Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
05febbraio 2020
(prof. Bisceglia)

Traccia A

1. Data la funzione $f(x)=\sqrt{x}+x^2-3$ definita in $[1,2]$ individuare *eventuali* punti in cui si *annulla* con un'approssimazione di $\varepsilon \le 7^{-1}$.

2. Data la funzione $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$,*calcolare il limite* nel punto accumulazione non appartenente al dominio e *verificarne la sua correttezza.*

3. *Studiare* la funzione $f(x)=\dfrac{2x^2+x-1}{2x-1}$, e *tracciarne* approssimativamente il grafico.

4. Data lafunzione $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x>0 \\ \cos x & \text{se } x\le 0 \end{cases}$,*individuare*eventuali *punti di discontinuità* e *classificarli.*

5. Data la funzione $p(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$, calcolare la primitiva P, tale che in $P(0)=\dfrac{\pi}{2}$, e riportare l'equazione della tangente nel punto $(1,P(1))$.

6. Data la matrice incompleta $A=\begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$edil vettore dei termini noti $b=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$*studiare* il seguente sistema $A\alpha=b$ nella variabile *k*.

Svolgimento traccia A

1. Data la funzione $f(x)=\sqrt{x}+x^2-3$, definita nell'intervallo $[1,2]$, e risultando $f(1)\cdot f(2)<0$, ricorrono tutte le ipotesi del teorema degli zeri, pertanto $\exists x_0 \in]1,2[/ f(x_0)=0$. Per cui sapendo che $|x_0-c_n|<c_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^{n+1}}\le 7^{-1}$, si ha $\dfrac{b-a}{2^{n+1}}\le 7^{-1} \Leftrightarrow \dfrac{b-a}{7^{-1}}\le 2^{n+1} \Leftrightarrow n\ge \dfrac{\log((b-a)7)}{\log 2}-1$ quindi $n\ge \dfrac{\log(2-1)7}{\log 2}-1=1.9$ pertanto, posto $n=2$ si osserva che il punto di approssimazione con un errore $\in\le 7^{-1}$ risulta:

N	A_n	c_n	b_n	$f(a_n)$	$f(c_n)$	$f(b_n)$
0	1	3/2	2	—	0.474	+
1	1	5/4	3/2	—	—0.319	+
2	3/2	11/8	5/4	+	0.063	—

essere $c_2=\dfrac{11}{8}$,in quanto $\left|\dfrac{11}{8}-\dfrac{5}{4}\right|\le\dfrac{1}{7}\Leftrightarrow\dfrac{1}{8}\le\dfrac{1}{7}$.

2. Essendo $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$, tale funzione è definita in $R-\{1\}$, pertanto 1 è un punto di accumulazione per *f*, non appartenente al dominio, e risulta $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^2}=+\infty$ ovvero,per la definizione di limite : $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, tale che se $x\in R$ e se $0<|x-x_0|<\delta$ risulta che $f(x)\in I_{+\infty}\Leftrightarrow f(x)>\in$ Pertanto fissato $\varepsilon>0$, si ha: $\frac{1}{(1-x)^2}>\varepsilon\Leftrightarrow\frac{1}{\varepsilon}>(1-x)^2\Leftrightarrow|1-x|<\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\Leftrightarrow-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}<1-x<\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, ovvero $-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}-1<-x<\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}-1\Leftrightarrow 1-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}<x<1+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ quindi posto $\delta=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, esiste il delta in funzione di epsilon che soddisfatta il limite trovato.

3. Data la funzione $x\to f(x)=\frac{2x^2+x-1}{2x-1}\in R$

Insieme di definizione:

Essendo una funzione razionale, il numeratore è definito $\forall x\in R$, mentre il denominatore è definito $2x-1\neq 0\Leftrightarrow x\in R-\left\{\frac{1}{2}\right\}$,

pertanto $X=\left(R-\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)\cap R=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$

Quindi tale funzione è definita $\forall x\in\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$, ovvero

$$f:\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2},+\infty\right[\to f(x)=\frac{2x^2+x-1}{2x-1}\in R$$

Segno della funzione:

Essendo il denominatore positivo $2x-1>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$,ed il numeratore risulta positivo $\left]-\infty,-1\right[\cup\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$, in quanto $\Delta=9$ e le soluzioni risultano $x=\frac{-1\pm 3}{4}$; pertanto $f(x)>0\Leftrightarrow x\in\left]-1,\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$

Conseguentemente $f(x)<0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-1\right[$

Si osserva che $f(-1)=0$, quindi passa per il punto $(-1,0)$, ed $f(0)=1$ e passa anche per il punto $(0,1)$.

Limiti significativi:

Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare il limite nel punto di accumulazione che non appartiene al dominio e nell'estremo inferiore e superiore.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x-1}{2x-1} = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x-1}{2x-1} = +\infty$ pertanto potrebbero esserci degli asintoti obliqui, per cui $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x-1}{x(2x-1)} = 1$, mentre

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x-1}{2x-1} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x-1-2x^2+x}{2x-1} = 1$pertanto la retta $y = x+1$ risulta asintoto obliquo a destra ed a sinistra, inoltre

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{2x^2+x-1}{2x-1} = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{4x+1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{2x^2+x-1}{2x-1} = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{4x+1}{2} = \frac{3}{2}$$

Non vi sono asintoti orizzontali e verticali.

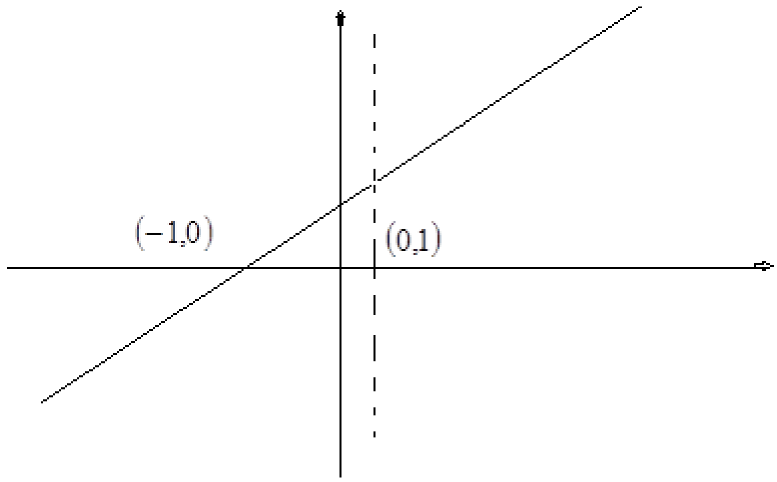
Derivata prima e monotonia:

$f'(x) = \frac{(4x+1)(2x-1)-2(2x^2+x-1)}{(2x-1)^2} = \frac{4x^2-4x+1}{(2x-1)^2}$, quindi essendo il denominatore sempre positivo $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x^2-4x+1 > 0$, per cui essendo $\Delta = 0$ la soluzione risultano $x = \frac{4\pm 0}{8} = \frac{1}{2}$;pertanto $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$, conseguentemente la funzione è strettamente crescente nel suo dominio.

Derivata seconda e concavità:

$$f''(x) = \frac{4x^2-4x+1}{(2x-1)^2} = \frac{(8x-4)(2x-1)^2-(4x^2-4x+1)2(2x-1)2}{(2x-1)^4} =$$

$= \frac{(8x-4)(2x-1)-4(4x^2-4x+1)}{(2x-1)^3} = \frac{16x^2-16x+4+(-16x^2+16x-4)}{(2x-1)^3} = 0$, pertanto $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ quindila funzione non è, ne strettamente convessa, ne strettamente concava.



equindi dedurre che:

$f\left(\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2},+\infty\right[\right)=\left]-\infty,\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$, quindi è illimitata, inoltre f è biunivocasu $\left]-\infty,\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$.

4. Essendo $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x>0 \\ \cos x & \text{se } x\le 0\end{cases}$, per cui f è continua in $R-\{0\}$; si osserva che $f(0)=\cos 0=1$, il $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\cos x=1$ ed il $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$; pertanto il punto 0 per la funzione data, è un punto di discontinuità di *seconda specie*.

5. Si tratta di risolvere il seguenteintegrale $\int xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=-e^{-\frac{x^2}{2}}+c$ pertanto $P(0)=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow -e^{-\frac{0^2}{2}}+c=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow c=\frac{\pi}{2}+1$ la primitiva cercata risulta $P(x)=-e^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{\pi+2}{2}$ e l'equazione della tangente richiesta, è: $y=P'(1)(x-1)+P(1)\Leftrightarrow y=e^{-\frac{1}{2}}(x-1)-e^{-\frac{1^2}{2}}-\frac{\pi+2}{2}\Leftrightarrow y=xe^{-\frac{1}{2}}-2e^{-\frac{1^2}{2}}-\frac{\pi+2}{2}$.

6. Essendo il sistema $A\alpha=b$, si osserva che $\det(A)=\begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & 2 & k \\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} 2 & k \\ -1 & 2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 0 & k \\ 3 & 2\end{vmatrix}=k7+k^2$ ed ovviamente anche mentre il $\det(B)\ne 0$; quindi per $\forall k\in R-\{0,-7\}$ $Car(A)=Car(B)=n$, pertanto il sistema è di Cramer compatibile; ed essendo omogeneo risulta $x=0$, $y=0$ e $z=0$; mentre per $k=0$, possiamo estrarre una matrice A' per cui il $\det(A')=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1\end{vmatrix}=-6$ e conseguentemente anche la matrice estratta da B ha determinante diverso da zero pertanto la $Car(A')=Car(B')=2<n$, quindi in tal caso il sistema è compatibile ed ammette infinite soluzioni; ovvero poiché si è analizzata la matrice $A'=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1\end{pmatrix}$ il sistema diventa

$\begin{cases} 2y = 0 \\ 3x - y = -2z \end{cases} = \begin{cases} y = 0 \\ x = -\frac{2}{3}z \end{cases}$ pertanto la terna delle soluzioni è $\left(-\frac{2}{3}z, 0, z \right)$, $\forall z \in R$;mentre per $k = -7$, possiamo estrarre una matrice A' per cui il $\det(A') = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -6$ e conseguentemente anche la matrice estratta da B ha determinante diverso da zero pertanto la $Car(A') = Car(B') = 2 < n$, quindi in tal caso il sistema è compatibile ed ammette infinite soluzioni; ovvero poiché si è analizzata la matrice $A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ il sistema diventa $\begin{cases} 2y = 7z \\ 3x - y = -2z \end{cases} = \begin{cases} y = \frac{7}{2}z \\ x = \frac{1}{2}z \end{cases}$ pertanto la terna delle soluzioni è $\left(\frac{1}{2}z, \frac{7}{2}z, z \right)$, $\forall z \in R$.