Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale 10 luglio 2019 (prof. Bisceglia)

Traccia A

1. Trovare, *se possibile* un punto di *approssimazione* con un errore $\varepsilon \leq \frac{1}{10}$ dell'equazione $x^5 - 3x^2 + 1 = 0$, nell'intervallo $[0,1]$.

2. Dopo aver verificato se è possibile effettuare il seguente limite $\lim_{x \to 0}(1+3x^2)^{\frac{1}{sen 2x^2}}$, dire se la funzione risulta convergente in zero (si noti che il limite è del tipo $f(x)^{g(x)}$).

3. *Studiare* la funzione $x \to f(x) = \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$, e *tracciarne approssimativamente* il grafico.

4. Data la funzione $h: x \in [0,1] \to \begin{cases} arc\cot g \frac{1}{1-x} & x \in [0,1[\\ e^{x-1} - x & x = 1 \end{cases}$, individuare l'eventuale *punto di discontinuità* e classificarlo.

5. Data la funzione $p(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4}$, *calcolare l'insieme delle primitive P*.

6. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & k & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, ed il vettore $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ studiare il sistema $A\alpha = b$ al variare di *k*.

Svolgimento traccia A

1. Data la funzione $x^5 - 3x^2 + 1 = 0$, funzione continua, definita in un intervallo chiuso e limitato, ed osservando che $f(0) = 1$, ed $f(1) = 1 - 3 + 1 < 0$, pertanto $f(0) \cdot f(1) < 0$, ricorrono quindi tutte le ipotesi del teorema degli zeri, pertanto $\exists x_0 \in]0,1[/ f(x_0) = 0$. Per cui sapendo che $|x_0 - c_n| < c_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n+1}} \leq 10^{-1}$, si ha $\frac{b-a}{2^{n+1}} \leq 10^{-1} \Leftrightarrow \frac{b-a}{10^{-1}} \leq 2^{n+1} \Leftrightarrow n \geq \frac{\log(b-a)10}{\log 2} - 1$ quindi $n \geq \frac{\log((1)10)}{\log 2} - 1 = 2.32$ quindi, ponendo $n = 3$ si trova il punto di approssimazione con un errore $\in \leq 10^{-1}$. Per semplificare $a_n b_n c_n f(a_n) f(b_n) f(c_n)$ i calcoli, sfruttiamo la stretta crescenza della funzione, e che si annulla per $x = -1$.

n	a_n	c_n	b_n	$f(a_n)$	$f(c_n)$	$f(b_n)$
0	0	1/2	1	+	+	–
1	1/2	3/4	1	+	–	–
2	1/2	5/8	3/4	+	–	–
3	1/2	9/16	5/8	+	+	–

che risulta essere $c_3 = \frac{9}{16}$, in quanto $\left|\frac{9}{16} - \frac{5}{8}\right| \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{16} \le \frac{1}{10}$.

.

2. Essendo il dominio $R - \{0\}$, zero risulta un punto di accumulazione dell'insieme di definizione è possibile effettuare il limite assegnato, ed osservando che la funzione è del tipo:

$f(x)^{g(x)} \Leftrightarrow e^{\log f(x)^{g(x)}} \Leftrightarrow e^{g(x)\log f(x)}$ quindi il $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3x^2\right)^{\frac{1}{sen2x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{sen2x^2}\log\left(1+3x^2\right)}$, ed essendo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1+3x^2\right)}{sen2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\log\left(1+3x^2\right)}{3x^2}3x^2}{\frac{sen2x^2}{2x^2}2x^2} = \frac{3}{2}$$, per cui $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3x^2\right)^{\frac{1}{sen2x^2}} = \lim\limits_{y\to\frac{3}{2}} e^y = \sqrt{e^3}$, pertanto

la funzione in zero converge a $\sqrt{e^3}$.

3. *Data la seguente funzione*: $x \to f(x) = \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$.

I. *Dominio*:

Essendo una funzione logaritmo, deve essere $1 - \frac{1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1$, pertanto $X = \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$ Quindi tale funzione è definita $\forall x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$, ovvero

$$f : \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[\to f(x) = \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \in R$$

II. *Segno*:

Deve essere $f(x) > 0 \Leftrightarrow \log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) > 0 = \log 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} < 0$.

Pertanto $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$

Conseguentemente $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$

III. *Asintoti*:

Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare solo il limite nell'estremo inferiore e superiore del dominio.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 0$, in quanto trattandosi di funzione composta, si ha $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$ quindi $\lim\limits_{y\to 1}\log y = 0$ e la stessa convergenza nell'estremo superiore

Pertanto la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale a sinistra ed a destra.

Inoltre $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$, in quanto trattandosi di funzione composta, si ha $\lim\limits_{x\to -1^-}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 0$ quindi $\lim\limits_{y\to 0}\log y = -\infty$; così come $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$.

Pertanto le rette $x = \pm 1$ sono due asintoti verticali.

IV. *Monotonia*:

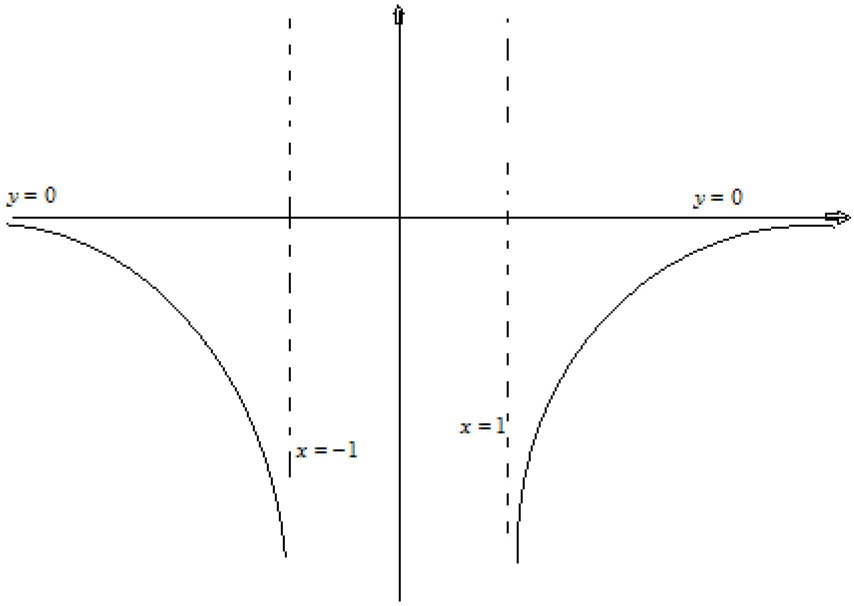
$$f'(x)=\frac{1}{\frac{x^2-1}{x^2}}\frac{2xx^2-(x^2-1)2x}{x^4}=\frac{2x}{x^2(x^2-1)}$$., quindi $f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2(x^2-1)}>0$, ed osservando che il denominatore è strettamente positivo nel dominio della funzione, $f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in]1,+\infty[$ mentre $f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in]-\infty,-1[$ quindi la funzione è strettamente decrescente in $]-\infty,-1[$ e strettamente crescente in $]1,+\infty[$.

V. *Convessità*:

Risultando infine: $f''(x)=\frac{2(x^4-x^2)-2x(4x^3-2x)}{(x^2(x^2-1))^2}=\frac{2x^2(-3x^2+1)}{(x^2(x^2-1))^2}$, ed osservando che il denominatore è strettamente positivo nel dominio della funzione, risulta $f''(x)>0 \Leftrightarrow -3x^2+1>0 \Leftrightarrow 3x^2-1<0$ ovvero $x\in \left]-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$ ed osservando che $\frac{\sqrt{3}}{3}<1$, conseguentemente $f''(x)<0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$ mentre risulta $f''(x)>0 \Leftrightarrow x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ pertanto la funzione è strettamente concava nel suo insieme di definizione.

VI. *Punti di flesso*: conseguentemente non ha punti di flesso.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:



e quindi dedurre che:

$f(]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[)=]-\infty,0[$, la funzione non è biunivoca, mentre la sua restrizione a $]-\infty,-1[$ è biunivoca su $]-\infty,0[$. Inoltre si osserva che la funzione è pari.

4. La funzione h è continua in $[0,1]-\{1\}$ e risultando $h(1)=0$ ed il $\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} arc\cot g \frac{1}{1-x} = 0$, in quanto essendo $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty$, si ha $\lim_{x\to 1^-} arc\cot g \frac{1}{1-x} = \lim_{y\to +\infty} arc\cot gy = 0$ pertanto la funzione h non ha punti di discontinuità.

5. Data la funzione $p(x) = \frac{x^3-1}{x^2-4}$, l'insieme delle primitive della seguente funzione è dato da: $\int \frac{x^3-1}{x^2-4}dx = \int xdx + \int \frac{4x}{x^2-4}dx - \int \frac{1}{x^2-4}dx$, per cui è: $\int \frac{x^3-1}{x^2-4}dx = \frac{x^2}{2} + 2\log|x^2-4| - \frac{1}{4}\log|x-2| + \frac{1}{4}\log|x+2| + c$, pertanto si ha che l'insieme delle primitive dell'integrale assegnato, risulta: $P(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{7}{4}\log|x-2| + \frac{9}{4}\log|x+2| + c$.

6. Si tratta di trovare delle soluzioni al sistema $A\alpha = b$; per cui si osserva che essendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & k & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, il suo determinante è $\det(A) = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & k \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 3-6k$, quindi per $3-6k \neq 0 \Leftrightarrow k \neq \frac{1}{2}$ il sistema è di Cramer e pertanto le soluzioni risultano il $x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{3-6k} = \frac{-10k+7}{3-6k}$; $x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{3-6k} = \frac{-12}{3-6k}$; ed $x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & k & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{3-6k} = \frac{-2k+5}{3-6k}$. Per $k = \frac{1}{2}$ la matrice diventa $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ed il suo determinante risulta $\det(A) = 0$ e quindi la $Car(A) = 2$ mentre la caratteristica della matrice completa resta 3, pertanto il sistema è incompatibile.