Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
09 gennaio 2019
(prof. Bisceglia)

Traccia A

1. Determinare, *se possibile*, un punto di approssimazione con un errore $\in \leq 10^{-1}$, dell'equazione $\log(2x-1)=0$, nell'intervallo $\left[\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right]$.

2. Calcolare, *se possibile*, il seguente limite: $\lim_{x\to+\infty} arctg\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)\cdot x$.

3. Studiare la funzione $x \to f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x+1}$, e tracciarne approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione $g(x)=\arccos(3x+1)$, verificare la *derivabilità* nel suo dominio.

5. Data la funzione $p(x)=\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$, calcolare la primitiva P_0, nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

6. Data la matrice incompleta $A=\begin{pmatrix}1 & k\\ 2 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ ed il vettore $b=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$, studiare il sistema $A\alpha=b$ nella variabile presente.

Svolgimento traccia A

1. Data la funzione $f(x)=\log(2x-1)$, continua nel suo insieme di definizione, ed essendo $f\left(\frac{3}{2}\right)\cdot f\left(\frac{5}{3}\right)>0$, l'equazione $\log(2x-1)=0$ non ammette soluzioni nell'intervallo $\left[\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right]$, in quanto non ricorrono tutte le ipotesi del Teorema degli Zeri, pertanto $\nexists x_0 \in \left]\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right[\ / \ f(x_0)=0$.

2. Essendo $\lim_{x\to+\infty} arctg\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)\cdot x$ il limite di una funzione composta, e ricordando cha la funzione arcotangente è definita $\forall x \in R$, e che la funzione $f(x)=3^{\frac{1}{x}}-1$ e definita $\forall x \in R-\{0\}$, quindi il dominio risulta $\forall x \in R-\{0\}$, pertanto è possibile effettuare il limite assegnato in quanto il dominio non è limitato superiormente. E trattandosi di un limite notevole del tipo $\frac{arctg(f(x))}{f(x)}$, pertanto

osservando che $arctg\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)\cdot x=\dfrac{arctg\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)}\cdot\dfrac{\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{1}{x}x$; allora

$$\lim_{x\to+\infty} arctg\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)\cdot x=\lim_{x\to+\infty}\frac{arctg\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)}\cdot\frac{\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x}x=\log 3.$$

3. Data la funzione $x\to f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x+1}$

Insieme di definizione:

Essendo una funzione razionale, il numeratore è definito $x+2\geq 0\Leftrightarrow x\in[-2,+\infty[$,

il denominatore $\forall x\in R-\{-1\}$,

pertanto $X=[-2,+\infty[\cap(R-\{1\})=[-2,-1[\cup]-1,+\infty[$

Quindi tale funzione è definita $\forall x\in[-2,-1[\cup]-1,+\infty[$, ovvero

$$f:[-2,-1[\cup]-1,+\infty[\to f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x+1}\in R$$

Segno della funzione:

Essendo il numeratore sempre positivo, vedere dove $f(x)>0\Leftrightarrow x+1>0\Leftrightarrow x>-1$

Pertanto $f(x)>0\Leftrightarrow x\in]-1,+\infty[\cap X=]-1,+\infty[$

Conseguentemente $f(x)<0\Leftrightarrow x\in]-\infty,-1[\cap X=]-2,-1[$

Si osserva che $f(-2)=0$, quindi tocca il punto $(-2,0)$. Mentre $f(0)=\sqrt{2}$ pertanto passa per il punto $(0,\sqrt{2})$.

Limiti significativi:

Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare il limite nel punto di accumulazione che non appartiene al dominio e nell'estremo superiore.

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\sqrt{x+2}\lim_{x\to-1^-}\frac{1}{x+1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}\sqrt{x+2}\lim_{x\to-1^+}\frac{1}{x+1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+2}}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 0$$

Pertanto la retta $x=1$ è un asintoto verticale a destra ed a sinistra, mentre le retta $y=0$ è un asintoto orizzontale a destra.

Derivata prima e monotonia:

$$f'(x) = \frac{\frac{x+1}{2\sqrt{x+2}} - \sqrt{x+2}}{(x+1)^2} = \frac{x+1-2(x+2)}{(x+1)^2 2\sqrt{x+2}} = \frac{-x-3}{(x+1)^2 2\sqrt{x+2}} = -\frac{x+3}{(x+1)^2 2\sqrt{x+2}}$$., quindi

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{x+3}{(x+1)^2 2\sqrt{x+2}} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+3}{(x+1)^2 2\sqrt{x+2}} < 0$, pertanto essendo il denominatore sempre positivo nell'insieme di definizione della funzione, tranne nel punto -2, è sufficiente studiare $x+3<0 \Leftrightarrow x<-3 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-3\right[\cap X = \varnothing$, ed osservare che $-\lim_{x\to-2^+} \frac{x+3}{(x+1)^2 2\sqrt{x+2}} = -\infty$ conseguentemente la funzione è strettamente decrescente nel suo dominio.

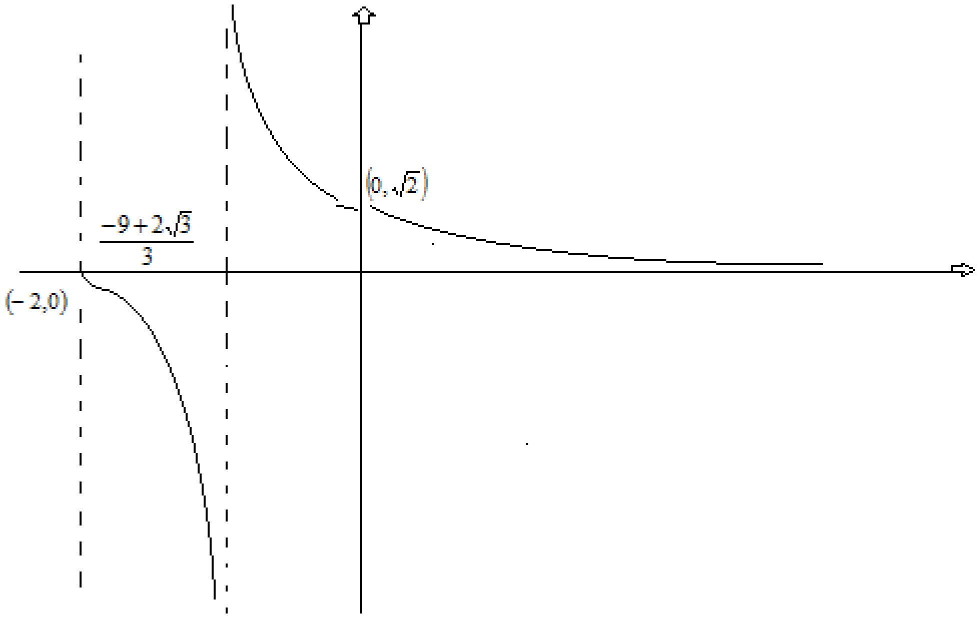
Derivata seconda e concavità:

$$f''(x) = -\frac{(x+1)^2 2\sqrt{x+2} - (x+3)\left[2(x+1)2\sqrt{x+2} + \frac{2(x+1)^2}{2\sqrt{x+2}}\right]}{\left((x+1)^2 2\sqrt{x+2}\right)^2} =$$

$$= -\frac{(x+1)^2 2(x+2) - (x+3)2(x+1)2(x+2) - (x+3)(x+1)^2}{\left((x+1)^2 2\sqrt{x+2}\right)^2 \sqrt{x+2}} =$$

$$= -\frac{(x+1)\left(-3x^2 - 18x - 23\right)}{\left((x+1)^2 2\sqrt{x+2}\right)^2 \sqrt{x+2}} = \frac{(x+1)\left(+3x^2 + 18x + 23\right)}{\left((x+1)^2 2\sqrt{x+2}\right)^2 \sqrt{x+2}}$$, pertanto essendo il denominatore

sempre positivo nell'insieme di definizione della funzione, per studiare $f''(x) > 0$ è sufficiente studiare $(x+1)\left(+3x^2 + 18x + 23\right) > 0$, per cui essendo il delta del polinomio di secondo grado positivo, $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-2, \frac{-9+2\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]-1,+\infty\right[$ pertanto la funzione è strettamente convessa in $\forall x \in \left]-2, \frac{-9+2\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]-1,+\infty\right[$ mentre è strettamente concava in $\forall x \in \left]\frac{-9+2\sqrt{3}}{3}, -1\right[$ con punto di flesso proprio in $\frac{-9+2\sqrt{3}}{3}$.



e quindi dedurre che:

$f([-2,-1[\cup]-1,+\infty[)=R$, $f([-2,-1[)=[0,-\infty[$, $f([-1,+\infty[)=]0,+\infty[$, f è biunivoca su R.

4. Data la funzione $f(x)=\arccos(3x+1)$, definita $\forall x\in\left[-\frac{2}{3},0\right]$, pertanto osservando che la sua funzione derivata prima risulta $f'(x)=\frac{-3}{\sqrt{1-(3x+1)^2}}$ definita $1-(3x+1)^2\neq 0\Leftrightarrow|3x+1|\neq 1\Leftrightarrow\begin{cases}3x+1\neq 1\\3x+1\neq -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\x\neq -\frac{2}{3}\end{cases}$ quindi $\forall x\in\left]-\frac{2}{3},0\right[$; pertanto la funzione f è derivabile $\forall x\in\left]-\frac{2}{3},0\right[$; quindi verifichiamo l'esistenza della derivata nei punti $x=-\frac{2}{3}$ ed $x=0$, per cui, servendoci della conseguenza del Teorema di Lagrange, $\exists\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$, allora $\exists f'_d(x_0)$; infatti si osserva che essendo $\lim\limits_{x\to-\frac{2}{3}^+}\frac{-3}{\sqrt{1-(3x+1)^2}}=-\infty$ ed analogamente $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-3}{\sqrt{1-(3x+1)^2}}=-\infty$, la funzione *è dotata di derivata* in $x=-\frac{2}{3}$ e risulta $f'_d\left(-\frac{2}{3}\right)=-\infty$ ed *è dotata di derivata* in $x=0$ e risulta $f'_s(0)=-\infty$.

5. Si tratta di risolvere il seguente integrale definito $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$, ed essendo una primitiva di $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2} arcsen 2x + c$, per il teorema Fondamentale del calcolo integrale, si ha:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \left[\frac{1}{2} arcsen 2x + c\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2} arcsen(1) + c\right) - \left(\frac{1}{2} arcsen(-1) + c\right) = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

6. Si tratta di trovare delle soluzioni al sistema $A\alpha = b$; per cui si osserva che essendo $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, il suo determinante è $\det(A') = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$ mentre il $\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & k & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - k\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4k - 1$; quindi per $k \neq \frac{1}{4}$ $Car(A) = 2 \neq Car(B) = 3$, pertanto il sistema è incompatibile; mentre $k = \frac{1}{4}$, $Car(A) = Car(B) = 2 = r$ il numero delle incognite, pertanto il sistema diventa di Cramer, compatibile ed ammette una sola soluzione ovvero $\begin{cases} 2x = 1 \\ 2x + y = -1 \end{cases} = \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -2 \end{cases}$.

Traccia B

1. Determinare, *se possibile*, un punto di approssimazione con un errore $\in \leq 9^{-1}$, dell'equazione $\log_{\frac{3}{4}}(3x-2) = 0$, nell'intervallo $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right]$.

2. Calcolare, *se possibile*, il seguente limite: $\lim_{x \to +\infty} arcsen\left(2^{\frac{1}{x}} - 1\right) \cdot x$.

3. *Studiare* la funzione $x \to f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - 4}}$, e *tracciarne approssimativamente* il grafico.

4. Data la funzione $g(x) = arcsen(2x+1)$, verificare la *derivabilità* nel suo dominio.

5. Data la funzione $p(x) = \frac{1}{1+3x^2}$, calcolare *la primitiva* P_0, nell'intervallo $[0,1]$.

6. Data la matrice incompleta $A=\begin{pmatrix}1 & k\\ 2 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ ed il vettore $b=\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$, studiare il sistema $A\alpha=b$ nella variabile presente.

Svolgimento traccia B

1. Data la funzione $f(x)=\log_{\frac{3}{4}}(3x-2)$, continua nel suo insieme di definizione, ed essendo $f\left(\frac{3}{2}\right)\cdot f\left(\frac{5}{3}\right)>0$, l'equazione $\log_{\frac{3}{4}}(3x-2)=0$ non ammette soluzioni nell'intervallo $\left[\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right]$, in quanto non ricorrono tutte le ipotesi del Teorema degli Zeri, pertanto $\nexists x_0\in\left]\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right[\ /\ f(x_0)=0$.

2. Essendo $\lim\limits_{x\to+\infty} arcsen\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)\cdot x$ il limite di una funzione composta, e ricordando cha la funzione arcoseno è definita $\forall x\in[-1,1]\Leftrightarrow\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)\in[-1,1]\Leftrightarrow\begin{cases}2^{\frac{1}{x}}\ge 0\\ 2^{\frac{1}{x}}\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\forall x\in[1,+\infty[$, e che la funzione $f(x)=2^{\frac{1}{x}}-1$ e definita $\forall x\in R-\{0\}$, quindi il dominio risulta $\forall x\in[1,+\infty[$, pertanto è possibile effettuare il limite assegnato in quanto il dominio non è limitato superiormente. E trattandosi di un limite notevole del tipo $\frac{arcsen(f(x))}{f(x)}$, pertanto osservando che $arcsen\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)\cdot x=\frac{arcsen\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)}\cdot\frac{\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x}x$; allora

$$\lim_{x\to+\infty} arcsen\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)\cdot x=\lim_{x\to+\infty}\frac{arcsen\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)}\cdot\frac{\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x}x=\log 2.$$

3. Data la funzione $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}$

Insieme di definizione:
Essendo una funzione razionale, il numeratore è definito $\forall x\in R$,
il denominatore, $x^2-4>0\Leftrightarrow(x-2)(x+2)>0\Leftrightarrow x\in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$
pertanto $X=x\in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[\cap R=x\in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$

Quindi tale funzione è definita $\forall x\in x\in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$, ovvero

$$f:\left]-\infty,-2\right[\cup\left]2,+\infty\right[\to f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}\in R$$

Segno della funzione:

Essendo il denominatore sempre positivo, vedere dove $f(x)>0 \Leftrightarrow x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$

Pertanto $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left]-1,+\infty\right[\cap X=\left]2,+\infty\right[$

Conseguentemente $f(x)<0 \Leftrightarrow \left]-\infty,-1\right[\cap X=\left]-\infty,-2\right[$

Limiti significativi:

Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare il limite nei punti di accumulazione che non appartengono al dominio e nell'estremo inferiore e superiore.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}=-1$$

$$\lim_{x\to-2^-} f(x)=\lim_{x\to-2^-}(x+1)\lim_{x\to-2^-}\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}=-(+\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}(x+1)\lim_{x\to2^+}\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}=3(+\infty)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}=1$$

Pertanto la retta $y=-1$ è un asintoto orizzontale a sinistra, mentre la retta $y=1$ è un asintoto orizzontale a destra. Inoltre le rette $x=-2$ e $x=2$ sono rispettivamente due asintoti verticali a sinistra ed a destra.

Derivata prima e monotonia:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2-4}-(x+1)\frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}}{(x^2-4)}=\frac{x^2-4-x^2-x}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}=-\frac{x+4}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$$., quindi

$f'(x)>0 \Leftrightarrow -\frac{x+4}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}>0$, pertanto al denominatore essendo la radice positiva nell'insieme di definizione della funzione, tranne nel punto -2 e 2, è sufficiente studiare $\frac{-x-4}{(x^2-4)}>0 \Leftrightarrow \frac{-x-4}{(x-2)(x+2)}>0$, ed osservare che $\lim_{x\to-2^-}\frac{-x-4}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}=-\infty$ e che $\lim_{x\to2^+}\frac{-x-4}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}=-\infty$; pertanto $f'(x)>0 \Leftrightarrow \forall x\in\left]-\infty,-4\right[$ ed è $f'(x)<0 \Leftrightarrow \forall x\in\left]-4,-2\right[\cup\left]2,+\infty\right[$ pertanto la funzione è strettamente crescente $\forall x\in\left]-\infty,-4\right[$

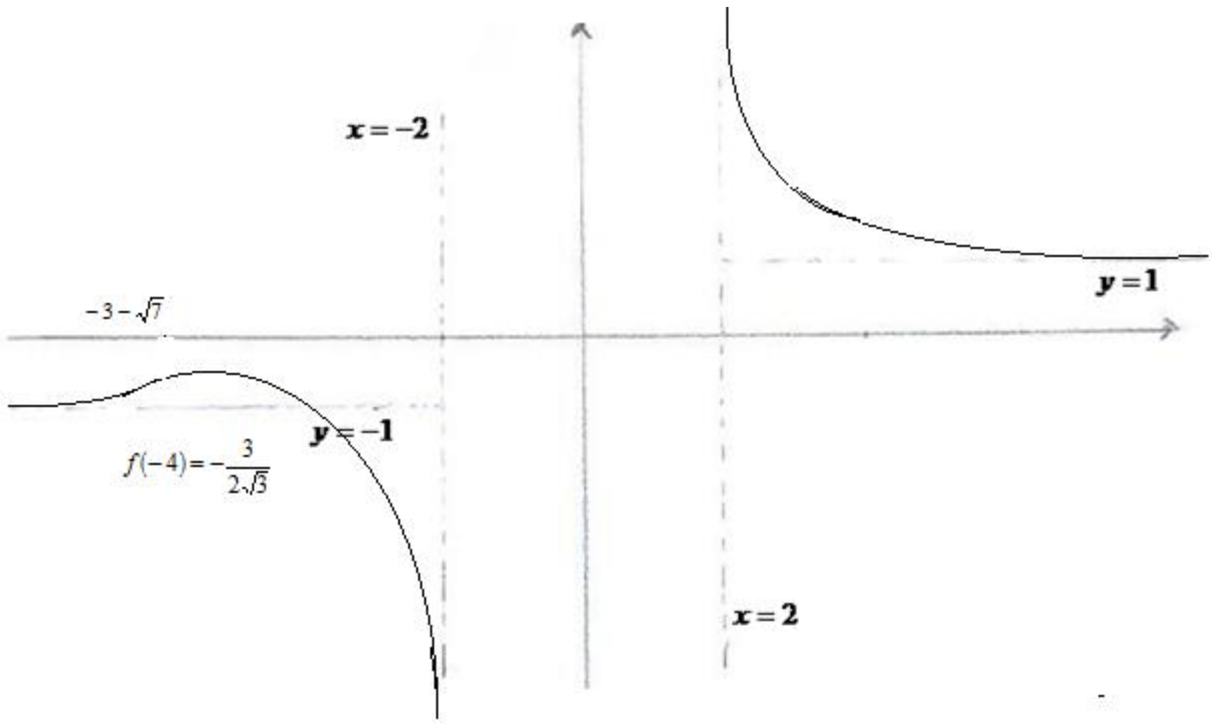
ed è strettamente decrescente in $\forall x \in \left]-4,-2\right[\cup \left]2,+\infty\right[$. Conseguentemente $f'(-4)=0$ quindi la funzione ha un punto di massimo relativo -4 ed il suo massimo è $f(-4) = -\dfrac{3}{2\sqrt{3}}$.

Derivata seconda e concavità:

$$f''(x) = -\frac{(x^2-4)\sqrt{x^2-4} - (x+4)\left[2x\sqrt{x^2-4} + \dfrac{(x^2-4)2x}{2\sqrt{x^2-4}}\right]}{\left((x^2-4)\sqrt{x^2-4}\right)^2} =$$

$$= -\frac{(x^2-4)(x^2-4) - (x+4)2x(x^2-4) - x(x+4)(x^2-4)}{\left((x^2-4)\sqrt{x^2-4}\right)^2\sqrt{x^2-4}} = \quad = -\frac{(-2x^2-12x-4)}{(x^2-4)^2\sqrt{x^2-4}}$$

, pertanto essendo il denominatore sempre positivo nell'insieme di definizione della funzione, per studiare $f''(x) > 0$ è sufficiente studiare $2x^2+12x+4>0$, per cui essendo il delta del polinomio di secondo grado positivo, $f''(x)>0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-3-\sqrt{7}\right[\cup \left]2,+\infty\right[$ pertanto la funzione è strettamente convessa in $\forall x \in \left]-\infty,-3-\sqrt{7}\right[\cup \left]2,+\infty\right[$, è strettamente concava $\forall x \in \left]-3-\sqrt{7},+\infty\right[$ con punto di flesso proprio in $-3-\sqrt{7}$.



e quindi dedurre che:

$f\left(\left]-\infty,-2\right[\cup \left]2,+\infty\right[\right) = \left]-\infty,-\dfrac{3}{2\sqrt{3}}\right[\cup \left]1,+\infty\right[$, $f\left(\left]-\infty,-2\right[\right) = \left]-\infty,-\dfrac{3}{2\sqrt{3}}\right[$ ed $f\left(\left]2,+\infty\right[\right) = \left]1,+\infty\right[$, la restrizione della funzione a $\left]2,+\infty\right[$ è biunivoca su $\left]1,+\infty\right[$.

4. Data la funzione $g(x) = arcsen(2x+1)$, definita $\forall x \in [-1,0]$, pertanto osservando che la sua funzione derivata prima risulta $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}$ definita

$1-(2x+1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow |2x+1| \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \neq 1 \\ 2x+1 \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$ quindi $\forall x \in]-1,0[$; pertanto la funzione f è derivabile $\forall x \in]-1,0[$; quindi verifichiamo l'esistenza della derivata nei punti $x=-1$ ed $x=0$, per cui, servendoci della conseguenza del Teorema di Lagrange, $\exists \lim_{x \to x_0} f'(x)$, allora $\exists f'_d(x_0)$; infatti si osserva che essendo $\lim_{x \to -1^+} \frac{2}{\sqrt{1-(2x+1)^2}} = +\infty$ ed analogamente $\lim_{x \to 0^-} \frac{2}{\sqrt{1-(2x+1)^2}} = +\infty$, la funzione *è dotata di derivata* in $x=-1$ e risulta $f'_d(-1) = +\infty$ ed *è dotata di derivata* in $x=0$ e risulta $f'_s(0) = +\infty$.

5. Data la seguente funzione $p(x) = \frac{1}{1+3x^2}$ si tratta di calcolare il seguente integrale definito $\int_0^1 \frac{dx}{1+3x^2}$, ed essendo una primitiva di $\int \frac{1}{1+3x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg\sqrt{3}x + c$, per il teorema Fondamentale del calcolo integrale, si ha: $\int_0^1 \frac{dx}{1+3x^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} arctg\sqrt{3}x + c\right]_0^1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} arctg\sqrt{3} + c\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} arctg\, 0 + c\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

6. Si tratta di trovare delle soluzioni al sistema $A\alpha = b$; per cui si osserva che essendo $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, il suo determinante è $\det(A') = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$ mentre il $\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & k & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - k\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4k-1$; quindi per $k \neq \frac{1}{4}$ $Car(A) = 2 \neq Car(B) = 3$, pertanto il sistema è incompatibile; mentre $k = \frac{1}{4}$, $Car(A) = Car(B) = 2 = r$ il numero delle incognite, pertanto il sistema diventa di Cramer, compatibile ed ammette una sola soluzione ovvero $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 2x = 1 \end{cases} = \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -2 \end{cases}$.