Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
05 aprile 2017
(prof. Bisceglia)

Traccia A

1. Calcolare il seguente $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{\sqrt{5x^2+x-1}-\sqrt{9x^2-x+2}}$, e verificare che sia corretto.

2. Data la funzione $h: x\in R\to\begin{cases} arc\cot g\frac{1}{1-x} & x\in\left]1,+\infty\right[\\ e^{x-1}-x & x\in\left]-\infty,1\right]\end{cases}$, individuare il punto di discontinuità e classificarlo.

3. Studiare la funzione $x\to f(x)=\frac{x}{(\log x)^2}$, e tracciarne approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione $g: x\in\{1,2,3\}\cup[5,7]\to senx+e^x arctg\frac{1}{x}$, dire se soddisfa alle ipotesi del Teorema di Bolzano e/o di Weierstrass.

5. Data la funzione $p(x)=(x^2+2x)e^{2x}$, calcolare la primitiva *P* tale che $P(0)=1$ e scrivere l'equazione della tangente sulla primitiva *P*, nel punto 1.

6. Data la funzione $f(x,y)=x^3-x^2y^2+x^2$, determinare il suo gradiente, eventuali punti stazionari e classificarli. (A.A. 2016/2017).

Svolgimento - Traccia A

1. Essendo $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{\sqrt{5x^2+x-1}-\sqrt{9x^2-x+2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{|x|\sqrt{5+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-|x|\sqrt{9-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}$, ovvero $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{|x|\left(\sqrt{5+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-\sqrt{9-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)}=\frac{1}{\sqrt{5}-3}\lim_{x\to-\infty}|x|=\frac{1}{\sqrt{5}-3}(+\infty)=-\infty$ quindi. Per cui si ha $|x|\frac{1}{\sqrt{5}-3}<-\varepsilon\Leftrightarrow\frac{x}{3-\sqrt{5}}<-\varepsilon\Leftrightarrow x<-\varepsilon\left(3-\sqrt{5}\right)$, e quindi posto $\delta=\varepsilon\left(3-\sqrt{5}\right)$, abbiamo individuato un intorno di meno infinito.

2. h è continua in $R-\{1\}$ e risultando $h(1)=0$ e $\lim_{x\to1^-}h(x)=\lim_{x\to1^-}\left(e^{x-1}-x\right)=0$, mentre per il $\lim_{x\to1^+}h(x)=\lim_{x\to1^+}ar\cot g\frac{1}{1-x}$, essendo $\lim_{x\to1^+}\frac{1}{1-x}=-\infty$, si ha $\lim_{x\to1^+}ar\cot g\frac{1}{1-x}=\lim_{y\to-\infty}ar\cot gy=\pi$ pertanto la funzione h ha in *uno* un punto di discontinuità di prima specie.

3. Data la funzione: $x\to f(x)=\frac{x}{(\log x)^2}$.

L'insieme di definizione della funzione f è: $\{x\in R, x>0 \text{ e } \log x\neq0\}$ ed essendo $x>0$ e

$\log x \neq 0 = \log 1 \Leftrightarrow x > 0$ e $x \neq 1 \Leftrightarrow x \in \left]0,+\infty\right[- \{1\} = \left]0,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$ è:

$$f : x \in \left]0,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[\to x/(\log x)^2$$

e risultando:

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x/(\log x)^2 > 0 \Leftrightarrow x \in \left]0,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$

il grafico di *f* è al di sopra dell'asse delle *x* in $\left]0,1\right[$ ed in $\left]1,+\infty\right[$, non ha punti in comune con gli assi ed essendo:

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x/(\log x)^2 = 0$, $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x/(\log x)^2 = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x/(\log x)^2 =$
$= \lim_{x\to +\infty} x/2\log x = \lim_{x\to +\infty} x/2 = +\infty$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x)/x = \lim_{x\to +\infty} 1/(\log x)^2 = 0$

il grafico di *f* ha un solo asintoto: la retta di equazione $x = 1$ asintoto verticale a sinistra e a destra.
Essendo:

$$f'(x) = D\frac{x}{(\log x)^2} = \frac{(\log x)^2 - x 2\log x/x}{(\log x)^4} = \frac{\log x - 2}{(\log x)^3} \text{ se } x \in \left]0,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$$

è:

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\log x - 2}{(\log x)^3} > 0 \Leftrightarrow (\log x - 2 > 0 \text{ e } \log x > 0)$ o $(\log x - 2 < 0 \text{ e } \log x < 0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \log x > 2 = \log e^2$ o $\log x < 0 = \log 1 \Leftrightarrow x \in \left]0,1\right[\cup \left]e^2,+\infty\right[$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\log x - 2}{(\log x)^3} = 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ e $\log x - 2 = 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ e $\log x = 2 = \log e^2 \Leftrightarrow x = e^2$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]0,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[- \left(\left]0,1\right[\cup \left[e^2,+\infty\right[\right) = \left]1,e^2\right[$

quindi *f* è strettamente crescente in $\left]0,1\right[$ ed in $\left[e^2,+\infty\right[$, è strettamente decrescente in $\left]1,e^2\right]$, e^2 è un punto di minimo relativo proprio per *f* e il grafico di *f* passa per il punto $\left(e^2, f\left(e^2\right)\right) = \left(e^2, e^2/4\right)$.
Risultando infine:

$$f''(x) = D\frac{\log x - 2}{(\log x)^3} = \frac{(\log x)^3/x - (\log x - 2)3(\log x)^2/x}{(\log x)^6} = \frac{2(3 - \log x)}{x(\log x)^4} \text{ se } x \in \left]0,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$$

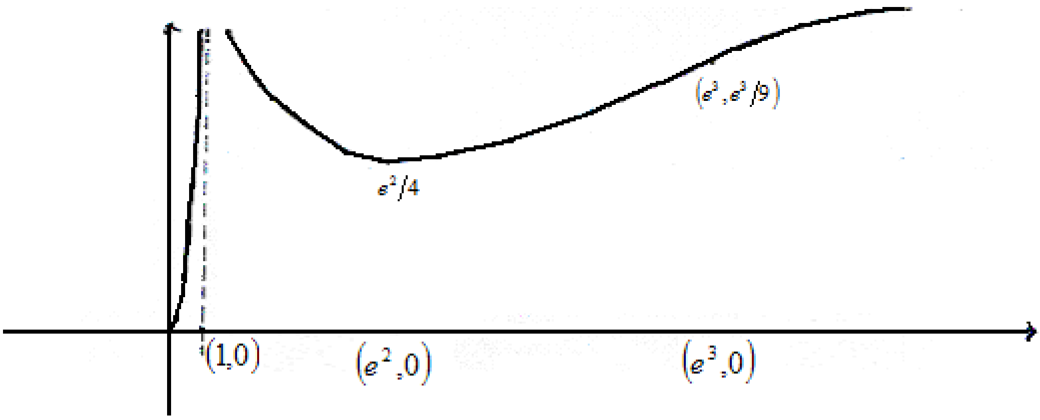
è:

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2(3-\log x)}{x(\log x)^4} > 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ e $3 - \log x > 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ e $\log x < 3 = \log e^3 \Leftrightarrow x \neq 1$ e $0 < x <$
$< e^3 \Leftrightarrow x \in \left]0,1\right[\cup \left]1,e^3\right[$,

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2(3-\log x)}{x(\log x)^4} = 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ e $3 - \log x = 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ e $\log x = 3 = \log e^3 \Leftrightarrow x = e^3$

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]0,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[- \left(\left]0,1\right[\cup \left]1,e^3\right]\right) = \left]e^3,+\infty\right[$

e pertanto *f* è strettamente convessa in $\left]0,1\right[$ ed in $\left]1,e^3\right]$, è strettamente concava in $\left[e^3,+\infty\right[$, e^3 è un punto di flesso proprio per *f* ed il grafico di *f* passa per il punto $\left(e^3, f\left(e^3\right)\right) = \left(e^3, e^3/9\right)$.
Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:



e quindi dedurre che:
$f(]0,1[\cup]1,+\infty[) =]0,+\infty[$, $f(]0,1[) =]0,+\infty[$, $f(]1,e^2]) = f([e^2,+\infty[) = [e^2/4,+\infty[$, f non è biunivoca, la restrizione di f a $]0,1[$ è biunivoca su $]0,+\infty[$ e le restrizione di f a $]1,e^2]$ ed $[e^2+\infty[$ sono entrambe biunivoche su $[e^2/4,+\infty[$.

4. Essendo g evidentemente continua in quanto composta da funzioni continue. Soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass in quanto definita in $\{1,2,3\}\cup[5,7]$ parte chiusa e limitata, ma non soddisfa quelle del teorema di Bolzano in quanto $\{1,2,3\}\cup[5,7]$ non è un intervallo.

5. Essendo $p(x) = (x^2+2x)e^{2x}$, integrando per parti si ha $\int (x^2+2x)e^{2x}dx = (x^2+2x)\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int (2x+2)e^{2x}dx = (x^2+2x)\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\left((2x+2)\frac{e^{2x}}{2} - \int 2\frac{e^{2x}}{2}dx\right)$ ovvero $\int (x^2+2x)e^{2x}dx = (x^2+2x)\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\left((2x+2)\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{2}\right) + c$ quindi $\int (x^2+2x)e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2}\left(x^2+x-\frac{1}{2}\right)+c$ per cui $P(x) = \frac{e^{2x}}{2}\left(x^2+x-\frac{1}{2}\right)+c$ e quindi $P(0)=1 \Leftrightarrow \frac{e^{2\cdot 0}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)+c=1 \Leftrightarrow c = 1+\frac{1}{4} \Leftrightarrow c=\frac{5}{4}$ ovvero la primitiva cercata è $P(x) = \frac{e^{2x}}{2}\left(x^2+x-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{4}$. Infine l'equazione della tangente sulla primitiva P, nel punto 1, è: $y = P'(1)(x-1)+P(1) \Leftrightarrow y = p(1)(x-1)+P(1)$ ovvero $y = 3e^2(x-1)+\frac{3(e^2+5)}{4}$.

6. Data la $f(x,y) = x^3 - x^2y^2 + x^2$ il suo gradiente $\nabla f(x,y) = [f_x(x,y), f_y(x,y)] = [3x^2-2xy^2+2x, -2x^2y]$. gli eventuali punti stazionari, sono dati dalle soluzioni del sistema $\begin{cases} 3x^2-2xy^2+2x=0 \\ -2x^2y=0 \end{cases} = \begin{cases} 3x^2-2xy^2+2x=0 \\ y=0 \end{cases}$, e nella prima si ottiene $3x^2+2x=0 \Leftrightarrow x(3x+2)=0$ le cui soluzioni sono $x=0$ e $x=-\frac{2}{3}$, quindi i due punti stazionari sono $(0,0)$ e $\left(-\frac{2}{3},0\right)$. per poterli classificare dobbiamo calcolare il determinante Hessiano, per cui $f_{xx}(x,y) = 6x-2y^2+2$, $f_{yy}(x,y) = -2x^2$, $f_{xy}(x,y) = -4xy$ e $f_{yx}(x,y) = -4xy$, per cui

$H\left|f(0,0)\right|=0$, pertanto per tale punto non possiamo dire nulla, mentre, $H\left|f\left(-\frac{2}{3},0\right)\right|=\frac{16}{9}$ in quanto $f_{xx}\left(-\frac{2}{3},0\right)=6\left(-\frac{2}{3}\right)+2=-2$, $f_{yy}\left(-\frac{2}{3},0\right)=-2\left(-\frac{2}{3}\right)^2=-\frac{8}{9}$ e $f_{xy}\left(-\frac{2}{3},0\right)=f_{yx}\left(-\frac{2}{3},0\right)=0$, conseguentemente il punto stazionario $\left(-\frac{2}{3},0\right)$ è di massimo ed il suo valore è $f\left(-\frac{2}{3},0\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)^3+\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{27}$.