Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
09 aprile 2018
(prof. M. Bisceglia)

Traccia A

1. Determinare, *se possibile*, un punto di approssimazione con un errore $\varepsilon \leq 8^{-1}$, dell'equazione $arctg(x+1)=0$, nell'intervallo $\left[-\frac{5}{3},0\right]$.

2. Data la funzione $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{e^{senx}}}$, dire se è *regolare* in $x_0=+\infty$ e se è *convergente* o *divergente* in $x_0=+\infty$.

3. Studiare la funzione $x\to f(x)=x^2\log^2 x$, e tracciarne approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione $g(x)=\begin{cases} x+\frac{\pi}{2} & \text{se } x<0 \\ \pi & \text{se } x=0 \\ \arccos\frac{1}{x+1} & \text{se } x>0 \end{cases}$, verificare la sua *continuità* nell'insieme di definizione.

5. Data la funzione $p(x)=\frac{2x^3-3x+1}{x^2-2x+2}$, calcolare l'area del rettangoloide della funzione nell'intervallo $[0,2]$.

6. Data la funzione profitto, $\pi(x,y,z)=3x^2-3xy+2y^2+2x-6y-2z$, nel rispetto di una *produzione limitata* a $x+y-z=100$, determinare la combinazione dei prodotti negli eventuali punti estremanti e verificare la loro *natura*.

Svolgimento traccia A

1. Data la funzione $arctg(x+1)$, continua nell'intervallo $\left[-\frac{5}{3},0\right]$, ed osservando che $f(-1)=0$, ed $-1\in\left]-\frac{5}{3},0\right[$, ed essendo strettamente crescente, risulterà $f(0+1)\cdot f\left(-\frac{5}{3}+1\right)<0$, ricorrono quindi tutte le ipotesi del teorema degli zeri, pertanto $\exists x_0\in\left]-\frac{5}{3},0\right[\ /\ f(x_0)=0$. Per cui sapendo che $|x_0-c_n|<c_n-a_n=\frac{b-a}{2^{n+1}}\leq 8^{-1}$, si ha $\frac{b-a}{2^{n+1}}\leq 8^{-1}\Leftrightarrow\frac{b-a}{8^{-1}}\leq 2^{n+1}\Leftrightarrow n\geq\frac{\log(b-a)8}{\log 2}-1$ quindi $n\geq\frac{\log\left(\left(\frac{5}{3}\right)8\right)}{\log 2}-1=2.74$ quindi, ponendo $n=3$ si trova il punto di approssimazione con un errore $\in\leq 8^{-1}$. Per semplificare i calcoli, sfruttiamo la stretta crescenza della funzione, ed il fatto che si annulla per $x=-1$.

N	A_n	c_n	b_n	$f(a_n)$	$f(c_n)$	$f(b_n)$
0	-5/3	-5/6	0	—	+	+
1	-5/3	-15/12	-5/6	—	—	+
2	-15/12	-25/24	-5/6	—	—	+
3	-25/24	-45/48	-5/6	—	+	+

che risulta essere $c_4 = -\frac{45}{48}$, in quanto $\left|-\frac{45}{48}+\frac{25}{24}\right| \le \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{5}{48} \le \frac{1}{8}$.

2. Data la seguente funzione $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{e^{senx}}}$ essendo il suo dominio non limitato superiormente, tanto è vero che $\frac{1}{\sqrt{e^{senx}}} > 0 \Leftrightarrow \forall x \in R$ in quanto $e^{senx} > 0 \Leftrightarrow \forall x \in R$; ma trattandosi di un limite di una funzione composta, e ricordando che $\nexists \lim_{x\to+\infty} senx$, pertanto la funzione non è *regolare* in $x_0 = +\infty$.

3. *Data la seguente funzione*: $x \to f(x) = x^2 \log^2 x$.
   I. *Dominio*:
   L'insieme di definizione della funzione *f* è: $]0,+\infty[$ e pertanto è:
   $$f : x \in]0,+\infty[\to x^2 \log^2 x$$
   II. *Segno*:
   risultando:
   $f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 \log^2 x > 0 \Leftrightarrow \log x \ne 0 = \log 1 \Leftrightarrow x > 0 \text{ e } x \ne 1 \Leftrightarrow x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$
   $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 \log^2 x = 0 \Leftrightarrow \log x = 0 = \log 1 \Leftrightarrow x = 1$
   $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$

   il grafico di *f* è al di sopra dell'asse delle *x* in $]0,1[$ ed in $]1,+\infty[$, ha in comune con gli assi il punto $(1, f(1)) = (1,0)$, 1 è un punto di minimo per *f*, 0 è il minimo di *f*

   III. *Asintoti*:
   essendo

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \log^2 x = \lim_{x\to 0} \frac{\log^2 x}{1/x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\log x/x}{-2/x^3} = -\lim_{x\to 0} \frac{\log x}{1/x^2} = -\lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-2/x^3} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 \log^2 x = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} x \log^2 x = +\infty$

   il grafico di *f* non ha asintoti.

   IV. *Monotonia*:

   Essendo: $f'(x) = D(x^2 \log^2 x) = D(x \log x)^2 = 2x \log x(\log x + 1)$ se $x \in]0,+\infty[$

è:

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow 2x\log x(\log x+1)>0 \Leftrightarrow \log x(\log x+1)>0 \Leftrightarrow (\log x>0 \text{ e } \log x+1>0) \text{ o } (\log x<0 \text{ e } \log x+1<0) \Leftrightarrow \log x>0=\log 1 \text{ o } \log x<-1=\log e^{-1} \Leftrightarrow x>1 \text{ o } 0<x<e^{-1} \Leftrightarrow x\in \left]0,e^{-1}\right[\cup\left]1,+\infty\right[$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x\log x(\log x+1)=0 \Leftrightarrow \log x=0=\log 1 \text{ o } \log x=-1=\log e^{-1} \Leftrightarrow x=1 \text{ o } x=e^{-1}$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in \left]0,+\infty\right[-\left(\left]0,e^{-1}\right]\cup\left[1,+\infty\right[\right)=\left]e^{-1},1\right[$$

quindi f è strettamente crescente in $\left]0,e^{-1}\right]$ ed in $\left[1,+\infty\right[$, è strettamente decrescente in $\left[e^{-1},1\right]$, e^{-1} è un punto di massimo relativo proprio per f, 1 è un punto di minimo relativo proprio per f, ed il grafico di f passa per il punto $\left(e^{-1}, f\left(e^{-1}\right)\right)=\left(e^{-1},e^{-2}\right)$.

V. *Convessità*:

Risultando infine:

$$f''(x)=D2x\log x(\log x+1)=2(\log x(\log x+1)+\log x+1+\log x)=2\left(\log^2 x+3\log x+1\right) \text{ se } x\in\left]0,+\infty\right[$$

è:

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow 2\left(\log^2 x+3\log x+1\right)>0 \Leftrightarrow \log^2 x+3\log x+1>0 \Leftrightarrow \log x<\frac{-3-\sqrt{5}}{2}=\log e^{-\left(3+\sqrt{5}\right)/2} \text{ o } \log x>\frac{-3+\sqrt{5}}{2}=\log e^{-\left(3-\sqrt{5}\right)/2} \Leftrightarrow x\in\left]0,e^{-\left(3+\sqrt{5}\right)/2}\right[\cup\left]e^{-\left(3-\sqrt{5}\right)/2},+\infty\right[$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2\left(\log^2+3\log x+1\right)=0 \Leftrightarrow \log^2+3\log x+1=0 \Leftrightarrow \log x=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}=\log e^{-\left(3+\sqrt{5}\right)/2} \text{ o } \log x==\frac{-3+\sqrt{5}}{2}=\log e^{-\left(3-\sqrt{5}\right)/2} \Leftrightarrow x=e^{-\left(3+\sqrt{5}\right)/2} \text{ o } x=e^{-\left(3-\sqrt{5}\right)/2}$$

$$f''(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left]0,+\infty\right[-\left(\left]0,e^{-\left(3+\sqrt{5}\right)/2}\right]\cup\left[e^{-\left(3-\sqrt{5}\right)/2},+\infty\right[\right)=\left]e^{-\left(3+\sqrt{5}\right)/2},e^{-\left(3-\sqrt{5}\right)/2}\right[$$

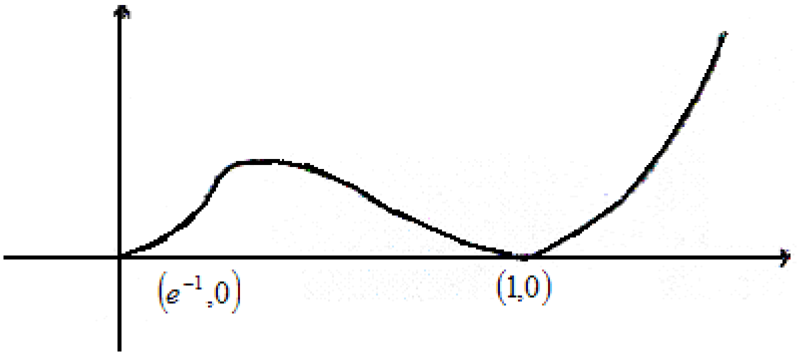
e pertanto f è strettamente convessa in $\left]0,e^{-\left(3+\sqrt{5}\right)/2}\right]$ ed in $\left[e^{-\left(3-\sqrt{5}\right)/2},+\infty\right[$, è strettamente concava in $\left[e^{-\left(3+\sqrt{5}\right)/2},e^{-\left(3-\sqrt{5}\right)/2}\right]$.

VI. *Punti di flesso*:

$e^{-\left(3+\sqrt{5}\right)/2}$ e $e^{-\left(3-\sqrt{5}\right)/2}$ sono due punti di flesso proprio per f ed il grafico di f passa per i punti $\left(e^{-\left(3+\sqrt{5}\right)/2}, f\left(e^{-\left(3+\sqrt{5}\right)/2}\right)\right)=\left(e^{-\left(3+\sqrt{5}\right)/2},e^{-\left(3+\sqrt{5}\right)}\left(7+3\sqrt{5}\right)/2\right)$ e $\left(e^{-\left(3-\sqrt{5}\right)/2}, f\left(e^{-\left(3-\sqrt{5}\right)/2}\right)\right)==\left(e^{-\left(3-\sqrt{5}\right)/2},e^{-\left(3-\sqrt{5}\right)}\left(7-3\sqrt{5}\right)/2\right)$.

Osserviamo da ultimo che, come è facile verificare, è: $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}<-1<\frac{-3+\sqrt{5}}{2}<0$ ed essendo la funzione esponenziale strettamente crescente è anche $e^{-\left(3+\sqrt{5}\right)/2}<e^{-1}<e^{-\left(3-\sqrt{5}\right)/2}<e^{0}=1$.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:



e quindi dedurre che:

$f(]0,+\infty[)=[0,+\infty[$, $f(]0,e^{-1}])=]0,e^{-2}]$, $f([e^{-1},1])=[0,e^{-2}]$, $f([1,+\infty[)=[0,+\infty[$, f non è biunivoca, la restrizione di f a $]0,e^{-1}]$ è biunivoca su $]0,e^{-2}]$ e la restrizione di f a $[e^{-1},1]$ è biunivoca su $[0,e^{-2}]$ e la restrizione di f a $[1,+\infty[$ è biunivoca su $[0,+\infty[$.

4. Data la seguente funzione $g(x)=\begin{cases} x+\frac{\pi}{2} & \text{se } x<0 \\ \pi & \text{se } x=0 \\ \arccos\frac{1}{x+1} & \text{se } x>0 \end{cases}$, con $\frac{1}{x+1}\in[-1,1]$ ovvero $-1\le\frac{1}{x+1}\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+1}-1\le 0 \\ e \\ \frac{1}{x+1}+1\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-x}{x+1}\le 0 \\ e \\ \frac{x+2}{x+1}\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall x\in\left]-\infty,-2\right]\cup\left[0,+\infty\right[$, quindi la funzione arcoseno è continua in $]0,+\infty[$; ed osservando che $g(0)=\pi$, che il $\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\arccos\frac{1}{x+1}=0$ ed il $\lim_{x\to 0^-} g(x)=\frac{\pi}{2}$, il punto 0 per la funzione data, è un punto di discontinuità di prima specie.

5. Data la funzione $p(x)=\frac{2x^3-3x+1}{x^2-2x+2}$, per calcolare l'area del rettangoloide della stessa, dobbiamo trovare le sue primitive, pertanto osservando che della funzione è possibile effettuare la divisione, si

ha $p(x)=\frac{2x^3-3x+1}{x^2-2x+2}=2x+4+\frac{x-7}{x^2-2x+2}$ pertanto $\int\frac{2x^3-3x+1}{x^2-2x+2}dx=2\int xdx+4\int dx+\int\frac{x-7}{x^2-2x+2}dx=x^2+4x+\int\frac{x-7}{x^2-2x+2}dx$ ed osservando che quest'ultimo integrale risulta $\int\frac{x-7}{x^2-2x+2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-14-2+2}{x^2-2x+2}dx$ quindi $\frac{1}{2}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx+\frac{1}{2}\int\frac{2-14}{x^2-2x+2}dx=\frac{1}{2}\log\left|x^2-2x+2\right|-6\int\frac{1}{x^2-2x+2}dx$, ed osservando ancora che essendo il delta dell'ultimo integrale negativo, possiamo scriverlo $\int\frac{1}{x^2-2x+2}dx=\int\frac{1}{1+(x-1)^2}dx=arctg(x-1)$; in definitiva si ha $\int\frac{2x^3-3x+1}{x^2-2x+2}dx=x^2+4x+\frac{1}{2}\log\left|x^2-2x+2\right|-6arctg(x-1)+c$, per cui l'area cercata sarà $\left[x^2+4x+\frac{1}{2}\log\left|x^2-2x+2\right|-6arctg(x-1)\right]_0^2=12-3\pi$.

6. Data la $\pi(x,y,z)=3x^2-3xy+2y^2+2x-6y-2z$ con vincolo massimo $x+y-z=100$, che possiamo esprime in funzione di due variabili, $x+y-z=100\Leftrightarrow z=x+y-100$, per cui la funzione diventa $\pi(x,y,h(x,y))=\rho(x,y)=3x^2-3xy+2y^2+2x-6y-2(x+y-100)$, ovvero $\rho(x,y)=3x^2-3xy+2y^2-8y+200$ il cui gradiente è $\nabla\delta(x,y)=\left(\delta'_x=6x-3y,\delta'_y=4y-3x-8\right)$, gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases}6x-3y=0\\4y-3x=8\end{cases}=\begin{cases}y=2x\\8x-3x=8\end{cases}=\begin{cases}y=\frac{16}{5}\\x=\frac{8}{5}\end{cases}$ e quindi il punto stazionario è $\left(\frac{8}{5},\frac{16}{5},-\frac{476}{5}\right)$ ed osservando l'Hessiano, dove $\delta''_{xx}=4$, $\delta''_{yy}=4$, $\delta''_{xy}=-3$ e $\delta''_{yx}=-3$, per cui $H_\delta(x,y)=\begin{vmatrix}6&-3\\-3&4\end{vmatrix}=24-9=15$, quindi il punto trovato $\left(\frac{8}{5},\frac{16}{5},-\frac{476}{5}\right)$ è di minimo, con un profitto complessivo $\pi(x,y,z)=3\left(\frac{8}{5}\right)^2-3\left(\frac{8}{5}\right)\left(\frac{16}{5}\right)+2\left(\frac{16}{5}\right)^2+2\left(\frac{8}{5}\right)-6\left(\frac{16}{5}\right)-2\left(-\frac{476}{5}\right)=187.2$.