Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
12 luglio 2017
(prof. Bisceglia)

Traccia A

1. Calcolare il seguente $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3}{\sqrt{4x^2-2}-\sqrt{3x^2+1}}$, e verificare che sia corretto.

2. Data la funzione $h(x)=\frac{x^2-2}{2x+1}$, determinare nell'intervallo $[-2,1[$ gli eventuali punti di massimo e minimo, assoluti e/o relativi.

3. Studiare la funzione $x\to f(x)=arctg\frac{1+x^2}{1-x^2}$, e tracciarne approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione $g: x\in[-1,1]\to\begin{cases}(1-x^2)sen\frac{1}{1-x^2} & \text{se } x\in\,]-1,1[\\ 0 & \text{se } x\in\{-1,1\}\end{cases}$, dire se soddisfa alle ipotesi del Teoremi del Punto Fisso e di Rolle.

5. Data la funzione $p(x)=(x^2+x-2)e^{-x}$, calcolare la primitiva *P* passante per l'origine, e scrivere l'equazione della tangente sulla primitiva *P* nel punto -1.

6. Data la funzione $f(x,y)=2x^3-6xy+3y^2$, determinare il suo gradiente, eventuali punti stazionari e classificarli. (A.A. 2016/2017)

Svolgimento - Traccia A

1. Dato il seguente limite, $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3}{\sqrt{4x^2-2}-\sqrt{3x^2+1}}$ si ha

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3}{\sqrt{4x^2-2}-\sqrt{3x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3}{|x|\sqrt{4-\frac{2}{x^2}}-|x|\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}}=\frac{3}{2-\sqrt{3}}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{|x|}=\frac{3}{2-\sqrt{3}}\lim_{x\to-\infty}\frac{x|x|^2}{|x|}$$

.ovvero $\frac{3}{2-\sqrt{3}}\lim_{x\to-\infty}x|x|=(-\infty)(+\infty)=-\infty$. Per comodità, ci limitiamo a verificare quest'ultimo limite, ipotizzando i precedenti, corretti, per cui si ha $\frac{-3x^2}{2-\sqrt{3}}<-\varepsilon\Leftrightarrow x^2>\frac{\varepsilon(2-\sqrt{3})}{3}\Leftrightarrow|x|>\sqrt{\frac{\varepsilon(2-\sqrt{3})}{3}}$, ovvero $x>\sqrt{\frac{\varepsilon(2-\sqrt{3})}{3}}$ e $x<-\sqrt{\frac{\varepsilon(2-\sqrt{3})}{3}}$ e quindi posto $\delta=\sqrt{\frac{\varepsilon(2-\sqrt{3})}{3}}$, abbiamo individuato un intorno di meno infinito.

2. La funzione $h(x)=\frac{x^2-2}{2x+1}$ è composta da funzioni continue, quindi continua anche in $[-2,1[$ ma non essendo definita in $-\frac{1}{2}\in[-2,1[$, quindi non essendo $\left[-2,-\frac{1}{2}\right[\cup\left]-\frac{1}{2},1\right[$ una parte di R chiusa e limitata, non soddisfa alle ipotesi del Teorema di Weierstrass, pertanto non è dotata di minimo e

massimo assoluti. Consideriamo i soli punti di minimo e massimo relativi, ed osserviamo che $h'(x)=\frac{2x(2x+1)-2(x^2-2)}{(2x+1)^2}=\frac{4x^2+2x-2x^2+4}{(2x+1)^2}=\frac{2x^2+2x+4}{(2x+1)^2}$, definita in $\left[-2,-\frac{1}{2}\right[\cup\left]-\frac{1}{2},1\right]$ e, constatando che $h'(x)=0\Leftrightarrow\frac{2x^2+2x+4}{(2x+1)^2}=0$ e per cui $2x^2+2x+4=0\Leftrightarrow x\in\emptyset$, in quanto $\Delta<0$ quindi $f'(x)>0\Leftrightarrow\forall x\in\left[-2,-\frac{1}{2}\right[\cup\left]-\frac{1}{2},1\right[$, ovvero la funzione strettamente crescente $\forall x\in\left[-2,-\frac{1}{2}\right[\cup\left]-\frac{1}{2},1\right[$, pertanto il punto -2 risulta un punto di minimo relativo ed il minimo è $h(-2)=-\frac{2}{3}$; mentre nella parte considerata la funzione non è dotata di massimo relativo.

Infine, essendo $\lim_{x\to-\frac{1}{2}^-}\frac{x^2-2}{2x+1}=-\frac{7}{4}\lim_{x\to-\frac{1}{2}^-}\frac{1}{2x+1}=+\infty$ ed $\lim_{x\to-\frac{1}{2}^+}\frac{x^2-2}{2x+1}=-\frac{7}{4}\lim_{x\to-\frac{1}{2}^+}\frac{1}{2x+1}=-\infty$, pertanto la retta $x=-\frac{1}{2}$ è un asintoto verticale sia a destra che a sinistra.

3. Data la funzione $x\to f(x)=\sqrt{x^2+x+1}+x$

Essendo $x^2+x+1>0$ per ogni elemento *x* di *R*, l'insieme di definizione di *f* è *R* e quindi è:

$$f: x\in R\to\sqrt{x^2+x+1}+x$$

e risultando:

$$f(x)>0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+x+1}+x>0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+x+1}>-x\Leftrightarrow x\in[0,+\infty[\text{ o }\left(x<0\text{ e }x^2+x+1>x^2\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\in[0,+\infty[\text{ o }(x<0\text{ e }x>-1)\Leftrightarrow x\in]-1,+\infty[$$
$$f(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+x+1}+x=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+x+1}=-x\Leftrightarrow x<0\text{ e }x^2+x+1=x^2\Leftrightarrow x=-1$$
$$f(x)<0\Leftrightarrow x\in-[-1,+\infty[=]-\infty,-1[$$

il grafico di *f* è al di sopra dell'asse delle *x* in $]-1,+\infty[$, è al di sotto dell'asse delle *x* in $]-\infty,-1[$, ha in comune con gli assi i punti $(-1,f(-1))=(-1,0)$ e $(0,f(0))=(0,1)$ ed essendo:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{1+1/x}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=-\frac{1}{2},$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)=+\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)=2\quad\text{e}\quad\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+1/x}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}$$

il grafico di *f* ha due asintoti: la retta di equazione $y=-1/2$ asintoto orizzontale a sinistra e la retta di equazione $y=2x+1/2$ asintoto obliquo a destra.

Essendo:

$$f'(x) = D\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}+1 \quad \text{se} \quad x\in R$$

è:

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}+1>0 \Leftrightarrow \frac{2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}}{2\sqrt{x^2+x+1}}>0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+x+1}>-2x-1 \Leftrightarrow x>-1/2 \text{ o}$$
$$\left(x\le -1/2 \text{ e } 4x^2+4x+4>4x^2+4x+1\right) \Leftrightarrow x\in R$$
$$f'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$$

quindi *f* è strettamente crescente.

Risultando infine:

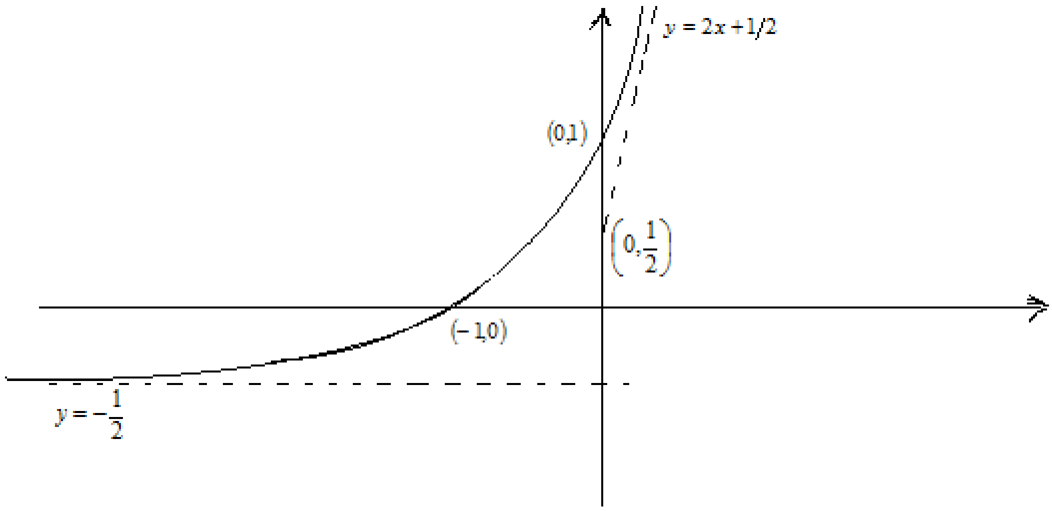
$$f''(x) = D\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}+1\right) = \frac{1}{2}\,\frac{2\sqrt{x^2+x+1}-\frac{(2x+1)^2}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{x^2+x+1} = \frac{3}{4\left(x^2+x+1\right)\sqrt{x^2+x+1}} \quad \text{se} \quad x\in R$$

è:

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow x\in R,\ \ f''(x)=0 \Leftrightarrow f''(x)<0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$$

e pertanto *f* è strettamente convessa.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:



e quindi dedurre che:

$f(R) =]-1/2, +\infty[$, f è biunivoca su $]-1/2, +\infty[$, $\inf f(R) = -1/2$ e $\sup f(R) = +\infty$.

4. La funzione assegnata è evidentemente continua in $]-1,1[$, ed essendo il $\lim_{x\to -1}(1-x^2)sen\frac{1}{1-x^2} = \lim_{y\to 0} ysen\frac{1}{y}$, così come $\lim_{x\to 1}(1-x^2)sen\frac{1}{1-x^2} = \lim_{y\to 0} ysen\frac{1}{y}$, quindi $\lim_{x\to -1} g(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = 0 = g(-1) = g(1)$ e pertanto la funzione g è continua e risultando $g(-1) = g(1) = 0 \in [-1,1]$ soddisfa alle ipotesi del Teorema del Punto Fisso, ed inoltre essendo derivabile in $]-1,1[$ soddisfa anche alle ipotesi del Teorema di Rolle.

5. Essendo la funzione $p(x) = (x^2 + x - 2)e^{-x}$, calcoliamo la primitiva procedendo per parti, quindi $\int (x^2 + x - 2)e^{-x}dx = -(x^2 + x - 2)e^{-x} - \int -(2x+1)e^{-x}dx$ e conseguentemente per questo secondo $\int (2x+1)e^{-x}dx$, procedendo ancora per parti, si ha $\int (2x+1)e^{-x}dx = -(2x+1)e^{-x} - \int -2e^{-x}dx = -(2x+1)e^{-x} + 2e^{-x}$ quindi, $\int (x^2 + x - 2)e^{-x}dx = -(x^2 + x - 2)e^{-x} - (2x+1)e^{-x} - 2e^{-x} + c = -e^{-x}(x^2 + 3x + 1) + c$, per cui la primitiva passante per l'origine deve soddisfare l'equazione $P(0) = 0 \Leftrightarrow -e^{-0}(1) + c = 0 \Leftrightarrow c = 1$, pertanto la primitiva cercata risulta $P(x) = -e^{-x}(x^2 + 3x + 1) + 1$ e conseguentemente la retta tangente sulla primitiva P nel punto -1, risulta $y = P'(-1)(x+1) + P(-1)$, per cui $P'(-1) = p(-1) = -2e$ e $P(-1) = e + 1$, si ha che la retta tangente risulta: $y = -2e(x+1) + e + 1 \Leftrightarrow y = -e(2x+1) + 1$.

6. Data la $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ il suo gradiente $\nabla f(x,y) = [f_x(x,y), f_y(x,y)] = [6x^2 - 6y, -6x + 6y]$. gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} 6x^2 - 6y = 0 \\ -6x + 6y = 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ y = x \end{cases} = \begin{cases} x(x-1) = 0 \\ y = x \end{cases}$, e quindi i due punti stazionari sono $(0,0)$ e $(1,1)$. per poterli classificare dobbiamo calcolare il determinante Hessiano, per cui $f_{xx}(x,y) = 12x$, $f_{yy}(x,y) = 6$, $f_{xy}(x,y) = -6$ e $f_{yx}(x,y) = -6$, per cui $H_f(x,y) = \begin{vmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = 72x - 36$, controlliamo quindi la natura del punto $(0,0)$, $H_f(0,0) = -36 < 0$ abbiamo un punto di sella, mentre per il punto $(1,1)$ $H_f(1,1) = 36 > 0$ ed $f_{xx}(1,1) = 12 > 0$, per cui il punto stazionario $(1,1)$ è un punto di minimo ed il suo valore è $f(1,1) = 2 - 6 + 3 = -1$.