Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale – 10 novembre 2016 (prof. Bisceglia)

traccia A

1. Calcolare una primitiva P della funzione p, e scrivere l'equazione della retta tangente a P in 0 e calcolare la distanza della retta tangente dall'origine.

$$p : x \in R \to \left(2x^2 - 2x + 3\right)e^{\frac{x}{2}}$$

2. Calcolare il limite della seguente funzione, sugli elementi di $\hat{R}$ in cui è possibile effettuarsi

$$h : \forall x \in \left]-\infty,0\right[\cup \left(\left[1,3\right] \cap Q\right) \to \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \in \left]-\infty,0\right[\\ arcsen(x-2) & \text{se } x \in \left[1,3\right] \cap Q \end{cases}$$

3. Studiare la seguente funzione e tracciarne approssimativamente il grafico:

$$x \to f(x) = \log_{1/2}\left(2senx - 1\right)$$

4. Dati i seguenti insiemi:

$$\left]0,1\right[\cup \left]5,7\right[\; ; \; \left[0,1\right[\cup \left]5,7\right[\; ; \; \left[0,1\right] \cup Z \; ; \; \left]-1/2, 1/2\right[\cup Z$$

dire se ciascuno di essi è una parte di R aperta o chiusa, giustificando la risposta.

5. Data la funzione:

$$g : x \in R \to \begin{cases} 1/x & x < 0 \\ arctgx & x \geq 0 \end{cases}$$

verificare se ha punti di discontinuità e se si, dire di che tipo di discontinuità si tratta.

N.B. Non si possono usare, pena l'annullamento della prova:
1) calcolatrici, cellulari ed appunti vari.
2) Non si accettano elaborati scritti a matita.
3) Va consegnato solo il foglio di bella e la traccia compilata nel riquadro.

Cognome	Nome	Matricola	Firma

Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale – 07 settembre 2016 (prof. Bisceglia)

traccia B

1. Calcolare una primitiva P della funzione p, e scrivere l'equazione della retta tangente a P in 0 e calcolare la distanza della retta tangente dal punto $(1,1)$

$$p : x \in R \to (3x^2 - x + 1)e^{-\frac{x}{2}}$$

2. Calcolare il limite della seguente funzione, sugli elementi di $\hat{R}$ in cui è possibile effettuarsi

$$h : x \in (]-2,3] - \{0\}) \cup N \to \begin{cases} 1/x^2 & \text{se } x \in]-2,3] - \{0\} \\ arctg\,\dfrac{x+1}{x} & \text{se } x \in N - \{1,2,3\} \end{cases}$$

3. Studiare la seguente funzione e tracciarne approssimativamente il grafico:

$$x \to f(x) = \log_2(2\cos x - 1)$$

4. Dati i seguenti insiemi:

$$]0,1[\cup]5,7[\ ;\ [0,1[\cup]5,7[\ ;\ [0,1] \cup Z\ ;\ ]-1/2, 1/2[\cup Z$$

dire se ciascuno di essi è una parte di R aperta o chiusa, giustificando la risposta.

5. Data la funzione:

$$g : x \in]-\infty, \pi/2[\to \begin{cases} sen(1/x) & x \in]-\infty, 0[\\ tgx & x \in [0, \pi/2[\end{cases}$$

verificare se ha punti di discontinuità e se si, dire di che tipo di discontinuità si tratta.

N.B. Non si possono usare, pena l'annullamento della prova:
1) calcolatrici, cellulari ed appunti vari.
2) Non si accettano elaborati scritti a matita.
3) Va consegnato solo il foglio di bella e la traccia compilata nel riquadro.

Cognome	Nome	Matricola	Firma

Svolgimento prova scritta del 10 novembre 2016 traccia A

1. Una primitiva della funzione assegnata è data dal seguente integrale:

$$\int\left(2x^2-2x+3\right)e^{\frac{x}{2}}dx$$

Per poterlo calcolare procediamo per parti, quindi $\int\left(2x^2-2x+3\right)e^{\frac{x}{2}}dx=\left(2x^2-2x+3\right)2e^{\frac{x}{2}}-4\int\left(2x-1\right)e^{\frac{x}{2}}dx$ e conseguentemente per questo secondo $\int\left(2x-1\right)e^{\frac{x}{2}}dx$ procedendo ancora per parti si ha $\int\left(2x-1\right)e^{\frac{x}{2}}dx=\left(2x-1\right)2e^{\frac{x}{2}}-4\int e^{\frac{x}{2}}dx=\left(4x-2\right)e^{\frac{x}{2}}-8e^{\frac{x}{2}}$ quindi, $\int\left(2x^2-2x+3\right)e^{\frac{x}{2}}dx=\left(2x^2-2x+3\right)2e^{\frac{x}{2}}-4\left(4x-2\right)e^{\frac{x}{2}}+32e^{\frac{x}{2}}=e^{\frac{x}{2}}\left(4x^2-20x+46\right)$ detta P una primitiva della funzione p assegnata, è:

$$P:x\in R\to e^{\frac{x}{2}}\left(4x^2-20x+46\right)$$

La retta tangente $y=P'(0)(x-0)+P(0)$ risulta: $y=3x+46$,

Mentre la distanza di tale retta dall'origine è $d\left(r,(0,0)\right)=4.6\sqrt{10}$

2. .

Data la seguente funzione $h:\forall x\in\left]-\infty,0\right[\cup\left(\left[1,3\right]\cap Q\right)\to\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{se } x\in\left]-\infty,0\right[\\ arcsen(x-2) & \text{se } x\in\left[1,3\right]\cap Q\end{cases}$ si ha

L'insieme degli elementi di $\hat{R}$ in cui possa effettuarsi il limite su $\left]-\infty,0\right[\cup\left(\left[1,3\right]\cap Q\right)$ è $\left]-\infty,0\right]\cup\left[1,3\right]\cup\{-\infty\}$, quindi

se è $x_0=-\infty$ si ha: $\lim_{x\to-\infty}h(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$,

se è $x_0\in\left]-\infty,0\right[$ essendo h continua in $\left]-\infty,0\right[$ è: $\lim_{x\to x_0}h(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x}=\frac{1}{x_0}$,

se è $x_0=0$ si ha: $\lim_{x\to 0}h(x)=\lim_{x\to 0^-}h(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$, se è $x_0\in\left[1,3\right]$ essendo h continua in $\left[1,3\right]\cap Q$ perché restrizione a $\left[1,3\right]\cap Q$ della funzione continua $x\in\left[1,3\right]\to arcsen(x-2)$ è: $\lim_{x\to x_0}h(x)=\lim_{x\to x_0}arcsen(x-2)=arcsen(x_0-2)$

3. la funzione $x\to f(x)=\log_{1/2}(2senx-1)$

Essendo una funzione logaritmica, deve essere

$2senx-1>0 \Leftrightarrow senx>\frac{1}{2} \Leftrightarrow senx>\frac{1}{2}=sen\left(arcsen\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x>\frac{\pi}{6}$, ricordando che la funzione seno è periodica, e che risulta $\frac{\pi}{2}$-simmetrica, pertanto $sen\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=sen\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ e ricordando che $sen\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ per cui $\frac{\pi}{2}-x=\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}$ quindi $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi$ conseguentemente $sen\frac{\pi}{6}=sen\frac{5}{6}\pi=\frac{1}{2}$ e tenendo conto che la funzione seno è strettamente crescente in essendo $\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right[$ per cui $senx>\frac{1}{2} \Leftrightarrow x>\frac{\pi}{6}$, mentre la funzione seno è strettamente decrescente in $\left]\frac{\pi}{2},\frac{5}{6}\pi\right[$ per cui $senx>\frac{1}{2} \Leftrightarrow x<\frac{5}{6}\pi$, quindi $x\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi\right[$.

pertanto

$$f:\left]\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi\right[\rightarrow f(x)=\log_{1/2}(2senx-1)\in R$$

Si osserva che la funzione non ha asintoti orizzontali

Segno della funzione:

Deve essere

$f(x)>0 \Leftrightarrow \log_{1/2} 2senx-1>0=\log_{1/2}1 \Leftrightarrow 2senx-1<1 \Leftrightarrow senx<1 \Leftrightarrow x\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi\right[-\frac{\pi}{2}$,

quindi $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi\right[-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

Inoltre $f(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$

Conseguentemente $f(x)<0 \Leftrightarrow x\in\varnothing\cap X=\varnothing$

Si osserva che $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, quindi passa per il punto $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$

ed essendo:

$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^+} f(x)= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}^+}(2senx-1)=0$, per cui $\lim_{y\to 0}\log_{\frac{1}{2}} y=+\infty$

$\lim_{x\to\frac{5}{6}\pi^-} f(x)= \lim_{x\to\frac{5}{6}\pi^-}(2senx-1)=0$, per cui $\lim_{y\to 0}\log_{\frac{1}{2}} y=+\infty$

Per cui le rette $x=\frac{\pi}{6}$ ed $x=\frac{5}{6}\pi$ sono rispettivamente due asintoti verticali il primo a destra ed il secondo a sinistra per la funzione.

Essendo:

$f'(x) = \frac{\log_{1/2} e}{2senx - 1} 2\cos x$ e

ed è:

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \cos x < 0$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \cos x > 0$

quindi la restrizione di *f* a $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$ è strettamente decrescente e la restrizione di *f* a $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi\right[$ è strettamente crescente.

Risultando infine:

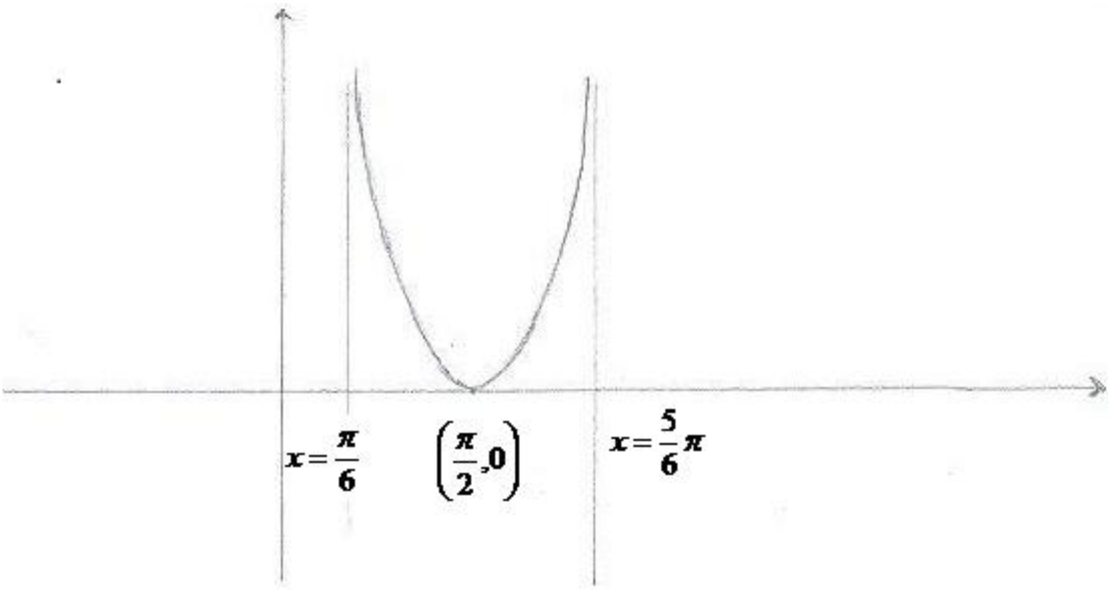
$$2\log_{1/2} e f''(x) = \frac{-senx(2senx-1) - \cos x 2\cos x}{(2senx-1)^2} = -2\log_{1/2} e \frac{2(sen^2 x + \cos^2 x) - senx}{(2senx-1)^2}$$

quindi $f''(x) = -2\log_{1/2} e \frac{2 - senx}{(2senx-1)^2}$ è:

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right[$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$, $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$

e pertanto la restrizione di *f* a $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right[$ è strettamente convessa.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:



e quindi dedurre che:

$f\left(\left]\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right[\right) = [0, +\infty[$, *f* non è biunivoca, la restrizione di *f* a $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$ è biunivoca su $[0, +\infty[$ e $\underset{x \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right[}{Inf} \log_{1/2}(2senx - 1) = Inf[0, +\infty[= 0$, ed osservando che $Inf f(x) \in f\left(\left]\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right[\right)$ *f* è dotata di minimo e risulta $\underset{x\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi\right[}{Min}\log_{1/2}(2senx-1)=Inf\,[0,+\infty[\,=0$. Mentre non è dotata di Massimo ed il $\underset{x\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi\right[}{Sup}\log_{1/2}(2senx-1)=Sup[0,+\infty[\,=+\infty$

4. dati i seguenti insiemi:

$$]0,1[\cup]5,7[\;;\;[0,1[\cup]5,7[\;;\;[0,1]\cup Z\;;\;]-1/2,1/2[\cup Z$$

5.

Essendo ogni intervallo aperto di *R* una parte aperta di *R* $]0,1[\cup]5,7[$ è una parte aperta di *R* in quanto unione di parti aperte di *R*.

$[0,1[\cup]5,7[$ non è una parte aperta di *R* perché non esiste alcun intorno di 0 incluso in $[0,1[\cup]5,7[$, d'altra parte $[0,1[\cup]5,7[$, non è una parte chiusa di *R* dato che 1,5 e 7 sono punti di accumulazione di $[0,1[\cup]5,7[$ non appartenenti a $[0,1[\cup]5,7[$.

Essendo ogni intervallo chiuso di *R* una parte chiusa di *R* e *Z* una parte chiusa di *R*, $[0,1]\cup Z$ è una parte chiusa di *R*.

$]-1/2,1/2[\cup Z$ non è una parte aperta di *R* perché se *z* è un numero intero diverso da zero non esiste alcun intorno di *z* incluso in $]-1/2,1/2[\cup Z$.

5. La funzione

$$g: x\in R\to\begin{cases}1/x & x<0\\ arctgx & x\geq 0\end{cases}$$

è continua in $R-\{0\}$ ed essendo $g(0)=arctg0=0$, e $\lim_{x\to 0^-}g(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ g ha in zero un punto di discontinuità di seconda specie.

Svolgimento prova scritta del 10 novembre 2016 traccia B

1. Una primitiva della funzione assegnata è data dal seguente integrale:

$$\int \left(3x^2 - x + 1\right) e^{-\frac{x}{2}} dx$$

Per calcolarlo procediamo per parti, per cui $\int \left(3x^2 - x + 1\right) e^{-\frac{x}{2}} dx = -2\left(3x^2 - x + 1\right) e^{-\frac{x}{2}} + 2\int \left(6x - 1\right) e^{-\frac{x}{2}} dx$

e conseguentemente per questo secondo $\int \left(6x - 1\right) e^{-\frac{x}{2}} dx$ procedendo ancora per parti si ha $\int \left(6x - 1\right) e^{-\frac{x}{2}} dx = -2\left(6x - 1\right) e^{-\frac{x}{2}} + 12\int e^{-\frac{x}{2}} dx = -2\left(12x - 2\right) e^{-\frac{x}{2}} - 24 e^{-\frac{x}{2}}$ quindi,

$$\int \left(3x^2 - x + 1\right) e^{-\frac{x}{2}} dx = -2\left(3x^2 - x + 1\right) e^{-\frac{x}{2}} + 2\left(-2\left(12x - 2\right) e^{-\frac{x}{2}} - 24 e^{-\frac{x}{2}}\right) = \left(-6x^2 + 2x - 2\right) e^{-\frac{x}{2}} + \left(-24x + 4\right) e^{-\frac{x}{2}} - 48e$$

detta P una primitiva della funzione p assegnata, è:

$$P : x \in R \to e^{-\frac{x}{2}} \left(-6x^2 - 22x - 46\right)$$

La retta tangente $y = P'(0)(x - 0) + P(0)$ risulta: $y = x - 46$,

Mentre la distanza di tale retta dall'origine è $d(r, (1,1)) = 23\sqrt{2}$

2. Essendo la funzione $h : x \in \left(\left]-2,3\right] - \{0\}\right) \cup N \to \begin{cases} 1/x^2 & \text{se } x \in \left]-2,3\right] - \{0\} \\ arctg\,\dfrac{x+1}{x} & \text{se } x \in N - \{1,2,3\} \end{cases}$

L'insieme degli elementi di $\hat{R}$ in cui possa effettuarsi il limite su $\left(\left]-2,3\right] - \{0\}\right) \cup N$ è $\left[-2,3\right] \cup \{+\infty\}$, quindi

se è $x_0 \in \left[-2,3\right] - \{0\}$ essendo h continua in $\left]-2,3\right] - \{0\}$ perché restrizione a $\left]-2,3\right] - \{0\}$ della funzione continua $x \in R - \{0\} \to 1/x^2$ è: $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{{x_0}^2}$,

se è $x_0 = 0$ si ha: $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$,

se è $x_0 = +\infty$ è: $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} arctg\,\dfrac{x+1}{x} = arctg 1 = \dfrac{\pi}{4}$.

3. Data la funzione $x \to f(x) = \log_2 (2\cos x - 1)$

Essendo una funzione logaritmica, deve essere

$2\cos x - 1 > 0 \Leftrightarrow \cos x > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x > \dfrac{1}{2} = \cos\left(\arccos\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x > \dfrac{\pi}{3}$, ricordando che la funzione coseno è periodica, e che risulta 0 -simmetrica, pertanto $\cos(-x)=\cos(x)$ e ricordando che $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ per cui $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ e tenendo conto che la funzione coseno è strettamente crescente in essendo $\left]-\frac{\pi}{3},0\right[$ per cui $\cos x>\frac{1}{2}\Leftrightarrow x>-\frac{\pi}{3}$, mentre la funzione coseno è strettamente decrescente in $\left]0,\frac{\pi}{3}\right[$ per cui $\cos x>\frac{1}{2}\Leftrightarrow x<\frac{\pi}{3}$, quindi $x\in\left]-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right[$.

pertanto

$$f:\left]-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right[\to f(x)=\log_2(2\cos x-1)\in R$$

Si osserva che la funzione non ha asintoti orizzontali

Segno della funzione:

Deve essere $f(x)>0\Leftrightarrow\log_2(2\cos x-1)>0=\log_2 1\Leftrightarrow 2\cos x-1>1\Leftrightarrow\cos x>1\Leftrightarrow x\in\varnothing$,

quindi $f(x)>0\Leftrightarrow x\in\varnothing$

Inoltre $f(x)=0\Leftrightarrow x=0$

Conseguentemente $f(x)<0\Leftrightarrow x\in\left]-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right[-\{0\}$

Si osserva che $f(0)=0$, quindi passa per il punto $(0,0)$

ed essendo:

$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{3}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{3}^+}(2\cos x-1)=0$, per cui $\lim\limits_{y\to 0}\log_2 y=-\infty$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}^-}(2\cos x-1)=0$, per cui $\lim\limits_{y\to 0}\log_2 y=-\infty$

Per cui le rette $x=-\frac{\pi}{3}$ ed $x=\frac{\pi}{3}$ sono rispettivamente due asintoti verticali il primo a destra ed il secondo a sinistra per la funzione.

Essendo:

$$f'(x)=-2\frac{senx\log_2 e}{2\cos x-1}$$

ed è:

$f'(x)>0\Leftrightarrow senx<0$, $f'(x)=0\Leftrightarrow senx=0$, $f'(x)<0\Leftrightarrow senx>0$

quindi la restrizione di f a $\left]-\frac{\pi}{3},0\right[$ è strettamente crescente e la restrizione di f a $\left]0,\frac{\pi}{3}\right[$ è strettamente decrescente.

Risultando infine:

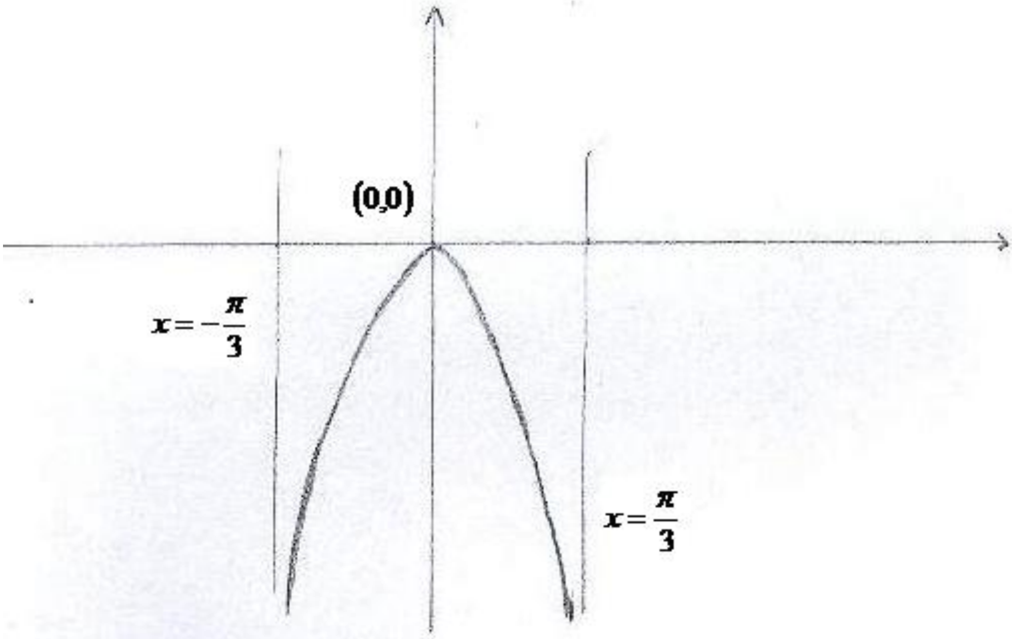
$$-2\log_2 e f''(x)=\frac{\cos x(2\cos x-1)+senx2senx}{(2\cos x-1)^2}=-2\log_2 e\frac{2(sen^2x+\cos^2x)-\cos x}{(2\cos x-1)^2}$$

quindi $f''(x)=-2\log_2 e\dfrac{2-\cos x}{(2\cos x-1)^2}$ è:

$f''(x)>0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$, $f''(x)=0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$, $f''(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left]-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right[$

e pertanto la restrizione di *f* a $\left]-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right[$ è strettamente concava.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:



quindi dedurre che:

$f\left(\left]-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right[\right)=\left]-\infty,0\right]$, *f* non è biunivoca, la restrizione di *f* a $\left]-\frac{\pi}{3},0\right[$ è biunivoca su $\left]-\infty,0\right]$ e

$\underset{x\in\left]-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right[}{Sup}\log_2(2\cos x-1)=Sup\left]-\infty,0\right]=0$, ed osservando che $Supf(x)\in f\left(\left]-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right[\right)$ *f* è dotata di massimo e risulta $\underset{x\in\left]-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right[}{Max}\log_2(2\cos x-1)=Max\left]-\infty,0\right]=0$. Mentre non è dotata di Minimo ed il

$\underset{x\in\left]-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right[}{Inf}\log_2(2\cos x-1)=Inf\left]-\infty,0\right]=-\infty$.

4. Dati i seguenti insiemi:

$$\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-3,7\right[;\ \left[-1,1\right[\cup\left]2,5\right[;\ [0,1]\cup N;\ \left]-1/2,1/2\right[\cup Z$$

5.

Essendo ogni intervallo aperto di R una parte aperta di R $\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-3,7\right[$ è una parte aperta di R in quanto unione di parti aperte di R.

$\left[-1,1\right[\cup\left]2,5\right[$ non è una parte aperta di R perché non esiste alcun intorno di -1 incluso in $\left[-1,1\right[\cup\left]2,5\right[$, d'altra parte $\left[-1,1\right[\cup\left]2,5\right[$, non è una parte chiusa di R dato che 1,2 e 5 sono punti di accumulazione di $\left[-1,1\right[\cup\left]2,5\right[$ non appartenenti a $\left[-1,1\right[\cup\left]2,5\right[$.

Essendo ogni intervallo chiuso di R una parte chiusa di R e N una parte chiusa di R, $\left[0,1\right]\cup N$ è una parte chiusa di R.

$\left]-1/2,1/2\right[\cup Z$ non è una parte aperta di R perché se z è un numero intero diverso da zero non esiste alcun intorno di z incluso in $\left]-1/2,1/2\right[\cup Z$

5. La funzione

$$g : x \in \left]-\infty,\pi/2\right[\to \begin{cases} sen(1/x) & x \in \left]-\infty,0\right[\\ tgx & x \in \left[0,\pi/2\right[\end{cases}$$

g è continua nel suo insieme di definizione $\left]-\infty,\pi/2\right[-\{0\}$ ed essendo $g(0)=tg0=0$, e $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} sen\frac{1}{x} = \lim_{y\to -\infty} seny$, quindi non esiste il $\lim_{x\to 0^-} g(x)$ e pertanto g ha in zero un punto di discontinuità di seconda specie