Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
10 gennaio 2018
(prof. Bisceglia)

Traccia F

1. Determinare, *se possibile*, un punto di approssimazione con un errore $\in\leq 10^{-1}$, dell'equazione $x^2 - x - 2 = 0$, nell'intervallo $\left[1, \frac{5}{2}\right]$.

2. Calcolare, *se possibile*, il seguente limite: $\lim_{x\to 0^-} arctg \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} e^x}$.

3. Studiare la funzione $x \to f(x) = \frac{\log x}{x^2}$, e tracciarne approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione $g(x) = \begin{cases} k & x = \{-1,1\} \\ (1-x^2) arcsenx & \forall x \in]-1,1[\end{cases}$, dire, per quali valori del parametro k soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle.

5. Data la funzione $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$, calcolare la primitiva P_0, tale che $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ e scrivere l'equazione della tangente sulla primitiva P_0, nel punto 0.

6. Data la funzione ricavi, $R(x,y) = 2x^2 + 2xy - 2y^2$, nel rispetto di una produzione limitata a, $x + y = 10$, determinare la combinazione dei prodotti con ricavo massimo.

Svolgimento traccia F

1. Data la funzione $x^2 - x - 2 = 0$, osservando che $f(2) = 0$, e $2 \in \left[1, \frac{5}{2}\right]$, risulterà $f(1) \cdot f\left(\frac{5}{2}\right) < 0$, ricorrono tutte le ipotesi del teorema degli zeri, pertanto $\exists x_0 \in \left]1, \frac{5}{2}\right[\ / \ f(x_0) = 0$. Per cui sapendo che $|x_0 - c_n| < c_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n+1}} \leq 10^{-1}$, si ha $\frac{b-a}{2^{n+1}} \leq 10^{-1} \Leftrightarrow \frac{b-a}{10^{-1}} \leq 2^{n+1} \Leftrightarrow n \geq \frac{\log(b-a)10}{\log 2} - 1$ quindi $n \geq \frac{\log\left(\left(\frac{5}{2}-1\right)10\right)}{\log 2} - 1 = 2.9$ quindi, ponendo $n = 3$ si trova il punto di approssimazione con un errore $\in\leq 10^{-1}$. Per semplificare i calcoli, si consideri che nell'intervallo dato la funzione è crescente e si annulla in 2.

N	a_n	c_n	b_n	$f(a_n)$	$f(c_n)$	$f(b_n)$
0	1	7/4	5/2	—	—	+
1	7/4	17/8	5/2	—	+	+
2	7/4	31/16	17/8	—	—	+
3	31/16	65/32	17/8	—	+	+

che risulta essere $c_4 = \frac{65}{32}$, in quanto $\left|\frac{65}{32} - \frac{31}{16}\right| \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{3}{32} \le \frac{1}{10}$.

2. Essendo $\lim_{x\to 0^-} arctg \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} e^x}$ il limite di una funzione composta, e ricordando cha la funzione arcotangente è definita $\forall x \in R$, e che la funzione $f(x) = \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} e^x}$ e definita $\forall e^x \in]0,+\infty[\Leftrightarrow \forall x \in R$, tranne nel punto in cui $\log_{\frac{1}{2}} e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, quindi il dominio risulta $\forall x \in R - \{0\}$, pertanto è possibile effettuare il limite assegnato in quanto 0 è un punto di accumulazione per il dominio. E trattandosi di un limite di una funzione composta, si ha che: $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} e^x} = +\infty$ e conseguentemente $\lim_{y\to+\infty} arctgy = \frac{\pi}{2}$, per cui per il teorema del limite di funzione composta, risulta $\lim_{x\to 0^-} arctg \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} e^x} = \frac{\pi}{2}$.

3. Data la funzione $x \to f(x) = \frac{\log x}{x^2}$

L'insieme di definizione della funzione *f* è: $]0,+\infty[$ e pertanto è:

$$f : x \in]0,+\infty[\to \log x / x^2$$

e risultando:

$f(x) > 0 \Leftrightarrow \log x / x^2 > 0 \Leftrightarrow \log x > 0 = \log 1 \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow x \in]1,+\infty[$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \log x / x^2 = 0 \Leftrightarrow \log x = 0 = \log 1 \Leftrightarrow x = 1$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0,+\infty[- [1,+\infty[=]0,1[$

il grafico di *f* è al di sopra dell'asse delle *x* in $]1,+\infty[$, è al di sotto dell'asse delle *x* in $]0,1[$, ha in comune con gli assi il punto $(1, f(1)) = (1,0)$ ed essendo:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \log x \frac{1}{x^2} = (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

il grafico di *f* ha due asintoti: la retta di equazione $x = 0$ asintoto verticale a destra e la retta di equazione $y = 0$ asintoto orizzontale a destra.

Essendo:

$$f'(x) = D \frac{\log x}{x^2} = \frac{x^2/x - 2x \log x}{x^4} = \frac{1 - 2\log x}{x^3} \quad \text{se } x \in]0,+\infty[$$

è:

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 2\log x}{x^3} > 0 \Leftrightarrow 1 - 2\log x > 0 \Leftrightarrow \log x < \frac{1}{2} = \log\sqrt{e} \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{e} \Leftrightarrow x \in]0, \sqrt{e}[$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-2\log x}{x^3}=0 \Leftrightarrow 1-2\log x=0 \Leftrightarrow \log x=\frac{1}{2}=\log\sqrt{e} \Leftrightarrow x=\sqrt{e}$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in]0,+\infty[-]0,\sqrt{e}] =]\sqrt{e},+\infty[$$

quindi *f* è strettamente crescente in $]0,\sqrt{e}]$, è strettamente decrescente in $[\sqrt{e},+\infty[$, $\sqrt{e}$ è un punto di massimo relativo proprio per *f* che è anche di massimo per *f*, il grafico di *f* passa per il punto $\left(\sqrt{e}, f\left(\sqrt{e}\right)\right)=\left(\sqrt{e},\frac{1}{2e}\right)$ e $\frac{1}{2e}$ è il massimo di *f*.

Risultando infine:

$$f''(x)=D\frac{1-2\log x}{x^3}=\frac{-2x^3/x-3x^2(1-2\log x)}{x^6}=\frac{6\log x-5}{x^4} \quad \text{se } x\in]0,+\infty[$$

è:

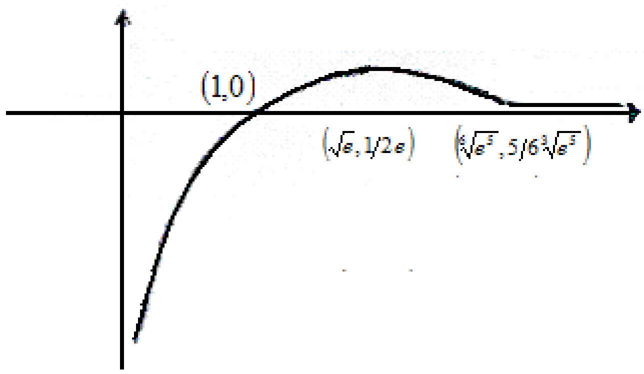
$$f''(x)>0 \Leftrightarrow \frac{6\log x-5}{x^4}>0 \Leftrightarrow 6\log x-5>0 \Leftrightarrow \log x>\frac{5}{6}=\log\sqrt[6]{e^5} \Leftrightarrow x>\sqrt[6]{e^5} \Leftrightarrow x\in]\sqrt[6]{e^5},+\infty[$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{6\log x-5}{x^4}=0 \Leftrightarrow 6\log x-5=0 \Leftrightarrow \log x=\frac{5}{6}=\log\sqrt[6]{e^5} \Leftrightarrow x=\sqrt[6]{e^5}$$

$$f''(x)<0 \Leftrightarrow x\in]0,+\infty[- [\sqrt[6]{e^5},+\infty[=]0,\sqrt[6]{e^5}[$$

e pertanto *f* è strettamente convessa in $[\sqrt[6]{e^5},+\infty[$, è strettamente concava in $]0,\sqrt[6]{e^5}]$, $\sqrt[6]{e^5}$ è un punto di flesso proprio per *f* ed il grafico di *f* passa per il punto $\left(\sqrt[6]{e^5}, f\left(\sqrt[6]{e^5}\right)\right)=\left(\sqrt[6]{e^5},5/6\sqrt[3]{e^5}\right)$.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:



e quindi dedurre che:

$f(]0,+\infty[)=]-\infty,1/2e]$, $f(]0,\sqrt{e}])=]-\infty,1/2e]$, $f([\sqrt{e},+\infty[)=]0,1/2e]$, *f* non è biunivoca, la restrizione di *f* a $]0,\sqrt{e}]$ è biunivoca su $]-\infty,1/2e]$ e la restrizione di *f* a $[\sqrt{e},+\infty[$ è biunivoca su $]0,1/2e]$.

4. Essendo la funzione $g(x)=\begin{cases} k & x=\{-1,1\} \\ (1-x^2)arcsenx & \forall x \in]-1,1[\end{cases}$ ed osservando che $g(-1)=g(1)=k$ e che il $\lim_{x\to -1^+}(1-x^2)arcsenx=0$ ed il $\lim_{x\to 1^-}(1-x^2)arcsenx=0$, la funzione risulterebbe continua per $k=0$; ed essendo derivabile in $]-1,1[$, la funzione soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle.

5. Data la funzione $p(x)=\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$, si ha: $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}dx=\frac{1}{2}arcsen2x+c$, infatti se consideriamo la sua derivata, $D\left(\frac{1}{2}arcsen2x+c\right)=\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$, pertanto $P(x)=\frac{1}{2}arcsen2x+c$ e quindi $P\left(\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}arcsen1+c=0 \Leftrightarrow c=-\frac{\pi}{4}$ ovvero la primitiva cercata è $P_0(x)=\frac{1}{2}arcsen2x-\frac{\pi}{4}$. Infine l'equazione della tangente sulla primitiva P_0, nel punto 0, è: $y=P_0'(0)(x-0)+P_0(0) \Leftrightarrow y=p(0)x+P_0(0)$ ovvero $y=x-\frac{\pi}{4}$.

6. Data la funzione ricavi, $R(x,y)=2x^2+2xy-2y^2$, nel rispetto del limite di produzione, la possiamo esprime in funzione di una variabile, essendo $y=10-x \Leftrightarrow g(x)=10-x$, per cui la funzione diventa $R(x,g(x))=2x^2+2x(10-x)-2(10-x)^2$, quindi si riduce ad una funzione di una variabile $\hat{R}(x)=2x^2+20x-2x^2-200+40x-2x^2 \Leftrightarrow \hat{R}(x)=-2x^2+60x-200$, la cui derivata prima risulta $\hat{R}'(x)=-4x+60$ e posta uguale a zero, $\hat{R}'(x)=0 \Leftrightarrow x=15$; ed osservando che $\hat{R}''(x)=-4$, il punto $(15,-5)$ risulta di massimo. Pertanto la combinazione dei prodotti con ricavo massimo, nel rispetto del vincolo, fornisce un ricavo $R(15,-5)=2(15)^2+2(15)(-5)-2(-5)^2=250$.

Traccia N

1. Data la funzione $f(x)=\frac{arcsen(2^x-1)\cdot senx}{\log_2(1-x)}$, dire se è *regolare* in $x_0=0$ e se è *convergente* in $x_0=0$.

2. Data la funzione $h:\to \begin{cases} \frac{arcsen\log(1-2x)}{sen(e^x-1)} & x\neq 0 \\ 2 & x=0 \end{cases}$, trovare l'*insieme* di *definizione* e, *classificare* il punto 0.

3. *Studiare* la funzione $f(x)=\frac{1+e^x}{1-e^{-x}}$, e *tracciarne* approssimativamente il grafico, tenendo conto che la funzione *non ha punti di flesso*.

4. Calcolare il *min* della funzione $g(x)=sen(x^2)$, nell'intervallo $\left[0,\sqrt{\frac{5}{2}\pi}\right]$.

5. Data la funzione $p(x)=sen^2 x$, calcolare *la primitiva* P_0, tale che $P\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi$ e scrivere *l'equazione della tangente* sulla primitiva P_0, nel punto 0.

6. Data la funzione $f(x,y)=e^{y^2}-e^{x^2}$, determinare eventuali punti *estremanti* e *classificarli*, A.A.(2016/2017).

Svolgimento traccia N

1. La funzione $f(x)=\frac{arcsen(2^x-1)\cdot senx}{\log_2(1-x)}$, per essere regolare in $x_0=0$, tale punto deve essere di accumulazione per il dominio della funzione, pertanto, per la funzione arcoseno, si ha $(2^x-1)\in[-1,1]\Leftrightarrow 2^x\in[0,2]\Leftrightarrow \forall x\in\left]-\infty,1\right]$, mentre la funzione seno è definita in R e per la funzione logaritmo si ha $1-x\in\left]0,+\infty\right[\Leftrightarrow \forall x\in\left]-\infty,1\right[$, pertanto il dominio della funzione risulta $\forall x\in\left]-\infty,1\right]\cap R\cap\left]-\infty,1\right[\Leftrightarrow \forall x\in\left]-\infty,1\right[$, per cui la funzione è regolare nel punto $x_0=0$ è risulta $\lim_{x\to 0}\frac{arcsen(2^x-1)\cdot senx}{\log_2(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{arcsen(2^x-1)}{2^x-1}\cdot\frac{(2^x-1)}{x}x\cdot\frac{senx}{x}x}{\frac{\log_2(1-x)}{-x}(-x)}=-\log^2 2\lim_{x\to 0}x=0$ e quindi la funzione risulta convergente nel punto $x_0=0$.

2. Per quanto riguarda il dominio, ricordando la funzione arcoseno, si ha $-1\le\log(1-2x)\le 1\Leftrightarrow\frac{e^{-1}-1}{2}\le -x\le\frac{e-1}{2}\Leftrightarrow\frac{1-e}{2}\le x\le\frac{1-e^{-1}}{2}$, inoltre per la funzione logaritmo, $1-2x>0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$ ed infine $sen(e^x-1)\ne 0\Leftrightarrow(e^x-1)\ne 0\Leftrightarrow e^x\ne 1\Leftrightarrow x\ne 0$, la funzione h è definita $\forall x\in\left[\frac{1-e}{2},\frac{1-e^{-1}}{2}\right]\cap\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[-\{0\}\cup\{0\}\Leftrightarrow\forall x\in\left[\frac{1-e}{2},\frac{1-e^{-1}}{2}\right]$ e considerando che $h(0)=2$ e che il $\lim_{x\to 0}h(x)=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{arcsen\log(1-2x)}{sen(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{arcsen\log(1-2x)}{\log(1-2x)}\frac{\log(1-2x)}{-2x}(-2x)\frac{1}{\frac{sen(e^x-1)}{e^x-1}\frac{e^x-1}{x}x}=-2\ne 2=h(0)$$

h ha in zero un punto di discontinuità eliminabile.

3. Data la funzione $f(x)=\frac{1+e^x}{1-e^{-x}}$

Dominio: essendo il numeratore definito $\forall x\in R$, si osserva che il denominatore $1-e^{-x}\ne 0\Leftrightarrow 1\ne\frac{1}{e^x}\Leftrightarrow x\ne 0$, pertanto $D(f)\Leftrightarrow\forall x\in R-\{0\}$.

Segno: essendo il numeratore positivo $\forall x \in R$, si osserva che il denominatore $1-e^{-x}>0 \Leftrightarrow 1>\frac{1}{e^x} \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$, pertanto si ha che $f(x)>0 \Leftrightarrow x \in]0,+\infty[$, conseguentemente $f(x)<0 \Leftrightarrow x \in]-\infty,0[$.

Asintoti: essendo il $\lim_{x\to 0^-} \frac{1+e^x}{1-e^{-x}} = \lim_{x\to 0^-}(1+e^x)\cdot \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{e^x-1} = 2(-\infty) = -\infty$, ed il $\lim_{x\to 0^+} \frac{1+e^x}{1-e^{-x}} = \lim_{x\to 0^+}(1+e^x)\cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{e^x-1} = 2(+\infty) = +\infty$ si ha che la retta $x=0$ è un asintoto verticale destro e sinistro; mentre il $\lim_{x\to -\infty} \frac{1+e^x}{1-e^{-x}} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to -\infty} e^x \frac{1+e^x}{e^x-1} = -1\cdot 0 = 0$, ed il $\lim_{x\to +\infty} \frac{1+e^x}{1-e^{-x}} = \lim_{x\to +\infty} e^x \frac{1+e^x}{e^x-1} = \lim_{x\to +\infty} e^x \frac{\frac{1}{e^x}+1}{1-\frac{1}{e^x}} = +\infty$, non vi sono asintoti obliqui in quanto $\lim_{y\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

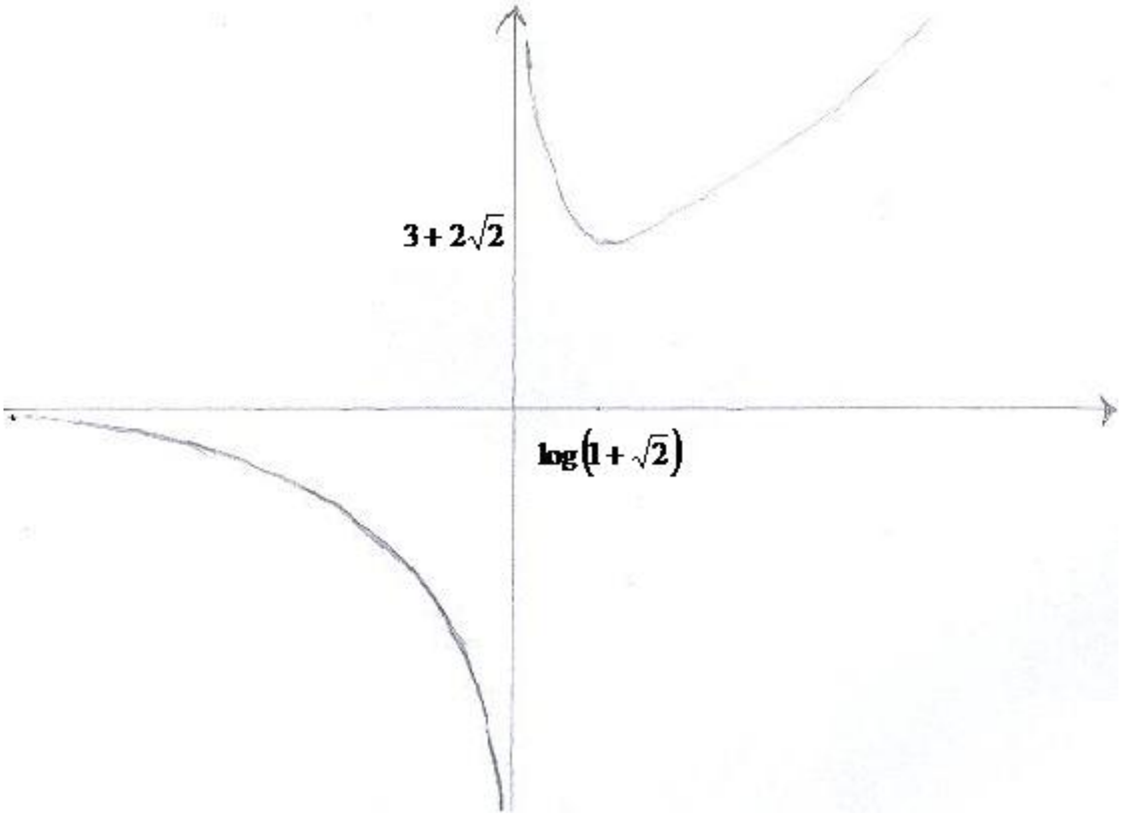
Monotonia: essendo $f'(x) = \frac{e^x(1-e^{-x})-(1+e^x)e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} = \frac{e^x(1-e^{-x})-(1+e^x)e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} = \frac{e^x-e^{-x}-2}{(1-e^{-x})^2}$, per cui essendo il denominatore un quadrato, avremo che $f'(x)>0 \Leftrightarrow e^x-e^{-x}-2>0$, ovvero $\frac{e^{2x}-2e^x-1}{e^x}>0$ ed ancora in presenza di un denominatore positivo, $f'(x)>0 \Leftrightarrow e^{2x}-2e^x-1>0 \Leftrightarrow y^2-2y-1>0$ quindi $f'(x)>0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]\log\left(1+\sqrt{2}\right),+\infty\right[$, mentre $f'(x)<0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty,\log\left(1+\sqrt{2}\right)\right[\cap D(f)$, ed $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\log\left(1+\sqrt{2}\right)$; pertanto la funzione sarà strettamente decrescente $\forall x \in \left]-\infty,\log\left(1+\sqrt{2}\right)\right[\cap D(f)$, ovvero strettamente crescente $\forall x \in \left]\log\left(1+\sqrt{2}\right),+\infty\right[$.

Punti di Minimo/massimo: dalla monotonia della funzione si nota che *f* ha in $x_0=\log\left(1+\sqrt{2}\right)$ un punto di minimo relativo, ed il suo minimo è $f\left(\log\left(1+\sqrt{2}\right)\right)=3+2\sqrt{2}$.

Convessità: non viene studiata per l'ipotesi fatta.

Punti di flesso: non ve ne sono.

Siamo quindi in grado di tracciarne approssimativamente il suo grafico.



4. Per il teorema dei Punti Critici, sia $f:[a,b]\to R$, sia f continua in $[a,b]$, sia $F=\{a,b\}$, $C=\{x\in\,]a,b[\,/\,\nexists f'(x)\}$, $S=\{x\in\,]a,b[\,/\,f'(x)=0\}$ e sia $A=F\cup S\cup C$, allora $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)=\min\limits_{x\in A} f(x)$, pertanto per la funzione $f(x)=sen(x^2)$ si ha; $F=\left\{0,\sqrt{\frac{5}{2}\pi}\right\}$, inoltre, essendo la derivata prima $f'(x)=2x\cos(x^2)$, definita in tutto l'intervallo considerato, $C=\{\varnothing\}$, inoltre $2x\cos(x^2)=0\Leftrightarrow(x=0)\cup\left(x^2=\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(x^2=\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(x^2=\frac{5\pi}{2}\right)$, $S=\left\{0,\sqrt{\frac{\pi}{2}},\sqrt{\frac{3\pi}{2}},\sqrt{\frac{5\pi}{2}}\right\}$. Ora notando che $f(0)=0$, $f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)=1$ $f\left(\sqrt{\frac{3\pi}{2}}\right)=-1$ ed $f\left(\sqrt{\frac{5\pi}{2}}\right)=1$, si ha che $\min\limits_{x\in\left[0,\sqrt{\frac{5\pi}{2}}\right]} sen(x^2)=\min\limits_{x\in A} sen(x^2)=-1$ ed il punto di minimo relativo è $x=\sqrt{\frac{3\pi}{2}}$.

5. Data la funzione $p(x)=sen^2x$, si ha: $\int sen^2xdx=\int(senxsenx)xdx$ $\int sen^2xdx=\int(senxsenx)dx$, è possibile procedere per parti, quindi posto $f(x)=senx\to f'(x)=\cos x$; e posto $g'(x)=senx\to g(x)=-\cos x$; per cui $\int sen^2xdx=-senx\cos x+\int\cos^2 xdx$ e ricordando che $\cos^2 x=1-sen^2x$, si ha $\int sen^2xdx=-senx\cos x+\int 1-sen^2xdx=-senx\cos x+x-\int sen^2xdx$ ovvero $2\int sen^2xdx=-senx\cos x+x\Leftrightarrow\int sen^2xdx=\frac{-senx\cos x+x}{2}+c$; pertanto per la primitiva richiesta deve essere $P\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi\Leftrightarrow\frac{-sen\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}{2}+c=\pi\Leftrightarrow c=\frac{3}{4}\pi$,

conseguentemente la primitiva è: $P_0(x) = \frac{-senx\cos x + x}{2} + \frac{3}{4}\pi$. Infine l'equazione della tangente sulla primitiva P_0, nel punto 0, è: $y = P_0'(0)(x-0) + P_0(0) \Leftrightarrow y = p(0)x + P_0(0)$ ovvero $y = \frac{3}{4}\pi$.

6. Data la funzione $f(x,y) = e^{y^2} - e^{x^2}$, essendo $f_x = -2xe^{x^2}$, $f_y = 2ye^{y^2}$; per cui $\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2xe^{x^2} = 0 \\ 2ye^{y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ ed essendo $f_{xx} = -2e^{x^2}\left(1+2x^2\right)$, $f_{yy} = 2e^{y^2}\left(2y^2 - 1\right)$ ed $f_{xy} = f_{yx} = 0$ il determinante Hessiano risulta $-2e^{x^2}\left(1+2x^2\right)\cdot 2e^{y^2}\left(2y^2-1\right)$ quindi $H(0,0) = -4$ pertanto il punto stazionario $(0,0)$ trovato, è un punto di sella.