Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
12 gennaio 2022
(prof. Bisceglia)

Traccia A

1. Determinare, *se possibile*, un punto di approssimazione con un errore $\in \leq 10^{-1}$, dell'equazione $\frac{-1}{e^{arctg(x-1)}} = 0$, nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]$.

2. Calcolare, *se possibile*, il seguente limite: $\lim_{x\to+\infty} \arccos\left(2^{\frac{1}{x}} - 1\right)$.

3. *Studiare* la funzione $x \to f(x) = \frac{\log x}{x}$, e *tracciarne* approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione $f(x) = \begin{cases} arctg(x) & \text{se } x \leq 0 \\ arc\cot g(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$, verificare la *derivabilità* nel suo dominio.

5. Data la funzione $p(x) = \frac{1}{1+4x^2}$, calcolare la primitiva *P* passante per il punto $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

6. Data la matrice incompleta $A = \begin{pmatrix} -1 & k \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ed il vettore $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, studiare il sistema $A\alpha = b$ nella variabile presente.

Svolgimento traccia A

1. Data la funzione $f(x) = \frac{-1}{e^{arctg(x-1)}}$, pur continua nel suo insieme di definizione, ma trattandosi del rapporto con una funzione esponenziale al denominatore risulterà $f\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) > 0$, pertanto l'equazione $\frac{-1}{e^{arctg(x-1)}} = 0$ non ammette soluzioni nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]$, in quanto non ricorrono tutte le ipotesi del Teorema degli Zeri, pertanto $\nexists x_0 \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right[\ / \ f(x_0) = 0$.

2. Essendo $\lim_{x\to+\infty} \arccos\left(2^{\frac{1}{x}} - 1\right)$ il limite di una funzione composta, e ricordando cha la funzione arcoseno è definita $\forall x \in [-1,1] \Leftrightarrow \left(2^{\frac{1}{x}} - 1\right) \in [-1,1] \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\frac{1}{x}} - 1 \leq 1 \\ 2^{\frac{1}{x}} - 1 \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\frac{1}{x}} \leq 2 \\ 2^{\frac{1}{x}} \geq 0 \end{cases}$, ovvero

$$\begin{cases} 2^{\frac{1}{x}} \le 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} \le 1 \Leftrightarrow 1 \le x \\ 2^{\frac{1}{x}} \ge 0 \Leftrightarrow \forall x \in R - \{0\} \end{cases}$$, quindi il dominio risulta $\forall x \in [1,+\infty[$, pertanto è possibile effettuare il pertanto è possibile effettuare il limite assegnato in quanto il dominio non è limitato superiormente, e risulta che il $\lim_{x\to+\infty} \arccos\left(2^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \frac{\pi}{2}$, in quanto essendo appunto il limite di una funzione composta in cui il $\lim_{x\to+\infty}\left(2^{\frac{1}{x}} - 1\right) = 0$ e conseguentemente $\lim_{x\to 0} \arccos y = \frac{\pi}{2}$.

3. Data la funzione $x \to f(x) = \dfrac{\log x}{x}$

L'insieme di definizione della funzione *f* è: $]0,+\infty[$ e pertanto è:

$$f : x \in]0,+\infty[\to \log x/x$$

e risultando:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \log x/x > 0 \Leftrightarrow \log x > 0 = \log 1 \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow x \in]1,+\infty[$$
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \log x/x = 0 \Leftrightarrow \log x = 0 = \log 1 \Leftrightarrow x = 1$$
$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0,+\infty[- [1,+\infty[=]0,1[$$

il grafico di *f* è al di sopra dell'asse delle *x* in $]1,+\infty[$, è al di sotto dell'asse delle *x* in $]0,1[$, ha in comune con gli assi il punto $(1, f(1)) = (1,0)$ ed essendo:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to 0} \log x \frac{1}{x} = (-\infty)(+\infty) = -\infty \text{ e } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

il grafico di *f* ha due asintoti: la retta di equazione $x = 0$ asintoto verticale a destra e la retta di equazione $y = 0$ asintoto orizzontale a destra.

Essendo:

$$f'(x) = D\frac{\log x}{x} = \frac{x/x - \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2} \quad \text{se } x \in]0,+\infty[$$

è:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \log x}{x^2} > 0 \Leftrightarrow 1 - \log x > 0 \Leftrightarrow \log x < 1 = \log e \Leftrightarrow 0 < x < e \Leftrightarrow x \in]0, e[$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \log x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \log x = 0 \Leftrightarrow \log x = 1 = \log e \Leftrightarrow x = e$$
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0,+\infty[-]0, e] =]e,+\infty[$$

quindi *f* è strettamente crescente in $]0, e]$, è strettamente decrescente in $[e,+\infty[$, e è un punto di massimo relativo proprio per *f* che è anche di massimo per *f*, il grafico di *f* passa per il punto $(e, f(e)) = \left(e, \frac{1}{e}\right)$ e $\frac{1}{e}$ è il massimo di *f*.

Risultando infine:

$$f''(x) = D\frac{1 - \log x}{x^2} = \frac{-x^2/x - 2x(1 - \log x)}{x^4} = \frac{2\log x - 3}{x^3} \quad \text{se } x \in]0,+\infty[$$

è:

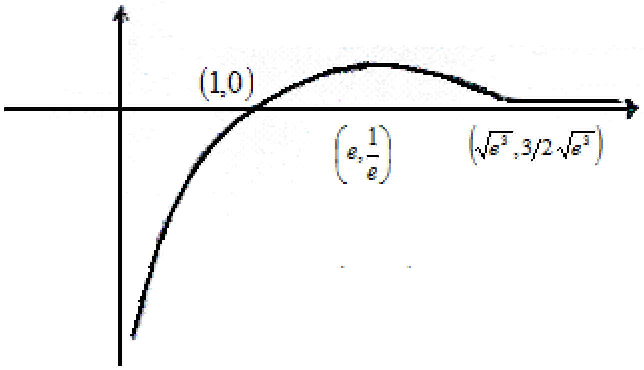
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2\log x - 3}{x^3} > 0 \Leftrightarrow 2\log x - 3 > 0 \Leftrightarrow \log x > \frac{3}{2} = \log\sqrt{e^3} \Leftrightarrow x > \sqrt{e^3} \Leftrightarrow x \in \left]\sqrt{e^3}, +\infty\right[$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\log x - 3}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 2\log x - 3 = 0 \Leftrightarrow \log x = \frac{3}{2} = \log\sqrt{e^3} \Leftrightarrow x = \sqrt{e^3}$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]0, +\infty\right[- \left[\sqrt{e^3}, +\infty\right[= \left]0, \sqrt{e^3}\right[$$

e pertanto f è strettamente convessa in $\left[\sqrt{e^3}, +\infty\right[$, è strettamente concava in $\left]0, \sqrt{e^3}\right]$, $\sqrt{e^3}$ è un punto di flesso proprio per f ed il grafico di f passa per il punto $\left(\sqrt{e^3}, f\left(\sqrt{e^3}\right)\right) = \left(\sqrt{e^3}, 3/2\sqrt{e^3}\right)$.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di f:



e quindi dedurre che:

$f(\left]0, +\infty\right[) = \left]-\infty, 1/e\right]$, $f(\left]0, e\right]) = \left]-\infty, 1/e\right]$, $f(\left[e, +\infty\right[) = \left]0, 1/e\right]$, f non è biunivoca, la restrizione di f a $\left]0, e\right]$ è biunivoca su $\left]-\infty, 1/e\right]$ e la restrizione di f a $\left[e, +\infty\right[$ è biunivoca su $\left]0, 1/e\right]$.

4. Data la funzione $f(x) = \begin{cases} arctg(x) & \text{se } x \le 0 \\ arc\cot g(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$, definita $\forall x \in R$, verifichiamo quindi la derivabilità della funzione nel punto di raccordo $x = 0$, per cui deve $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in R$, ed essendo $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{arctgx - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{1 + x^2} = 1$ ed $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{arc\cot gx - \frac{\pi}{2}}{x - 0} = -\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{1 + x^2} = -1$, la funzione *non è dotata di derivata* in $x = 0$ e tale punto *è un punto angoloso* per la funzione data.

5. Si tratta di risolvere il seguente integrale $\int \frac{1}{1 + 4x^2} dx$ di cui una primitiva è $\frac{1}{2} arctg\, 2x + c$, per cui la primitiva $P\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ risulta $P\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} arctg(1) + c = 1 \Leftrightarrow c = 1 - \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow c = 1 - \frac{\pi}{8}$ pertanto la primitiva richiesta è $P(x) = \frac{1}{2} arctg\, 2x + 1 - \frac{\pi}{8}$.

6. Si tratta di trovare delle soluzioni al sistema $A\alpha = b$; per cui si osserva la matrice incompleta $A = \begin{pmatrix} -1 & k \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $3x2$ per cui che il suo determinante è $\det(A') = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$ mentre il determinante della matrice completa risulta: $\det(B) = \begin{vmatrix} -1 & k & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - k\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 + k$; quindi per $k \neq -2$ $\quad Car(A) = 2 \neq Car(B) = 3$, pertanto il sistema è incompatibile; mentre $k = -2$, $Car(A) = Car(B) = 2 = n$ il numero delle incognite, pertanto il sistema diventa di Cramer, compatibile ed ammette una sola soluzione ovvero $\begin{cases} -x + y = 1 \\ 2x + y = -1 \end{cases} = \begin{cases} y = \dfrac{1}{3} \\ x = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$.