Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
11 luglio 2018
(prof. M. Bisceglia)

Traccia A

1. Data la funzione $f(x): x \in R \to \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \forall x \in]-\infty,0[\\ \cos x & \forall x \in [0,+\infty[\end{cases}$, *individuare* l'eventuale punto di discontinuità e, nel caso esiste, *classificarlo*.

2. Data la funzione $h(x) = (3x + \log x)\log\left(1 + \frac{1}{2x}\right)$, dire se è *regolare* in $x_0 = +\infty$; e nel caso lo sia, dire se risulta *convergente* o *divergente*.

3. Studiare la funzione $f : X \to f(x) = arcsen\frac{1}{1+x^2}$, e tracciarne approssimativamente il grafico.

4. Data la seguente funzione: $g : x \in [0,1] \to \begin{cases} 1-h & x = 0 \\ e^x \dfrac{arcsen\log(x+1)}{x} + h(x^2-1) & x \in]0,1] \end{cases}$, dire per quale valore del parametro *h*, soddisfa *le ipotesi* del teorema di Rolle.

5. Data la funzione $p(x) = (x^2 + 2x - 8)e^{-2x}$, *calcolare l'area* del rettangoloide della funzione nell'intervallo $[0,2]$.

Svolgimento traccia A

1. Essendo $f(x): x \in R \to \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \forall x \in]-\infty,0[\\ \cos x & \forall x \in [0,+\infty[\end{cases}$, si osserva che la funzione essendo data da funzioni continue, è continua in $R - \{0\}$; quindi osserviamo che $f(0) = \cos 0 = 1$ ed $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \cos x = 1$, mentre $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to -\infty} e^y = 0$; pertanto il *punto zero* è, per la funzione, un punto di discontinuità di *prima specie*.

2. Data la seguente funzione $h(x) = (3x + \log x)\log\left(1 + \frac{1}{2x}\right)$ essendo il suo dominio non limitato superiormente, in quanto $\frac{2x+1}{2x} > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \left(\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup]0,+\infty[\right) \cap]0,+\infty[$, la funzione è *regolare* in $x_0 = +\infty$; e risulta $\lim_{x\to+\infty}(3x + \log x)\log\left(1+\frac{1}{2x}\right) = \lim_{x\to+\infty}(3x+\log x)\frac{\log\left(1+\frac{1}{2x}\right)}{1/2x}\frac{1}{2x}$ ovvero $\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\log x}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(3+\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{2}$, quindi a funzione è *convergente* in $x_0 = +\infty$.

3. *Data la seguente funzione*: $f : X \to f(x) = arcsen\dfrac{1}{1+x^2}$.

I. *Dominio*:

L'insieme dei valori della funzione *f* è incluso in $arcsen([-1,1]) = [-\pi/2, \pi/2]$, quindi *f* è limitata e pertanto il grafico di *f* può avere solo asintoti orizzontali.

L'insieme di definizione di *f* è: $\{x \in R, -1 \le 1/(1+x^2) \le 1\}$ ed essendo $-1 \le 1/(1+x^2) \le 1 \Leftrightarrow -1-x^2 \le \ \le 1 \le 1+x^2 \Leftrightarrow -2-x^2 \le 0 \le x^2 \Leftrightarrow x \in R$ è:

$$f : x \in R \to arcsen\frac{1}{1+x^2},$$

II. *Segno della funzione:*

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow arcsen\frac{1}{1+x^2} > 0 = arcsensen0 = arcsen0 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2} > 0 \Leftrightarrow x \in R$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$$

il grafico di *f* si trova al di sopra dell'asse delle *x* in *R* ed ha in comune con gli assi il punto $(0, f(0)) = (0, arcsen1) = (0, \pi/2)$ e quindi zero è un punto di massimo per *f*

III. *Limiti significativi*:

Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare il limite nell'estremo superiore ed inferiore $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{y \to 0} arcseny = arcsen0 = 0$

il grafico di *f* ha un asintoto: la retta di equazione $y = 0$ asintoto orizzontale a sinistra e a destra.

IV. *Derivata prima e monotonia:*

$$f'(x) = Darcsen\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{\dfrac{\sqrt{x^4+2x^2}(1+x^2)^2}{1+x^2}} = \frac{-2x}{|x|\sqrt{x^2+2}(1+x^2)} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}(1+x^2)} & \text{se} \quad x \in \left]-\infty, 0\right[\\[2ex] \dfrac{-2}{\sqrt{x^2+2}(1+x^2)} & \text{se} \quad x \in \left]0, +\infty\right[\end{cases}$$

e

$$f_s'(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{2}{\sqrt{x^2+2}(1+x^2)} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$f'_d(0)=\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2}{\sqrt{x^2+2}\left(1+x^2\right)}=\frac{-2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$

f è derivabile in $R-\{0\}$, non esiste la derivata di *f* in zero, zero è un punto angoloso per *f*, ed è anche un punto di massimo relativo proprio per *f* ed è:

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,0\right[,\quad f'(x)=0 \Leftrightarrow x\in\varnothing,\quad f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left]0,+\infty\right[$$

quindi *f* è strettamente crescente in $\left]-\infty,0\right]$ e strettamente decrescente in $\left]0,+\infty\right[$.

V. *Derivata seconda e concavità:*

Risultando infine:

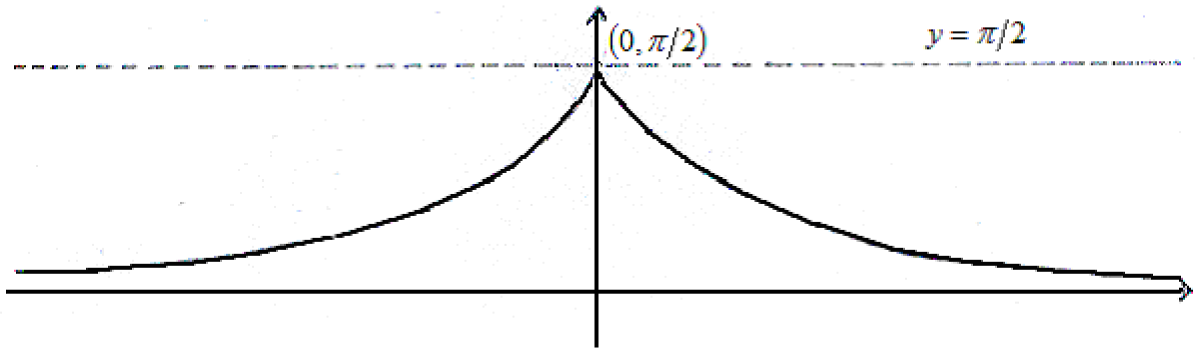
$$f''(x)=\begin{cases} D\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}\left(1+x^2\right)}=-2\dfrac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}\left(1+x^2\right)+2x\sqrt{x^2+2}}{\left(x^2+2\right)\left(1+x^2\right)^2}=-\dfrac{2x\left(3x^2+5\right)}{\sqrt{x^2+2}\left(x^2+2\right)\left(1+x^2\right)^2} & \text{se } x\in\left]-\infty,0\right[\\ D\dfrac{-2}{\sqrt{x^2+2}\left(1+x^2\right)}=-D\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}\left(1+x^2\right)}=\dfrac{2x\left(3x^2+5\right)}{\sqrt{x^2+2}\left(x^2+2\right)\left(1+x^2\right)^2} & \text{se } x\in\left]0,+\infty\right[\end{cases}$$

è:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow f''(x)<0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$$

e pertanto *f* è strettamente convessa in $\left]-\infty,0\right]$ ed in $\left[0,+\infty\right[$.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:



e quindi dedurre che:

$f(R)=f\left(\left]-\infty,0\right]\right)=f\left(\left[0,+\infty\right[\right)=\left]0,\pi/2\right]$, *f* non è biunivoca e le restrizioni di *f* a $\left]-\infty,0\right]$ ed a $\left[0,+\infty\right[$ sono entrambe biunivoche su $\left]0,\pi/2\right]$ e $\inf_{x\in R} arcsen\dfrac{1}{1+x^2}=\inf\left]0,\pi/2\right]=0$.

OSSERVAZIONE. Si noti che la funzione *f* è pari pertanto avremmo potuto limitarci a tracciare il grafico *G* della restrizione di *f* a $\left[0,+\infty\right[$ ed ottenere il grafico di *f* unendo a *G* la curva G' simmetrica di *G* rispetto all'asse delle *y*.

4. Essendo $g : x \in [0,1] \to \begin{cases} 1-h & x=0 \\ e^x \dfrac{arcsen\log(x+1)}{x} + h(x^2-1) & x \in]0,1] \end{cases}$, si osserva che la funzione g è continua in $]0,1]$ ed essendo $g(0)=1-h$ e $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\left(e^x \dfrac{arcsen\log(x+1)}{x} + h(x^2-1)\right) = = \lim_{x\to 0} \dfrac{arcsen\log(x+1)}{\log(x+1)} \dfrac{\log(x+1)}{x} - h = 1-h$ g è continua e risultando: $f'(x) = D\left(e^x \dfrac{arcsen\log(x+1)}{x} + h(x^2-1)\right)$ ovvero $e^x\left(\dfrac{1}{x} arcsen\log(x+1) - \dfrac{1}{x^2} arcsen\log(x+1) + \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\sqrt{1-\log^2(1+x)}}\dfrac{1}{1+x}\right) + 2hx$ g è derivabile in $]0,1]$, ed essendo in fine $g(0)=g(1) \Leftrightarrow 1-h = e\, arcsen\log 2 \Leftrightarrow h = 1 - e\, arcsen\log 2$ la funzione g soddisfa alle ipotesi del teorema di ROLLE solo se è: $h = 1 - e\, arcsen\log 2$.

5. Data la funzione $p(x) = (x^2+2x-8)e^{-2x}$, servendosi della regola dell'integrazione per parti, si ha: $\int (x^2+2x-8)e^{-2x}dx = \dfrac{e^{-2x}}{-2}(x^2+2x-8) - \int \dfrac{e^{-2x}}{-2}(2x+2)dx =$
$= \dfrac{-e^{-2x}}{2}(x^2+2x-8) + \int e^{-2x}(x+1)dx = \dfrac{-e^{-2x}}{2}(x^2+2x-8) + \left(\dfrac{e^{-2x}}{-2}(x+1) - \int \dfrac{e^{-2x}}{-2}dx\right) = \dfrac{-e^{-2x}}{2}(x^2+2x-$
$-8) - \dfrac{e^{-2x}}{2}(x+1) + \dfrac{1}{2}\int e^{-2x}dx = \dfrac{-e^{-2x}}{2}(x^2+2x-8) - \dfrac{e^{-2x}}{2}(x+1) - \dfrac{e^{-2x}}{4} = -\dfrac{e^{-2x}}{4}(2x^2+6x-13)$
conseguentemente una primitiva risulta : $P(x) = -\dfrac{e^{-2x}}{4}(2x^2+6x-13) + c$; per cui l'area cercata sarà $\left[-\dfrac{e^{-2x}}{4}(2x^2+6x-13)\right]_0^2 = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{7}{e^4}+13\right)$.