Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale – 07 settembre 2016 (prof. Bisceglia)

traccia A

1. Calcolare una primitiva P della funzione p, e scrivere l'equazione della retta tangente a P in 0

$$p : x \in R \to \frac{x^2 - x}{(x^2+1)(x^2+2)}$$

2. Calcolare il seguente limite, (della forma $f(x)^{g(x)}$)

$$\lim_{x\to 0}\left(1 - arcsen 2x^2\right)^{1/\left(5^{x^3}-1\right)}$$

3. Studiare la seguente funzione e tracciarne approssimativamente il grafico:

$$x \to f(x) = arcsen\frac{1-x}{1+|x|}$$

4. Per quali valori del parametro h la funzione:

$$j : x \in [0,1] \to hx^2 + 2x + 1/2$$

soddisfa le ipotesi del Teorema del PUNTO FISSO. Inoltre, posto $h = -2$ far vedere che la tesi è soddisfatta.

5. Data la funzione:

$$g : x \in R \to e^{x^3 - 3|x|}$$

dopo aver giustificato l'esistenza dei punti di minimo e massimo assoluti della funzione in $[-2,2]$, trovare tali punti citando l'eventuale teorema che si utilizza e calcolare il massimo della funzione.

N.B. Non si possono usare, pena l'annullamento della prova:
1) calcolatrici, cellulari ed appunti vari.
2) Non si accettano elaborati scritti a matita.
3) Va consegnato solo il foglio di bella e la traccia compilata nel riquadro.

Cognome	Nome	Matricola	Firma

Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale – 07 settembre 2016 (prof. Bisceglia)

traccia B

1. Calcolare una primitiva P della funzione p, e scrivere l'equazione della retta tangente a P in 0

$$p : x \in R \to \frac{x^2 + x}{\left(x^2 + \sqrt{2}\right)\left(x^2 + 1\right)}$$

2. Calcolare il seguente limite, (della forma $f(x)^{g(x)}$)

$$\lim_{x \to 0} (1 - arctg\, 3x)^{1/\left(3^{x^2} - 1\right)}$$

3. Studiare la seguente funzione e tracciarne approssimativamente il grafico:

$$x \to f(x) = \arccos \frac{1 - x}{1 + |x|}$$

4. Per quali valori del parametro h la funzione:

$$j : x \in [0,2] \to hx^2 - x + 1/4$$

soddisfa le ipotesi del Teorema del PUNTO FISSO. Inoltre, posto $h = \dfrac{1}{2}$ far vedere che la tesi è soddisfatta.

5. Data la funzione:

$$g : x \in R \to e^{3x^2 + 2|x|}$$

dopo aver giustificato l'esistenza dei punti di minimo e massimo assoluti della funzione in $[-1,3]$, trovare tali punti citando l'eventuale teorema che si utilizza e calcolare il minimo della funzione.

N.B. Non si possono usare, pena l'annullamento della prova:
1) calcolatrici, cellulari ed appunti vari.
2) Non si accettano elaborati scritti a matita.
3) Va consegnato solo il foglio di bella e la traccia compilata nel riquadro.

Cognome	Nome	Matricola	Firma

Svolgimento prova scritta del 07 settembre 2016 traccia A

1. Una primitiva della funzione assegnata è data dal seguente integrale:

$$\int \frac{x^2-x}{(x^2+1)(x^2+2)}$$

per questo poniamo $\frac{x^2-x}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} +$ $+\frac{Cx+D}{x^2+2} = \frac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+(2A+C)x+2B+D}{(x^2+1)(x^2+2)}$ e di qui, si ha: $x^2-x=(A+C)x^3+(B+D)x^2+(2A+C)x+2B+D \Leftrightarrow A+C=0, B+D=1, 2A+C=-1$ e $2B+D=0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow A=-1, B=-1, C=1$ e $D=2$ quindi è: $\frac{x^2-x}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{-x-1}{x^2+1}+\frac{x+2}{x^2+2}$ e pertanto risulta:

$$\int \frac{x^2-x}{(x^2+1)(x^2+2)}dx = -\int \frac{x+1}{x^2+1}dx + \int \frac{x+2}{x^2+2}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx - \int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}dx + \sqrt{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\log(x^2+1) - arctgx + \frac{1}{2}\log(x^2+2) + \sqrt{2}arctg\,\frac{x}{\sqrt{2}} = \log\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+1}} - arctgx + \sqrt{2}arctg\,\frac{x}{\sqrt{2}}$$ quindi,

detta P la primitiva di p richiesta, è:

$$P : x \in R \to \log\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2+1}} - arctgx + \sqrt{2}arctg\,\frac{x}{\sqrt{2}}$$

La retta tangente $y = P'(0)(x-0)+P(0)$ è:

$$y = \log\sqrt{2}\ .$$

2. Dato il seguente limite, $\lim_{x\to 0}\left(1-arcsen2x^2\right)^{1/\left(5^{x^3}-1\right)}$ si ha

$\lim_{x\to 0}\left(1-arcsen2x^2\right)^{1/\left(5^{x^3}-1\right)} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{5^{x^3}-1}\log\left(1-arcsen2x^2\right)}$ ed essendo: $\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(1-arcsen2x^2\right)}{5^{x^3}-1} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\log\left(1-arcsen2x^2\right)}{-arcsen2x^2}\left(-\frac{arcsen2x^2}{2x^2}\right)2x^2}{\frac{5^{x^3}-1}{x^3}x^3} = -2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\log\left(1-arcsen2x^2\right)}{-arcsen2x^2}\frac{arcsen2x^2}{2x^2}}{\frac{5^{x^3}-1}{x^3}}\frac{1}{x} = \frac{-2}{\log 5}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$

è: $\lim_{x\to 0^-}\frac{\log\left(1-arcsen2x^2\right)}{5^{x^3}-1} = \frac{-2}{\log 5}\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = \frac{-2}{\log 5}(-\infty) = +\infty$ e

$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log\left(1-arcsen2x^2\right)}{5^{x^3}-1}=\frac{-2}{\log 5}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\frac{-2}{\log 5}(+\infty)=-\infty$ e pertanto risulta:

$\lim_{x\to 0^-}\left(1-arcsen2x^2\right)^{1/\left(5^{x^3}-1\right)}=\lim_{y\to+\infty}e^y=+\infty$ e $\lim_{x\to 0^+}\left(1-arcsen2x^2\right)^{1/\left(5^{x^3}-1\right)}=\lim_{y\to-\infty}e^y=0$ e quindi il limite proposto non esiste.

3. Data la funzione $x\to f(x)=arcsen\frac{1-x}{1+|x|}$

L'insieme dei valori della funzione *f* è incluso in $arcsen([-1,1])=[-\pi/2,\pi/2]$, quindi *f* è limitata e pertanto il grafico di *f* può avere solo asintoti orizzontali.

L'insieme di definizione di *f* è: $\{x\in R,-1\le(1-x)/(1+|x|)\le 1\}$ ed essendo $-1\le(1-x)/(1+|x|)\le 1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(x<0\text{ e }-1\le(1-x)/(1-x)=1\le 1)$ o $(x\ge 0\text{ e }-1\le(1-x)/(1+x)\le 1)$ $\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,0\right[$ o $(x\ge 0\text{ e }-1-x\le\ 1-x\le 1+x)$ $\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,0\right[\cup\left[0,+\infty\right[=R$ è:

$$f:x\in R\to\begin{cases}arcsen\frac{1-x}{1-x}=arcsen1=\frac{\pi}{2} & \text{se } x\in\left]-\infty,0\right[\\ arcsen\frac{1-x}{1+x} & \text{se } x\in\left[0,+\infty\right[\end{cases},$$

quindi il grafico della restrizione di *f* a $\left]-\infty,0\right]$ coincide con la semiretta giacente sulla retta di equazione $y=\pi/2$ i cui punti hanno tutti ascissa minore o uguale a zero, ogni elemento di $\left]-\infty,0\right]$ è un punto di massimo per *f* e risultando:

$f(x)>0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,0\right[$ o $\left(x\in\left[0,+\infty\right[\text{ e }(1-x)/(1+x)>0\right)\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,0\right[$ o $\left(x\in\left[0,+\infty\right[\text{ e }1-x>0\right)$ $\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,0\right[$ o $(0\le x<1)\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,0\right[$ o $x\in\left[0,1\right[\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,0\right[\cup\left[0,1\right[=\left]-\infty,1\right[$

$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-x}{1+|x|}=0\Leftrightarrow 1-x=0\Leftrightarrow x=1$

$f(x)<0\Leftrightarrow x\in R-\left]-\infty,1\right]=\left]1,+\infty\right[$

il grafico di *f* si trova al di sopra dell'asse delle *x* in $\left]-\infty,1\right[$, al di sotto dell'asse delle *x* in $\left]1,+\infty\right[$, ha in comune con gli assi i punti $(0,arcsen1)=(0,\pi/2)$ e $(1,0)$ ed essendo:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\frac{\pi}{2}\text{ e }\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}arcsen\frac{1-x}{1+x}=\lim_{x\to+\infty}arcsen\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1}=arcsen(-1)=-\frac{\pi}{2}$$

il grafico di *f* ha due asintoti: la retta di equazione $y=\pi/2$ asintoto orizzontale a sinistra e la retta di equazione $y=-\pi/2$ asintoto orizzontale a destra.

Essendo:

$$f'(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x\in\left]-\infty,0\right[\\ \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{(1-x)^2}{(1+x)^2}}}\cdot\dfrac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}=\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{(1+x)^2-(1-x)^2}}{1+x}}\cdot\dfrac{-2}{(1+x)^2}=\dfrac{-1}{\sqrt{x}(1+x)} & \text{se } x\in\left]0,+\infty\right[\end{cases}$$ e

$$f_s'(0)=\lim_{x\to0^-}f'(x)=0 \text{ ed } f_d'(0)=\lim_{x\to0^+}f'(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{-1}{\sqrt{x}(1+x)}=-\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=-\infty$$

f è derivabile in $R-\{0\}$, non esiste la derivata di *f* in zero ed è:

$f'(x)>0\Leftrightarrow x\in\varnothing$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,0\right[$, $f'(x)<0\Leftrightarrow x\in\left]0,+\infty\right[$

quindi la restrizione di *f* a $\left[0,+\infty\right[$ è strettamente decrescente e la funzione *f* è decrescente.

Risultando infine:

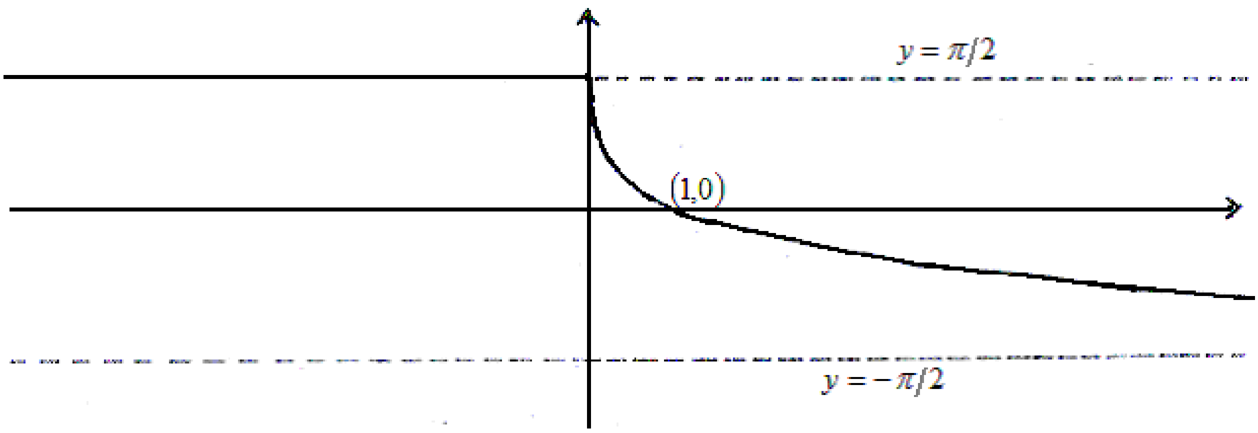
$$f''(x)=\begin{cases}0 & \text{se } x\in\left]-\infty,0\right[\\ D\dfrac{-1}{\sqrt{x}(1+x)}=\dfrac{D\sqrt{x}(1+x)}{x(1+x)^2}=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(1+x)+\sqrt{x}}{x(1+x)^2}=\dfrac{1+3x}{2\sqrt{x}\cdot x(1+x)^2} & \text{se } x\in\left]0,+\infty\right[\end{cases}$$

è:

$f''(x)>0\Leftrightarrow x\in\left]0,+\infty\right[$, $f''(x)=0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,0\right[$, $f''(x)<0\Leftrightarrow x\in\varnothing$

e pertanto la restrizione di *f* a $\left[0,+\infty\right[$ è strettamente convessa.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:



e quindi dedurre che:

$f(R)=f(\left[0,+\infty\right[)=\left]-\pi/2,\pi/2\right]$, *f* non è biunivoca, la restrizione di *f* a $\left[0,+\infty\right[$ è biunivoca su $\left]-\pi/2,\pi/2\right]$ e $\inf_{x\in R} arcsen\dfrac{1-x}{1+|x|}=\inf\left]-\pi/2,\pi/2\right]=-\pi/2$.

4. Tale funzione:

$$j:x\in[0,1]\to hx^2+2x+1/2$$

è continua in $[0,1]$ e risultando: $j(0)=1/2 \in [0,1]$ ed $j(1)=h+2+1/2 \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \le h+5/2 \le 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -5/2 \le h \le -3/2$ la funzione *j* soddisfa al teorema del PUNTO FISSO solo se $h \in [-5/2,-3/2]$.

Conseguentemente posto $h=-2$, la funzione assegnata diventa $j: x \in [0,1] \to -2x^2+2x+1/2$ e tenendo conto che la tesi del Teorema afferma che $\exists c \in]0,1[\, / \, j(c)=c$, è quindi sufficiente risolvere l'equazione $j(x)=x$ per individuare tale punto *c*, ovvero $-2x^2+2x+\dfrac{1}{2}=x \Leftrightarrow -2x^2+x+\dfrac{1}{2}=0$, la cui soluzione $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4} \in]0,1[$ e risulta appunto $j\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)=-2\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2+2\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)+\dfrac{1}{2}=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$.

5. La funzione

$$g: x \in R \to e^{x^3-3|x|}$$

è composta di funzione continue, quindi continua in *R*, in particolare in $[-2,2]$ ed essendo $[-2,2]$ chiuso e limitato, per il Teorema di Weierstrass la funzione è dotata di minimo e di massimo assoluto. Per il Teorema dei punti critici $\max\limits_{x\in[-2,2]} g(x)=\max\limits_{x\in F} g(x)$, con $F=\{E \cup S \cup C\}$, pertanto è sufficiente trovare eventuali punti in cui *g* non è derivabile ed punti stazionari.

Per il teorema dei Punti Critici, sia $g:[a,b] \to R$, sia g continua in $[a,b]$, sia $E=\{a,b\}$, $S=\{x \in]a,b[\, / \, \nexists g'(x)\}$, $C=\{x \in]a,b[\, / \, g'(x)=0\}$ e sia $F=E \cup S \cup C$, allora $\max\limits_{x\in[a,b]} g(x)=\max\limits_{x\in F} g(x)$.

Pertanto essendo per la funzione data, $g'(x)=e^{x^3-3|x|}D\left(x^3-3|x|\right)=e^{x^3-3|x|}\left(3x^2-3\dfrac{|x|}{x}\right)$, $\nexists g'(x) \Leftrightarrow D|0|$ quindi

$S=\{0\}$, inoltre $g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2-1=0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \\ \begin{cases} x^2+1=0 \\ x<0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing \end{cases}$ quindi $C=\{1\}$, ed $E=\{-2,2\}$.

Conseguentemente $F=\{-2,0,1,2\}$ ed il $\max\limits_{x\in[-2,2]} g(x)=\max\limits_{x\in F} g(x)=\max\{g(-2),g(0),g(1),g(2)\}$ notando che $g(-2)=e^{-14}$, $g(0)=e^0=1$, $g(1)=e^{-2}$ e $g(2)=e^2$, si ha che $\max\limits_{x\in[-2,2]} g(x)=e^2$, con punto di massimo $\{2\}$

Svolgimento prova scritta del 07 settembre 2016 traccia B

1. Una primitiva della funzione assegnata è data dal seguente integrale:

$$\int \frac{x^2+x}{\left(x^2+\sqrt{2}\right)\left(x^2+1\right)}$$

per questo poniamo $\frac{x^2+x}{\left(x^2+\sqrt{2}\right)\left(x^2+1\right)} = \frac{Ax+B}{\left(x^2+\sqrt{2}\right)} +$

$+\frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+\left(A+\sqrt{2}C\right)x+\sqrt{2}D+B}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)}$ e di qui, si ha:

$x^2+x=(A+C)x^3+(B+D)x^2+\left(A+\sqrt{2}C\right)x+\sqrt{2}D+B \Leftrightarrow A+C=0, B+D=1, A+\sqrt{2}C=1$

e $\sqrt{2}D+B=0$ $\Leftrightarrow A=\frac{1}{1-\sqrt{2}}, B=\frac{-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}, C=\frac{-1}{1-\sqrt{2}}$ e $D=\frac{1}{1-\sqrt{2}}$ quindi è:

$\frac{x^2+x}{\left(x^2+\sqrt{2}\right)\left(x^2+1\right)} = \frac{\frac{1}{1-\sqrt{2}}x+\frac{-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}}{x^2+\sqrt{2}} + \frac{\frac{-1}{1-\sqrt{2}}x+\frac{1}{1-\sqrt{2}}}{x^2+1}$ e pertanto risulta:

$$\int \frac{x^2+x}{\left(x^2+\sqrt{2}\right)\left(x^2+1\right)}dx = \int \frac{\frac{1}{1-\sqrt{2}}x-\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}}{x^2+\sqrt{2}}dx + \int \frac{\frac{-1}{1-\sqrt{2}}x+\frac{1}{1-\sqrt{2}}}{x^2+1}dx =$$

$$=\frac{1}{2\left(1-\sqrt{2}\right)}\int \frac{2x+}{x^2+\sqrt{2}}dx - \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\int \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}} - \frac{1}{2\left(1-\sqrt{2}\right)}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{1}{1-\sqrt{2}}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$=\frac{1}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}\log\left(x^2+\sqrt{2}\right) - \frac{1}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}\log\left(x^2+1\right) + \frac{1}{1-\sqrt{2}}arctgx - \frac{\sqrt[4]{2}}{1-\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt[4]{2}}$ quindi, detta P la primitiva di p richiesta, è:

$$P: x\in R \to \frac{1}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}\log\frac{x^2+\sqrt{2}}{x^2+1} + \frac{1}{1-\sqrt{2}}arctgx - \frac{\sqrt[4]{2}}{1-\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt[4]{2}}$$

La retta tangente $y=P'(0)(x-0)+P(0)$ è:

$$y=\frac{\log\sqrt{2}}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}.$$

2. Dato il seguente limite, $\lim_{x\to 0}(1-arctg3x)^{1/\left(3^{x^2}-1\right)}$ si ha $\lim_{x\to 0}(1-arctg3x)^{1/\left(3^{x^2}-1\right)} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{3^{x^2}-1}\log(1-arctg3x)}$ ed essendo: $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-arctg3x)}{3^{x^2}-1} =$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\log(1-arctg3x)}{-arctg3x}\left(-\frac{arctg3x}{3x}\right)3x}{\frac{3^{x^2}-1}{x^2}x^2} = -3\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\log(1-arctg3x)}{-arctg3x}\left(-\frac{arctg3x}{3x}\right)}{\frac{3^{x^2}-1}{x^2}}\frac{1}{x} = \frac{-3}{\log 3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$ è:

$\lim_{x\to 0^-}\frac{\log(1-arctg3x)}{3^{x^2}-1} = \frac{-3}{\log 3}\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = \frac{-3}{\log 3}(-\infty) = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1-arctg3x)}{3^{x^2}-1} = \frac{-3}{\log 3}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} =$

$= \dfrac{-3}{\log 3}(+\infty) = -\infty$ e pertanto risulta: $\lim\limits_{x\to 0^-}(1-arctg\,3x)^{1/\left(3^{x^2}-1\right)} = \lim\limits_{y\to+\infty} e^y = +\infty$ e

$\lim\limits_{x\to 0^+}(1-arctg\,3x)^{1/\left(3^{x^2}-1\right)} = \lim\limits_{y\to-\infty} e^y = 0$ e quindi il limite proposto non esiste.

3. Data la funzione $x \to f(x) = \arccos\dfrac{1-x}{1+|x|}$

L'insieme dei valori della funzione f è incluso in $\arccos([-1,1]) = [0,\pi]$, quindi f è limitata e pertanto il grafico di f può avere solo asintoti orizzontali.

L'insieme di definizione di f è: $\{x \in R, -1 \le (1-x)/(1+|x|) \le 1\}$ ed essendo $-1 \le (1-x)/(1+|x|) \le 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x<0 \text{ e } -1 \le (1-x)/(1-x) = 1 \le 1)$ o $(x \ge 0 \text{ e } -1 \le (1-x)/(1+x) \le 1)$ $\Leftrightarrow x \in \left]-\infty,0\right[$ o $(x \ge 0 \text{ e } -1-x \le 1-x \le 1+x)$ $\Leftrightarrow x \in \left]-\infty,0\right[\cup \left[0,+\infty\right[= R$ è:

$$f : x \in R \to \begin{cases} \arccos\dfrac{1-x}{1-x} = arcsen 1 = 0 & \text{se } x \in \left]-\infty,0\right[\\ \arccos\dfrac{1-x}{1+x} & \text{se } x \in \left[0,+\infty\right[\end{cases},$$

quindi il grafico della restrizione di f a $\left]-\infty,0\right]$ coincide con la semiretta giacente sulla retta di equazione $y=0$ i cui punti hanno tutti ascissa minore o uguale a zero, ogni elemento di $\left]-\infty,0\right]$ è un punto di minimo per f e risultando:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,0\right]$$
$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in R - \left]-\infty,0\right] = \left]0,+\infty\right[$$

il grafico di f si trova sempre al di sopra dell'asse delle x, ha in comune con gli assi il punto $(0,\arccos 1) = (0,0)$ ed essendo:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\arccos\frac{1-x}{1+x} = \lim_{x\to+\infty}\arccos\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} = arcsen(-1) = \pi$$

il grafico di f ha due asintoti: la retta di equazione $y=0$ asintoto orizzontale a sinistra e la retta di equazione $y=\pi$ asintoto orizzontale a destra.

Essendo:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \left]-\infty,0\right[\\ \dfrac{-1}{\sqrt{1-\dfrac{(1-x)^2}{(1+x)^2}}} \cdot \dfrac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = \dfrac{-1}{\dfrac{\sqrt{(1+x)^2-(1-x)^2}}{1+x}} \cdot \dfrac{-2}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)} & \text{se } x \in \left]0,+\infty\right[\end{cases} \text{ e}$$

$$f_s'(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0 \text{ ed } f_d'(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

f è derivabile in $R - \{0\}$, non esiste la derivata di f in zero ed è:

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,0\right[$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]0,+\infty\right[$

quindi la restrizione di *f* a $[0,+\infty[$ è strettamente crescente e la funzione *f* è crescente.

Risultando infine:

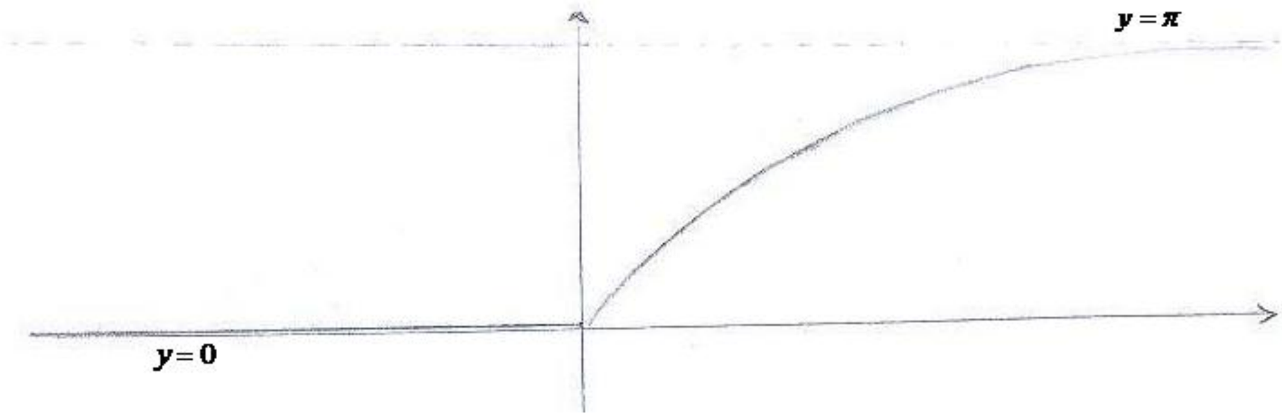
$$f''(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x\in\left]-\infty,0\right[\\ D\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}=\dfrac{-D\sqrt{x}(1+x)}{x(1+x)^2}=\dfrac{-\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(1+x)+\sqrt{x}\right)}{x(1+x)^2}=\dfrac{-1-3x}{2\sqrt{x}\cdot x(1+x)^2} & \text{se } x\in\left]0,+\infty\right[\end{cases}$$

è:

$f''(x)<0\Leftrightarrow x\in\left]0,+\infty\right[$, $f''(x)=0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,0\right[$, $f''(x)>0\Leftrightarrow x\in\varnothing$

e pertanto la restrizione di *f* a $[0,+\infty[$ è strettamente concava.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:



quindi dedurre che:
$f(R)=f([0,+\infty[)=[0,\pi[$, *f* non è biunivoca, la restrizione di *f* a $[0,+\infty[$ è biunivoca su $[0,\pi[$ e $\sup\limits_{x\in R}\arccos\dfrac{1-x}{1+|x|}=\sup[0,\pi[=\pi$.

4. Tale funzione:

$$j:x\in[0,2]\to hx^2-x+1/4$$

è continua in $[0,2]$ e risultando: $j(0)=1/4\in[0,1]$ ed $j(2)=4h-2+1/4\in[0,2]\Leftrightarrow 0\le 4h-7/4\le 2\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 7/16\le h\le 15/16$ la funzione *j* soddisfa al teorema del PUNTO FISSO solo se $h\in[7/16,15/16]$.

Conseguentemente posto $h=\dfrac{1}{2}$, la funzione assegnata diventa $j:x\in[0,2]\to\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{1}{4}$ e tenendo conto che la tesi del Teorema afferma che $\exists c\in\left]0,2\right[/\ j(c)=c$, è quindi sufficiente risolvere l'equazione $j(x)=x$ per individuare tale punto *c*, ovvero $\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{1}{4}=x\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}x^2-2x+\dfrac{1}{4}=0$, la cui soluzione $2-\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\in\left]0,2\right[$ e risulta appunto $j\left(2-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}\left(2-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(2-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{4}=\left(2-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)$.

5. La funzione

$$g : x \in R \to e^{3x^2+2|x|}$$

è composta di funzione continue, quindi continua in *R*, in particolare in $[-1,3]$ ed essendo $[-1,3]$ chiuso e limitato, per il Teorema di Weierstrass la funzione è dotata di minimo e di massimo assoluto. Per il Teorema dei punti critici $\min\limits_{x\in[-1,3]} g(x)=\min\limits_{x\in F} g(x)$, con $F=\{E\cup S\cup C\}$, pertanto è sufficiente trovare eventuali punti in cui *g* non è derivabile ed punti stazionari.

Per il teorema dei Punti Critici, sia $g:[a,b]\to R$, sia g continua in $[a,b]$, sia $E=\{a,b\}$, $S=\{x\in\,]a,b[\,/\,\nexists g'(x)\}$, $C=\{x\in\,]a,b[\,/\,g'(x)=0\}$ e sia $F=E\cup S\cup C$, allora $\min\limits_{x\in[a,b]} g(x)=\min\limits_{x\in F} g(x)$.

Pertanto essendo per la funzione data, $g'(x)=e^{3x^2+2|x|}D\left(3x^2+2|x|\right)=e^{3x^2+2|x|}\left(6x+2\frac{|x|}{x}\right)$, $\nexists g'(x)\Leftrightarrow D|0|$

quindi $S=\{0\}$, inoltre $g'(x)=0\Leftrightarrow \begin{cases}\begin{cases}3x+1=0\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{3}\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing\\ \begin{cases}3x-1=0\\ x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{3}\\ x<0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing\end{cases}$ quindi $C=\{\varnothing\}$, ed $E=\{-1,3\}$

. Conseguentemente $F=\{-1,0,3\}$ ed il $\min\limits_{x\in[-1,3]} g(x)=\min\limits_{x\in F} g(x)=\min\{g(-1),g(0),g(3)\}$ notando che $g(-1)=e^5$, $g(0)=e^0=1$ e $g(3)=e^{33}$, si ha che $\min\limits_{x\in[-1,3]} g(x)=1$, con punto di minimo $\{0\}$