha in comune con gli assi il punto $(0, f(0)) = (0, arc\cot g1) = (0, \pi/4)$ ed essendo:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} arc\cot g \frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to-\infty} arctg \frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}-1} = arc\cot g(-1) = 3\pi/4,$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} arc\cot g \frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{y\to-\infty} arc\cot gy = \pi,$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} arc\cot g \frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{y\to+\infty} arc\cot gy = 0,$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} arc\cot g \frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{y\to+\infty} arc\cot gy = 0,$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} arc\cot g \frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{y\to-\infty} arc\cot gy = \pi \text{ e}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} arc\cot g \frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to+\infty} arc\cot g \frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}-1} = arc\cot g(-1) = 3\pi/4$$

il grafico di *f* ha un solo asintoto: la retta di equazione $y = 3\pi/4$ asintoto orizzontale a sinistra e a destra.

Essendo:

$$f'(x) = \frac{-1}{1+\frac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{2x(1-x^2)+2x(1+x^2)}{(1-x^2)^2} = -\frac{2x}{1+x^4} \quad \text{se } x \in]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$$

è

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[\text{ e } x < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-1[\cup]-1,0[$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[\text{ e } x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[-]-\infty,-1[\cup]-1,0] =]0,1[\cup]1,+\infty[$$

f è strettamente crescente in $]-\infty,-1[$ ed in $]-1,0[$, è strettamente decrescente in $]0,1[$ ed in $]1,+\infty[$ e quindi zero è un punto di massimo relativo proprio per *f*.

Risultando infine:

$$f''(x) = D - \frac{2x}{1+x^4} = -2\frac{1+x^4-4x^3\cdot x}{\left(1+x^4\right)^2} = -2\frac{1-3x^4}{\left(1+x^4\right)^2} \qquad \text{se } x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]-1,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$$

è:

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \text{ e } x \neq 1 \quad \text{e} \quad 3x^4 - 1 > 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \text{ e } x \neq 1 \quad \text{e} \quad \left(\sqrt{3}x^2+1\right)\left(\sqrt{3}x^2-1\right) > 0$$

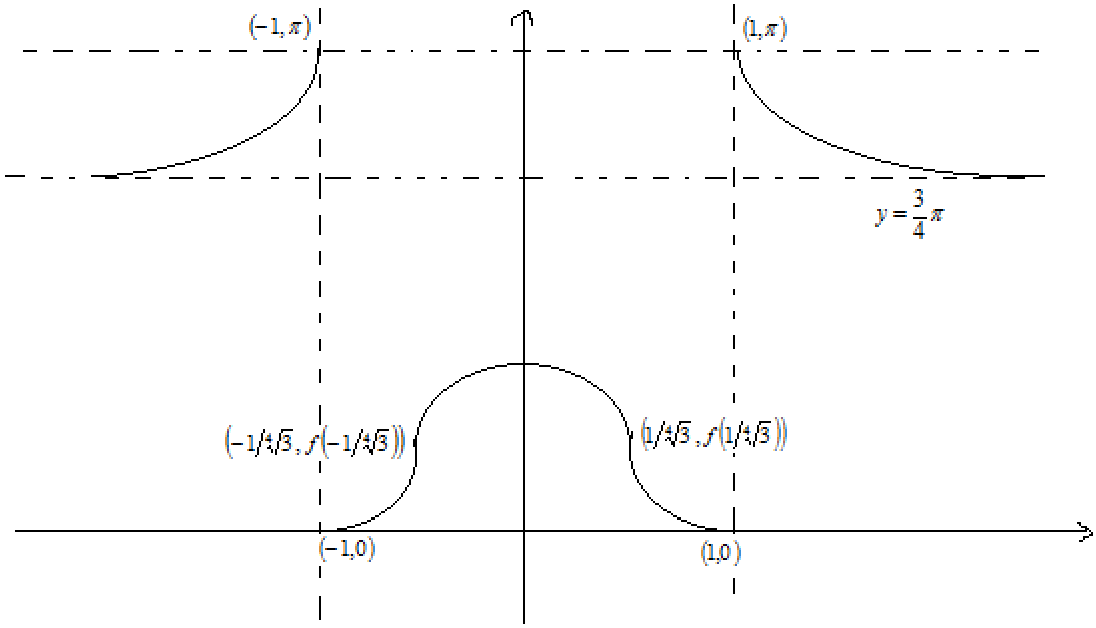
$$\Leftrightarrow x \neq -1 \text{ e } x \neq 1 \text{ e } \sqrt{3}x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \text{ e } x \neq 1 \text{ e } x \in \left]-\infty, -1/\sqrt[4]{3}, 1/\sqrt[4]{3}, +\infty\right[- \{-1,1\}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \text{ e } x \neq 1 \text{ e } 1-3x^4 = 0 \Leftrightarrow x = -1/\sqrt[4]{3} \text{ o } x = 1/\sqrt[4]{3}$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-1/\sqrt[4]{3}, 1/\sqrt[4]{3}\right[$$

f è strettamente convessa in $\left]-\infty,-1\right[$, in $\left]-1,-1/\sqrt[4]{3}\right[$ in $\left]1/\sqrt[4]{3},1\right[$ ed in $\left]1,+\infty\right[$, è strettamente concava in $\left]-1/\sqrt[4]{3}, 1/\sqrt[4]{3}\right[$ e $-1/\sqrt[4]{3}$ e $1/\sqrt[4]{3}$ sono due punti di flesso proprio per *f* ed il grafico di *f* passa per i punti $\left(-1/\sqrt[4]{3}, f\left(-1/\sqrt[4]{3}\right)\right) = \left(-1/\sqrt[4]{3}, arc\cot g\frac{1+1/\sqrt{3}}{1-1/\sqrt{3}}\right) = \left(-1/\sqrt[4]{3}, arc\cot g\left(2+\sqrt{3}\right)\right)$ e $\left(1/\sqrt[4]{3}, f\left(1/\sqrt[4]{3}\right)\right) = \left(1/\sqrt[4]{3}, arc\cot g\left(2+\sqrt{3}\right)\right)$.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:



e quindi dedurre che:

$f\left(R - \{-1,1\}\right) = \left]0, \pi/4\right] \cup \left[3\pi/4, \pi\right[$, $f\left(\left]-\infty,-1\right[\right) = f\left(\left]1,+\infty\right[\right) = \left]3\pi/4, \pi\right[$, $f\left(\left]-1,0\right]\right) = f\left(\left[0,1\right[\right) = \left]0, \pi/4\right]$, *f* non è biunivoca, le restrizioni di *f* a $\left]-\infty,-1\right[$ ed a $\left]1,+\infty\right[$ sono entrambe biunivoche su $\left]3\pi/4, \pi\right[$, le restrizioni di *f* a $\left]-1,0\right]$ ed a $\left[0,1\right[$ sono entrambe biunivoche su $\left]0, \pi/4\right]$.

OSSERVAZIONE. È immediato rendersi conto che *f* è una funzione pari quindi avremmo potuto limitarci a tracciare il grafico *G* della restrizione di *f* a $\left[0,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$ e completare il grafico di *f* unendo a *G* la curva G' simmetrica di *G* rispetto all'asse delle *x*.

4. Tale funzione:

$$j : x \in [0,3] \cup \{4,5\} \to \begin{cases} \log_2(x+1) + 3^{x^2+1} & x \in [0,1] \cup \{4,5\} \\ \cos(x-1) + h & x \in]1,3] \end{cases}$$

j è continua in $[0,3] \cup \{4,5\} - \{1\}$ e risultando $j(1) = \log_2 2 + 9 = 10$, $\lim_{x \to 1^-} j(x) =$ $= \lim_{x \to 1^-} \left(\log_2(1+x) + 3^{x^2+1} \right) = \log_2 2 + 9 = 10$ e $\lim_{x \to 1^+} j(x) = \lim_{x \to 1^+} \cos(x-1) + h = \cos 0 = 1 + h$ la funzione j è continua se $j(1) = 1 + h \Leftrightarrow 10 = 1 + h \Leftrightarrow h = 9$, in tal caso j comunque non soddisfa alle ipotesi dei teoremi di BOLZANO, ma soddisfa alle ipotesi dei teoremi di WEIERSTRASS.

5.

La funzione $g : x \in R \to \begin{cases} arctg\, x/x & x \in]-\infty,0[\\ 2 & x = 0 \\ tg\, x/arctgx & x \in]0,1[\\ 3x - 3 & x \in [1,3] \\ 2 & x \in]3,+\infty[\cap (R - Q) \\ 1 & x \in]3,+\infty[\cap Q \end{cases}$ è composta da funzioni continue, quindi è continua in $]-\infty,0[\cup]0,1[\cup]1,3[$.

Essendo $g(0) = 2$, $\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} \dfrac{arctgx}{x} = 1$ e $\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{tgx}{arctgx} = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{tgx}{x} x \dfrac{1}{\dfrac{arctgx}{x} x} = 1$ è $\lim_{x \to 0} g(x) = 1 \neq 2 = g(0)$ quindi g ha in zero un punto di discontinuità eliminabile.

Essendo $g(1) = 0$, $\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} \dfrac{tgx}{arctgx} = \dfrac{tg1}{\pi/4} = \dfrac{4tg1}{\pi}$ e $\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} (3x - 3) = 0$ g ha in uno un punto di discontinuità di prima specie.

Se x_0 è un elemento di $[3,+\infty[$ è: $\lim_{x \to x_0^+} g_{[3,+\infty[\cap Q}(x) = \lim_{x \to x_0^+} 1 = 1$ e $\lim_{x \to x_0^+} g_{[3,+\infty[\cap (R-Q)}(x) = \lim_{x \to x_0^+} 2 = 2$, quindi possiamo asserire che non esiste il $\lim_{x \to x_0^+} g(x)$ e pertanto g ha in ogni elemento x_0 di $[3,+\infty[$ un punto di discontinuità di seconda specie.