Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
09 febbraio 2018
(prof. Bisceglia)

**Traccia F**

1. Determinare, *se possibile*, un punto di approssimazione con un errore $\varepsilon \le 8^{-1}$, dell'equazione $arcsen(x-1)=0$, nell'intervallo $\left[0,\frac{5}{3}\right]$.

2. Calcolare, *se possibile*, il seguente limite: $\lim_{x\to 1} arctg \frac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}}$.

3. Studiare la funzione $x \to f(x)=arc\cot g \frac{2}{1-x}$, e tracciarne approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione $g(x)=\begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{se } x \le 2 \\ arcsen\frac{1}{x-1} & \text{se } x>2 \end{cases}$, verificare la sua *continuità* nell'insieme di definizione.

5. Data la funzione $p(x)=\frac{x^2}{4+x^2}$, calcolare l'area del rettangoloide della funzione nell'intervallo $[0,2]$.

6. Data la funzione costi, $g(x,y,z)=4x^2-2xy+2y^2+3x+7y-2z$, nel rispetto di una *produzione limitata* a $x-y+z=100$, determinare la combinazione dei prodotti con *costo minimo*.

**Svolgimento traccia F**

1. Data la funzione $arcsen(x-1)$, funzione continua, definita in un intervallo chiuso e limitato, ed osservando che $f(1)=0$, ed $1\in\left]0,\frac{5}{3}\right[$, ed essendo strettamente crescente, risulterà $f(0)\cdot f\left(\frac{5}{3}\right)<0$, ricorrono quindi tutte le ipotesi del teorema degli zeri, pertanto $\exists x_0 \in \left],\frac{5}{3}\right[ / f(x_0)=0$. Per cui sapendo che $|x_0-c_n|<c_n-a_n=\frac{b-a}{2^{n+1}}\le 8^{-1}$, si ha $\frac{b-a}{2^{n+1}}\le 8^{-1} \Leftrightarrow \frac{b-a}{8^{-1}}\le 2^{n+1} \Leftrightarrow n\ge \frac{\log(b-a)8}{\log 2}-1$ quindi $n\ge\frac{\log\left(\left(\frac{5}{3}\right)8\right)}{\log 2}-1=2.74$ quindi, ponendo $n=3$ si trova il punto di approssimazione con un errore $\in\le 8^{-1}$. Per semplificare i calcoli, sfruttiamo la stretta crescenza della funzione, e che si annulla per $x=-1$.

| N | $A_n$ | $c_n$ | $b_n$ | $f(a_n)$ | $f(c_n)$ | $f(b_n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 5/6 | 5/3 | — | — | + |
| 1 | 5/6 | 15/12 | 5/3 | — | + | + |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 5/6 | 25/24 | 15/12 | — | + | + |
| 3 | 5/64 | 45/48 | 25/24 | — | — | + |

che risulta essere $c_4 = \frac{45}{48}$, in quanto $\left|\frac{45}{48} - \frac{25}{24}\right| \le \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{5}{48} \le \frac{1}{8}$.

2. Essendo $\lim_{x\to 1} arctg \frac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}}$ il limite di una funzione composta, e ricordando cha la funzione arcocotangente è definita $\forall x \in R$, e la funzione logaritmo per $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$ ed inoltre $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$, ed infine per la funzione radice risulta $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > 0 = \log_{\frac{1}{2}} 1 \Leftrightarrow x-1<1 \Leftrightarrow x<2$ pertanto il dominio risulta $\forall x \in R \cap \left]1,+\infty\right[ - \{2\} \cap \left]-\infty,2\right[ \Leftrightarrow \forall x \in \left]1,2\right[$ pertanto è possibile effettuare il limite assegnato in quanto 1 è un punto di accumulazione per il dominio; e trattandosi del limite di una funzione composta si ha $\lim_{x\to 1}(x-1)=0$ e conseguentemente $\lim_{y\to 0}\log_{\frac{1}{2}} y = +\infty$ pertanto $\lim_{z\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{z}}=0$ per cui risulta $\lim_{x\to 1} arctg \frac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}} = 0$.

3. *Data la seguente funzione*: $x \to f(x) = arc\cot g \frac{2}{1-x}$.

   I. *Dominio*:
   l'insieme dei valori della funzione *f* è incluso in $arc\cot g(R) = \left]0,\pi\right[$, quindi *f* è limitata e pertanto il grafico di *f* può avere solo asintoti orizzontali. Ricordando che la funzione arcocotangente è definita in *R*, l'insieme di definizione di *f* coincide con l'insieme di definizione di $x \to 2/(1-x)$ e quindi l'insieme di definizione di *f* è:
   $\{x \in R, 1-x \neq 0\}$ ed essendo $1-x \neq 0 \Leftrightarrow 1 \neq x \Leftrightarrow x \in R - \{1\} = \left]-\infty,1\right[ \cup \left]1,+\infty\right[$ è:
   $f: x \in \left]-\infty,1\right[ \cup \left]1,+\infty\right[ \to arc\cot g \frac{2}{1-x}$

   II. *Segno*:
   risultando, $f(x) > 0 \Leftrightarrow arctg \frac{2}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,1\right[ \cup \left]1,+\infty\right[$ ed inoltre $f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)<0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$ il grafico di *f* si trova al di sopra dell'asse delle *x* in $\left]-\infty,1\right[$ ed in $\left]1,+\infty\right[$, ha in comune con gli assi il punto $(0, f(0)) = (0, arc\cot g 2)$

   III. *Asintoti*:
   essendo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} arc\cot g \frac{2}{1-x} = arc\cot g 0 = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} arc\cot g \frac{2}{1-x} = \lim_{y\to+\infty} arc\cot g y = 0,$$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} arc\cot g\frac{2}{1-x} = \lim_{y\to -\infty} arc\cot gy = \pi$ e

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} arc\cot g\frac{2}{1-x} = arc\cot g0 = \frac{\pi}{2}$ il grafico di *f* ha un solo asintoto: la retta di equazione $y = \frac{\pi}{2}$ asintoto orizzontale a sinistra e a destra.

IV. *Monotonia*: Essendo:

$$f'(x) = Darc\cot g\frac{2}{1-x} = \frac{-1}{1+\frac{4}{(1-x)^2}}\cdot\frac{-2}{(1-x)^2} = \frac{-2}{x^2-2x+5}$$ se $x \in \left]-\infty,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$ e

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-2}{x^2-2x+5} > 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2}{x^2-2x+5} = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$ ed inoltre essendo il denominatore sempre positivo risulta $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$ quindi *f* è strettamente decrescente in $\left]-\infty,1\right[$ ed in $\left]1,+\infty\right[$.

V. *Convessità*:
Risultando infine:

$$f''(x) = D\frac{-2}{x^2-2x+5} = \frac{4(x-1)}{(x^2-2x+5)^2}$$ se $x \in \left]-\infty,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$ è:

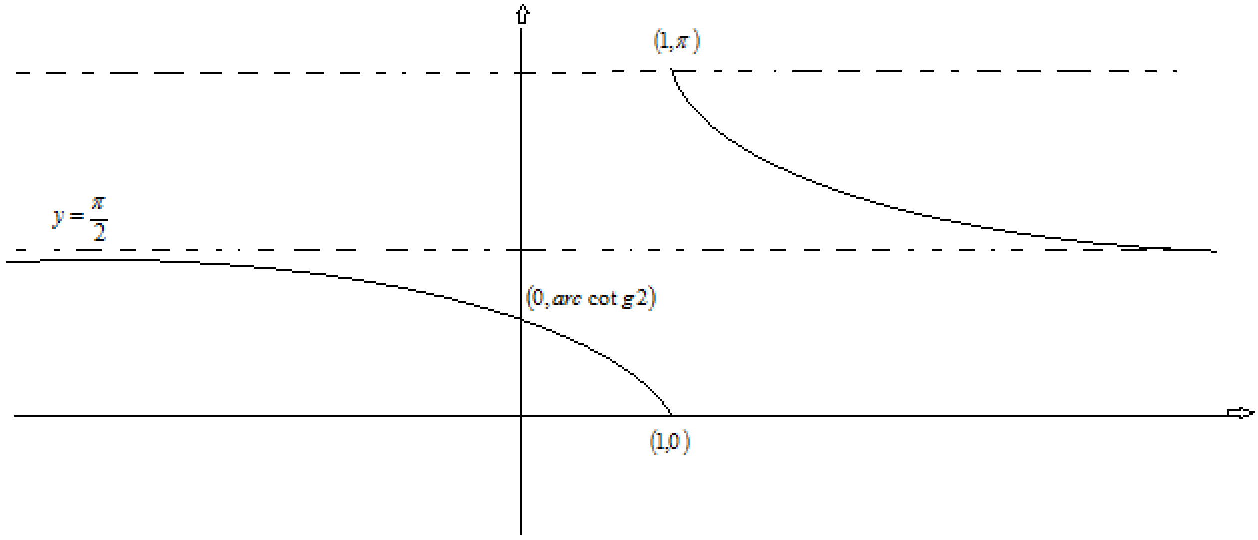
$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in R-\{1\}$ e $\frac{4(x-1)}{(x^2-2x+5)^2} > 0 \Leftrightarrow x \in R-\{1\}$ e $x > 1 \Leftrightarrow x \in \left]1,+\infty\right[$,

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x \in R-\{1\}$ e $\frac{4(x-1)}{(x^2-2x+5)^2} = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$,

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[-\left]1,+\infty\right[=\left]-\infty,1\right[$ e pertanto la funzione *f* è strettamente convessa in $\left]1,+\infty\right[$ e strettamente concava in $\left]-\infty,1\right[$.

VI. *Punti di flesso*: anche se $\exists$ un intorno sinistro di 1 in cui la funzione è strettamente concava ed $\exists$ un intorno destro di 1 in cui la funzione è strettamente convessa, non essendo definita nel punto 1, non esistono punti di flesso.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:




e quindi dedurre che:

$f(]-\infty,1[\cup]1,+\infty[) = ]0,\pi/2,[\cup]\pi/2,\pi[$ , $f(]-\infty,1[) = ]-0,\pi/2[$ , $f(]1,+\infty[) = ]\pi/2,\pi[$ , $f$ è biunivoca su $]0,\pi/2,[\cup]\pi/2,\pi[$, $\inf_{x\in R-\{1\}} f(x)=0$ e $\sup_{x\in R-\{1\}} f(x)=\pi$ .

OSSERVAZIONE. È facile rendersi conto che $f$ è $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$-simmetrica, quindi avremmo potuto limitarci a tracciare il grafico $G$ della restrizione di $f$ a $]1,+\infty[$ e completare il grafico di $f$ unendo a $G$ la curva $G'$ simmetrica di $G$ rispetto al punto $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$.

4. Data la seguente funzione $g(x)=\begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{se } x\le 2 \\ arcsen\frac{1}{x-1} & \text{se } x>2 \end{cases}$, di cui la funzione arcoseno è definita $\frac{1}{x-1}\in[-1,1]$ ovvero $-1\le\frac{1}{x-1}\le 1$; per cui $\frac{1}{x-1}\le 1 \Leftrightarrow \frac{2-x}{x-1}\le 0 \Leftrightarrow \forall x\in(]-\infty,1[\cup[2,+\infty[)$ ed $-1\le\frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x}{x-1}\ge 0 \Leftrightarrow \forall x\in(]-\infty,0]\cup]1,+\infty[)$, quindi la funzione arcoseno è definita $\forall x\in(]-\infty,0]\cup[2,+\infty[)$, ed osservando che $g(2)=-\frac{\pi}{2}$, il $\lim_{x\to 2^+} g(x)=\lim_{x\to 2^+} arcsen\frac{1}{x-1}=\frac{\pi}{2}$ ed il $\lim_{x\to 2^-} g(x)=-\frac{\pi}{2}$, il punto 2 per la funzione data, è un punto di si continuità di prima specie.

5. Data la funzione $h(x)=\frac{x^2}{4+x^2}$ , per calcolare l'area del rettangoloide della stessa, dobbiamo trovare le sue primitive, quindi $\int\frac{x^2}{4+x^2}dx=\int\frac{x^2+4-4}{4+x^2}dx=\int dx-\int\frac{4}{4+x^2}dx$, ed osservando

che il secondo integrale può essere ricondotto $2\int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx$ , quindi $\int \frac{x^2}{4+x^2}dx = x-2arctg\frac{x}{2}+c$ , per cui l'area cercata sarà $\left[x-2arctg\frac{x}{2}\right]_0^2 = 2-2arctg1 = 2-\frac{\pi}{2}$.

6. Data la $g(x,y,z)=4x^2-2xy+2y^2+3x+7y-2z$ con vincolo massimo $x-y+z=100$, che possiamo esprime in funzione di due variabili, $x-y+z=100 \Leftrightarrow z=100-x+y$, per cui la funzione diventa $g(x,y,h(x,y))=\delta(x,y)=4x^2-2xy+2y^2+3x+7y-2(100-x+y)$ , ovvero $\delta(x,y)=4x^2-2xy+2y^2+5x+5y-200$ il cui gradiente è $\nabla\delta(x,y)=(\delta'_x=8x-2y+5, \delta'_y=4y-2x+5)$, gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases}8x-2y+5=0\\4y-2x+5=0\end{cases}=\begin{cases}y=4x+\frac{5}{2}\\16x+10-2x+5=0\end{cases}=\begin{cases}y=-\frac{25}{14}\\x=-\frac{15}{14}\end{cases}$ e quindi il punto stazionario è $\left(-\frac{15}{14},-\frac{25}{14}\right)$ e se osserviamo l'Hessiano, per cui $\delta''_{xx}=8$, $\delta''_{yy}=4$, $\delta''_{xy}=-2$ e $\delta''_{yx}=-2$ , per cui $H_\delta(x,y)=\begin{vmatrix}8 & -2\\-2 & 4\end{vmatrix}=32-4=28$ , quindi la natura del punto $\left(-\frac{15}{14},-\frac{25}{14}\right)$ e di minimo, che nel vincolo forniscono $z=100+\frac{15}{14}-\frac{25}{14}=\frac{1390}{14}$ e danno un costo complessivo $g(x,y,z)=4\left(-\frac{15}{14}\right)^2-2\left(-\frac{15}{14}\right)\left(-\frac{25}{14}\right)+2\left(-\frac{25}{14}\right)^2+3\left(-\frac{15}{14}\right)+7\left(-\frac{25}{14}\right)-2\left(\frac{1390}{14}\right)=-207{,}14$
.

**Traccia N**

1. Data la funzione $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{arctgx}}$, dire se è *regolare* in $x_0=+\infty$ e se è *convergente* o *divergente* in $x_0=+\infty$.

2. Data la funzione $h(x)=\sqrt[3]{x-1}$, verificare la sua *derivabilità* nel punto $x=1$.

3. *Studiare* la funzione $x\to f(x)=arctg\frac{1+x^2}{1-x^2}$, e *tracciarne* approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione $g: x\in[-1,1]\to\begin{cases}x^2\cos(1-x^2) & x\in]-1,1[\\ h & x=\{-1,1\}\end{cases}$, dire, per quali valori del parametro $h$ soddisfa le ipotesi del *Teorema* del *Punto Fisso*.

5. Data la funzione $p(x)=\log(1+x^2)$, calcolare *una primitiva* $P$; calcolare il *valor medio* in $[0,2]$ e servendosi dell'apposito teorema, far vedere che il *valor medio* $\in[0,2]$.

6. Data la funzione $f(x,y)=x^2+y^2+y-1$, con vincolo $x^2+y^2=1$, determinare il suo *gradiente*, eventuali *punti estremanti* e *classificarli*, (A.A. 2016/2017 in poi).

**Svolgimento traccia N**

1. Data la seguente funzione $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{arctgx}}$ essendo il suo dominio non limitato superiormente, in quanto la funzione arcotangente è definita in *R*, e la funzione radice $arctgx>0=arctgtg0\Leftrightarrow x>tg0=0$ quindi $\forall x\in R\cap]0,+\infty[\Leftrightarrow\forall x\in]0,+\infty[$, pertanto la funzione è *regolare* in $x_0=+\infty$; e trattandosi di un limite di una funzione composta, si ha che: $\lim_{y\to+\infty}arctgx=\frac{\pi}{2}$, conseguentemente $\lim_{y\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$, per cui per il *teorema del limite di funzione composta*, risulta la seguente convergenza della funzione data: $\lim_{z\to\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}}\log_{\frac{1}{2}}z=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

2. Data la funzione $h(x)=\sqrt[3]{x-1}$, la sua funzione derivata prima risulta $h'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ definita $\forall x\in R-\{1\}$; pertanto verifichiamo la sua derivabilità nel punto $x=1$, per cui deve $\exists\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\in R$, ed essendo $\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt[3]{x-1}-0}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{(x-1)^{1-\frac{1}{3}}}=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=+\infty$ ed

$\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt[3]{x-1}-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{(x-1)^{1-\frac{1}{3}}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=+\infty$, la funzione è solo *dotata di derivata* in $x=1$.

3. Data la funzione $x\to f(x)=arctg\,\frac{1+x^2}{1-x^2}$

I. *Dominio*: L'insieme dei valori della funzione *f* è incluso in $arctg(R)=\left]-\pi/2,\pi/2\right[$, quindi *f* è limitata e pertanto il grafico di *f* può avere solo asintoti orizzontali. Ricordando che la funzione arcotangente è definita in *R*, l'insieme di definizione di *f* coincide con l'insieme di definizione di $x\to\left(1+x^2\right)/\left(1-x^2\right)$ e quindi l'insieme di definizione di $f$ è: $\left\{x\in R, 1-x^2\neq 0\right\}$ ed essendo $1-x^2\neq 0\Leftrightarrow\ \Leftrightarrow x^2\neq 1\Leftrightarrow x\neq -1$ e $x\neq 1\Leftrightarrow x\in R-\{-1,1\}=\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$ è: $f: x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[\to arctg\,\frac{1+x^2}{1-x^2}$.

II. *Segno*: sia e risultando: $f(x)>0\Leftrightarrow arctg\,\frac{1+x^2}{1-x^2}>0\Leftrightarrow\frac{1+x^2}{1-x^2}>0\Leftrightarrow 1-x^2>0\Leftrightarrow x^2-1<0\Leftrightarrow x\in\left]-1,1\right[$ ,

$f(x)=0\Leftrightarrow arctg\,\frac{1+x^2}{1-x^2}=0\Leftrightarrow\frac{1+x^2}{1-x^2}=0\Leftrightarrow 1+x^2=0\Leftrightarrow x\in\varnothing$

$f(x)<0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[-\left]-1,1\right[=\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$ il grafico di *f* è al di sopra dell'asse delle *x* in $\left]-1,1\right[$, è al di sotto dell'asse delle *x* in $\left]-\infty,-1\right[$ ed in $\left]1,+\infty\right[$ ed ha in comune con gli assi il punto $(0,f(0))=(0,arctg1)=(0,\pi/4)$

III. *Asintoti*: ed essendo: $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}arctg\,\frac{1+x^2}{1-x^2}=\lim_{x\to-\infty}arctg\,\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}-1}=arctg(-1)=-\pi/4$,

$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}arctg\,\frac{1+x^2}{1-x^2}=\lim_{y\to-\infty}arctgy=-\pi/2$ ,

$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}arctg\,\frac{1+x^2}{1-x^2}=\lim_{y\to+\infty}arctgy=\pi/2$ ,

$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}arctg\,\frac{1+x^2}{1-x^2}=\lim_{y\to+\infty}arctgy=\pi/2$ ,

$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}arctg\,\frac{1+x^2}{1-x^2}=\lim_{y\to-\infty}arctgy=-\pi/2$ e

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}arctg\,\frac{1+x^2}{1-x^2}=\lim_{x\to+\infty}arctg\,\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}-1}=arctg(-1)=-\pi/4$ il grafico di *f* ha un solo asintoto: la retta di equazione $y=-\pi/4$ asintoto orizzontale a sinistra e a destra.

IV. *Monotonia*: essendo

$$f'(x)=\frac{1}{1+\frac{\left(1+x^2\right)^2}{\left(1-x^2\right)^2}}\cdot\frac{2x\left(1-x^2\right)+2x\left(1+x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{2x}{1+x^4}\quad \text{se } x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$$

è

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$ e $x>0 \Leftrightarrow x\in\left]0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$ e $x=0 \Leftrightarrow x=0$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[-\left[0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[=\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,0\right[$ *f* è strettamente crescente in $\left]0,1\right[$ ed in $\left]1,+\infty\right[$, è strettamente decrescente in $\left]-\infty,-1\right[$ ed in $\left]-1,0\right[$ e quindi zero è un punto di minimo relativo proprio per *f*.

V. *Convessità*: risultando infine:

$$f''(x)=D\frac{2x}{1+x^4}=2\frac{1+x^4-4x^3\cdot x}{\left(1+x^4\right)^2}=2\frac{1-3x^4}{\left(1+x^4\right)^2}\qquad \text{se } x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$$

è: $f''(x)>0 \Leftrightarrow x\neq-1$ e $x\neq1$ e $1-3x^4>0 \Leftrightarrow x\neq-1$ e $x\neq1$ e $\left(1+\sqrt{3}x^2\right)\left(1-\sqrt{3}x^2\right)<$ $<0 \Leftrightarrow x\neq-1$ e $x\neq1$ e $\sqrt{3}x^2-1<0 \Leftrightarrow x\neq-1$ e $x\neq1$ e $x\in\left]-1/\sqrt[4]{3},1/\sqrt[4]{3}\right[\Leftrightarrow x\in\left]-1/\sqrt[4]{3},1/\sqrt[4]{3}\right[$

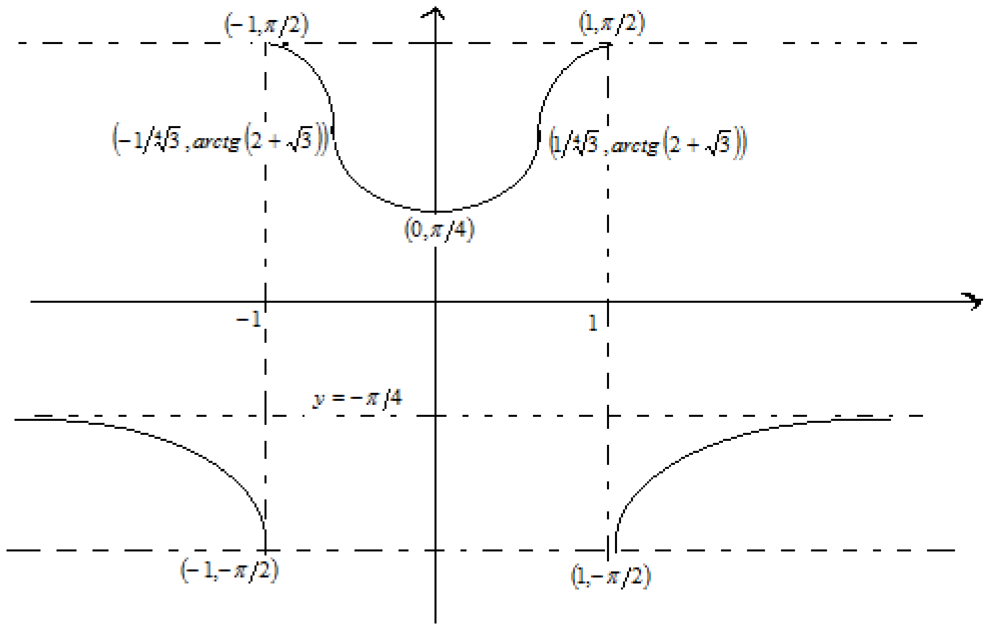
$f''(x)=0 \Leftrightarrow x\neq-1$ e $x\neq1$ e $1-3x^4=0 \Leftrightarrow x=-1/\sqrt[4]{3}$ o $x=1/\sqrt[4]{3}$

$f''(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[-\left[-1/\sqrt[4]{3},1/\sqrt[4]{3}\right]=\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,-1/\sqrt[4]{3}\right[\cup\left]1/\sqrt[4]{3},1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

*f* è strettamente convessa in $\left[-1/\sqrt[4]{3},1/\sqrt[4]{3}\right]$, è strettamente concava in $\left]-\infty,-1\right[$, in $\left]-1,-1/\sqrt[4]{3}\right[$ in $\left]1/\sqrt[4]{3},1\right[$ ed in $\left]1,+\infty\right[$.

VI. *Punti di flesso*: pertanto $\exists$ un intorno sinistro di $-1/\sqrt[4]{3}$ in cui la funzione è strettamente concava, ed $\exists$ un intorno destro di $-1/\sqrt[4]{3}$ in cui la funzione è strettamente convessa; così come $\exists$ un intorno sinistro di $1/\sqrt[4]{3}$ in cui la funzione è strettamente convessa, ed $\exists$ un intorno destro di $1/\sqrt[4]{3}$ in cui la funzione è strettamente concava; quindi i punti $-1/\sqrt[4]{3}$ e $1/\sqrt[4]{3}$ sono due punti di flesso proprio per *f* ed il grafico di *f* passa per i punti $\left(-1/\sqrt[4]{3},\, f\left(-1/\sqrt[4]{3}\right)\right)=\left(-1/\sqrt[4]{3},\, arctg\,\frac{1+1/\sqrt{3}}{1-1/\sqrt{3}}\right)=\left(-1/\sqrt[4]{3},\, arctg\left(2+\sqrt{3}\right)\right)$ e $\left(1/\sqrt[4]{3},\, f\left(1/\sqrt[4]{3}\right)\right)=$ $=\left(1/\sqrt[4]{3},\, arctg\left(2+\sqrt{3}\right)\right)$..

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:




e quindi dedurre che:

$f(R-\{-1,1\}) = \left]-\pi/2,-\pi/4\right[ \cup \left[\pi/4,\pi/2\right[$ , $f(\left]-\infty,-1\right[) = f(\left]1,+\infty\right[) = \left]-\pi/2,-\pi/4\right[$ , $f(\left]-1,0\right]) = f(\left[0,1\right[) = \left[\pi/4,\pi/2\right[$, $f$ non è biunivoca, le restrizioni di $f$ a $\left]-\infty,-1\right[$ ed a $\left]1,+\infty\right[$ sono entrambe biunivoche su $\left]-\pi/2,-\pi/4\right[$, le restrizioni di $f$ a $\left]-1,0\right]$ ed a $\left[0,1\right[$ sono entrambe biunivoche su $\left[\pi/4,\pi/2\right[$.

OSSERVAZIONE. È immediato rendersi conto che $f$ è una funzione pari quindi avremmo potuto limitarci a tracciare il grafico $G$ della restrizione di $f$ a $\left[0,1\right[ \cup \left]1,+\infty\right[$ e completare il grafico di $f$ unendo a $G$ la curva $G'$ simmetrica di $G$ rispetto all'asse delle $x$.

4. Data la funzione $g: x \in [-1,1] \rightarrow \begin{cases} x^2\cos(1-x^2) & x \in \left]-1,1\right[ \\ h & x = \{-1,1\} \end{cases}$, essendo $g$ evidentemente continua in $\left]-1,1\right[$ , si osserva che $\lim\limits_{x\to -1^+} x^2\cos(1-x^2) = 1$ ed $\lim\limits_{x\to 1^-} x^2\cos(1-x^2) = 1$ inoltre essendo $g(-1) = g(1) = h$, la funzione risulterà continua anche in $\{-1,1\}$ per il parametro $h=1$, ed in tale ipotesi $h \in [-1,1] \Leftrightarrow \{g(-1), g(1)\} \subseteq [-1,1]$, quindi la funzione soddisferebbe tutte le ipotesi del *Teorema* del *Punto Fisso*.

5. Data la funzione, $g(x) = \log(1+x^2)$, l'insieme delle primitive è dato dal seguente integrale, risolto per parte, $\int \log(1+x^2)dx = x\log(1+x^2) - \int \frac{2x^2+1-1}{1+x^2}dx = x\log(1+x^2) - 2\int dx + 2\int \frac{1}{1+x^2}dx$ , ovvero $x\log(x^2+1) - 2x + 2arctgx + c$ .Il valor medio $v_m$ in $[0,2]$ , sarà: $\frac{1}{2}\int_0^2 \log(1+x^2)dx = \frac{1}{2}\left[x\log(1+x^2) - 2x + 2arctgx\right]_0^2 = \frac{1}{2}(2\log 5 - 4 + 2arctg2)$. Conseguentemente possiamo affermare che il $v_m$ è un valore assunto dalla funzione, per il Teorema della Media per gli

integrali definiti, data una funzione, $f:[a,b]\to R$, sia $f$ continua in $[a,b]$, allora $\exists c\in[a,b]$ tale che $\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$, pertanto se $b>a$, si ha $f(c)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}=v_m$.

6. Data la $f(x,y)=x^2+y^2+y-1$ con vincolo $x^2+y^2=1$, che possiamo esprime in funzione di una variabile, $x^2+y^2=1\Leftrightarrow g(y)=x^2=1-y^2$, per cui la funzione diventa $h(y)=f(g(y),y)=1-y^2+y^2+y-1=y$, quindi per $y\in[-1,1]$, i valori che assume la funzione *f* sono dati dalla funzione *h* e sia nel punto $h(1)=1$, conseguentemente $x^2+1^2=1\Leftrightarrow x=0$, così come $h(-1)=-1$ e conseguentemente $x^2+(-1)^2=1\Leftrightarrow x=0$. Se consideriamo ora il gradiente della funzione $f(x,y)=x^2+y^2+y-1$ $\nabla f(x,y)=\left[f_x(x,y),f_y(x,y)\right]=[2x,2y+1]$, gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} f'_x(x,y)=0\Leftrightarrow 2x=0 \\ f'_y(x,y)=0\Leftrightarrow 2y+1=0\end{cases}=\begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{1}{2}\end{cases}$ e quindi l'unico punto stazionario interno è $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$; quindi i tre punti candidati sono $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$, $(0,1)$ e $(0,-1)$, che assumono valori: $f\left(0,-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{4}$, che risulta essere il minimo assoluto; $f(0,1)=1$ valore massimo assoluto, ed $f(0,-1)=-1$ punto intermedio.