Matematica per l'Economia (A-K)
II Provetta – 20 dicembre 2021
(prof. Bisceglia)

Traccia A

1. Data la funzione $f(x)=\begin{cases} arcsen(x) & \text{se } x<1 \\ 3x-1 & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$, individuare *eventuali* punti di *discontinuità* e *classificarli*.

2. Data la funzione $f(x)=\begin{cases} arctg\left(\dfrac{1}{|x|}\right), & \text{se } x\in \left]-1,1\right[-\{0\} \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{se } x=0 \end{cases}$, dire se *soddisfa le ipotesi* dei Teoremi di *Weierstrass* e di *Bolzano*.

3. *Studiare* la funzione $f(x)=\log_2(2-x)$, *e tracciarne* approssimativamente il grafico.

4. Data la matrice $A=\begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e la matrice $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, *riportare* la matrice $\left(A\cdot B^T\right)^{-1}$.

5. Data la funzione $f(x)=\dfrac{1}{1+3x^2}$, *calcolare la primitiva nell'intervallo* $[0,1]$.

6. Enunciare il Teorema *fondamentale del calcolo dell'integrale*.

Svolgimento - Traccia A

1. Data la funzione $f(x)=\begin{cases} arcsen(x) & \text{se } x<1 \\ 3x-1 & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$, definita $\forall x\in \left[-1,+\infty\right[$; si osserva nel punto $x=1$, che $f(1)=2$, il $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(3x-1)=2$ ed il $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} arcsen(x)=\dfrac{\pi}{2}\neq f(1)$; pertanto la funzione nel punto $x=1$ *ha una discontinuità di I specie*.

2. La funzione $f(x)=\begin{cases} arctg\left(\dfrac{1}{|x|}\right), & \text{se } x\in\left]-1,1\right[-\{0\} \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{se } x=0 \end{cases}$, definita $\forall x\in\left]-1,1\right[$ risulta continua nel suo insieme di definizione, in quanto $\lim\limits_{x\to 0} arctg\left(\dfrac{1}{|x|}\right)=\dfrac{\pi}{2}=f(0)$ ed essendo appunto definita in un insieme non chiuso, non soddisfa le ipotesi del Teorema di Weierstrass; mentre soddisfa quelle del Teorema di Bolzano, essendo il suo dominio un intervallo.

3. *Data la funzione*: $f(x)=\log_2(2-x)$.
Insieme di definizione:
Esseno la funzione log definita in $\left]0,+\infty\right[$ risulta $2-x>0 \Leftrightarrow x<2$
pertanto $X=\left]-\infty,2\right[$

Quindi tale funzione è definita $\forall x\in\left]-\infty,2\right[$, ovvero

$$f:\left]-\infty,2\right[\to f(x)=\log_2(2-x)\in R$$

Segno della funzione:
Deve essere $f(x)>0 \Leftrightarrow \log_2(2-x)>0=\log_2 1 \Leftrightarrow 2-x>1 \Leftrightarrow x<1$
Pertanto $f(x)>0 \Leftrightarrow \forall x\in\left]-\infty,1\right[\cap X=\left]-\infty,1\right[$
Quindi $f(x)<0 \Leftrightarrow \forall x\in\left]1,+\infty\right[\cap X=\left]1,2\right[$
E conseguentemente $f(x)=0 \Leftrightarrow x=1$
Pertanto la funzione passa per i punti $(1,f(1))=(1,0)$ ed $(0,f(0))=(0,1)$

Limiti significativi:
Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare il limite nell'estremo inferiore e nell'estremo superiore.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\log_2(2-x)=+\infty$, in quanto trattandosi di funzione composta, per cui $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x)=+\infty$ e conseguentemente $\lim\limits_{y\to+\infty}\log_2 y=+\infty$

Inoltre si osservi che $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\log_2(2-x)}{x}$ risulta della forma indeterminata $\dfrac{\infty}{\infty}$, pertanto servendosi di De L'Hopital, si ha $-\log_2 e\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2-x}=0$ conseguentemente non vi sono asintoti obliqui:

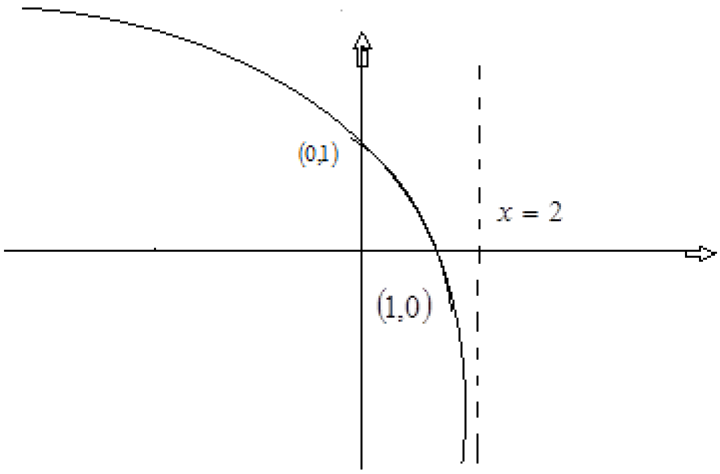
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\log_2(2-x)=-\infty$, in quanto trattandosi di funzione composta, per cui $\lim\limits_{x\to 2^-}(2-x)=0$ e conseguentemente $\lim\limits_{y\to 0}\log_2 y=-\infty$
Pertanto la retta $x=2$ è un asintoto orizzontale a sinistra.

Derivata prima e monotonia:

$f'(x)=\dfrac{-\log_2 e}{2-x}$, quindi $f'(x)>0 \Leftrightarrow -(2-x)>0 \Leftrightarrow x>2$, e conseguentemente risulta $f'(x)<0 \Leftrightarrow x>2$ quindi la funzione è strettamente decrescente in $\forall x \in \left]-\infty,2\right[$, pertanto in tutto il suo dominio.

Derivata seconda e concavità:

$f''(x)=\dfrac{-\log_2 e}{(2-x)^2}$, per cui risulta $f''(x)>0 \Leftrightarrow \forall x \in \varnothing$ e conseguentemente $f''(x)<0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,2\right[$; per cui la funzione è strettamente concava in tutto il suo dominio.



e quindi dedurre che:

$f\left(\left]-\infty,2\right[\right)=R$, f è invertibile, non è limitata, è 2-simmetrica.

4. Iniziamo con il calcolare la trasposta della matrice $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ che risulta $B^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$

ed essendo la matrice $A=\begin{pmatrix}k & 1\\ 1 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ è possibile effettuare il prodotto $A\cdot B^T$ in quanto il numero delle colonne di *A* è uguale al numero delle righe della trasposta di *B*, per cui il prodotto righe per colonne risulta $A\cdot B^T=\begin{pmatrix}k-1 & 2 & -k\\ 3 & -4 & -1\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}$ il cui determinante risulta $\det(A\cdot B^T)=0$ per cui la matrice risulta singolare quindi non ha soluzioni e conseguentemente $\nexists (A\cdot B^T)^{-1}$.

5. Data la funzione $f(x)=\dfrac{1}{1+3x^2}$, *la primitiva nell'intervallo* $[0,1]$ risulta: $\int_0^1 \dfrac{1}{1+3x^2}dx$; per cui per il teorema fondamentale del calcolo dell'integrale essendo

$\int \frac{1}{1+3x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\,arctg\left(\sqrt{3}x\right)+c$ risulta $\int_0^1 \frac{1}{1+3x^2}\,dx = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\,arctg\left(\sqrt{3}x\right)+c\right]_0^1$ ovvero $\frac{1}{\sqrt{3}}\,arctg\left(\sqrt{3}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\,arctg(0)=\frac{1}{\sqrt{3}}\,arctg\left(\sqrt{3}\right).$

6. Il Teorema *fondamentale del calcolo dell'integrale* sia $f:[a,b]\to R$, sia f continua; *allora* $\forall G$, primitiva di f risulta: $\int_a^b f(x) = [G(x)+c]_a^b = G(b)-G(a)$.

Traccia B

1. Data la funzione $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & \text{se } x<0 \\ \arccos(x) & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$, individuare *eventuali* punti di *discontinuità* e *classificarli*.

2. Data la funzione $f(x)=\begin{cases} arc\cot g\left(\frac{1}{|x|}\right), & \text{se } x\in[-1,1]-\{0\} \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } x=0 \end{cases}$, dire se *soddisfa le ipotesi* dei Teoremi di *Weierstrass* e di *Bolzano*.

3. *Studiare* la funzione $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(1-x)$, *e tracciarne* approssimativamente il grafico.

4. Data la matrice $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e la matrice $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, *riportare* la matrice $\left(A\cdot B^T\right)^{-1}$.

5. Data la funzione $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}$, *calcolare la primitiva nell'intervallo* $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

6. Enunciare il Teorema *della media dell'integrale definito*.

Svolgimento - Traccia B

1. Data la funzione $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & \text{se } x<0 \\ \arccos(x) & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$, definita $\forall x\in\left]-\infty,1\right]$; si osserva nel punto $x=0$, $f(0)=\frac{\pi}{2}$, il $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\arccos(x)=\frac{\pi}{2}$ ed il

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x^2+2) = 2 \neq f(0)$; pertanto la funzione nel punto $x=0$ *ha una discontinuità di I specie*.

2. La funzione $f(x) = \begin{cases} arc\cot g\left(\frac{1}{|x|}\right), & \text{se } x \in [-1,1]-\{0\} \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } x = 0 \end{cases}$, definita $\forall x \in [-1,1]$ non risulta continua nel suo insieme di definizione, in quanto $\lim_{x\to 0} arc\cot g\left(\frac{1}{|x|}\right) = 0 \neq f(0)$; pertanto non soddisfa le ipotesi dei Teoremi richiesti.

3. *Data la funzione*: $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(1-x)$.

Insieme di definizione:
Esseno la funzione log definita in $]0,+\infty[$ risulta $1-x>0 \Leftrightarrow x<1$
pertanto $X =]-\infty,1[$

Quindi tale funzione è definita $\forall x \in]-\infty,1[$, ovvero

$$f :]-\infty,1[\to f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(1-x) \in R$$

Segno della funzione:
Deve essere $f(x)>0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(1-x) > 0 = \log_{\frac{1}{2}} 1 \Leftrightarrow 1-x<1 \Leftrightarrow x>0$
Pertanto $f(x)>0 \Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[\cap X =]0,1[$
Quindi $f(x)<0 \Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,0[\cap X =]-\infty,0[$
E conseguentemente $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$
Pertanto la funzione passa per il punto $(0, f(0)) = (0,0)$.

Limiti significativi:
Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare il limite nell'estremo inferiore e nell'estremo superiore.

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \log_{\frac{1}{2}}(1-x) = -\infty$, in quanto trattandosi di funzione composta, per cui $\lim_{x\to -\infty}(1-x) = +\infty$ e conseguentemente $\lim_{y\to +\infty} \log_{\frac{1}{2}} y = -\infty$

Inoltre si osservi che $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\log_{\frac{1}{2}}(1-x)}{x}$ risulta della forma indeterminata $\dfrac{\infty}{\infty}$, pertanto servendosi di De L'Hopital, si ha $-\log_{\frac{1}{2}} e \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1-x}=0$ conseguentemente non vi sono asintoti obliqui:

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\log_{\frac{1}{2}}(1-x)=+\infty$, in quanto trattandosi di funzione composta, per cui $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)=0$ e conseguentemente $\lim\limits_{y\to0}\log_{\frac{1}{2}} y=+\infty$

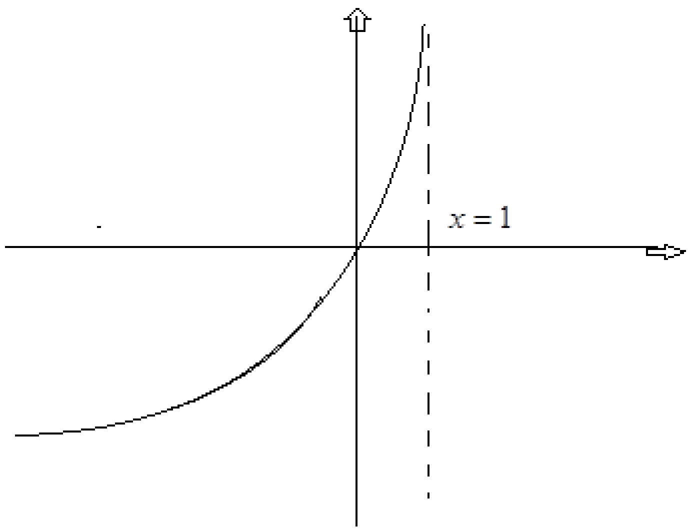
Pertanto la retta $x=1$ è un asintoto orizzontale a sinistra.

Derivata prima e monotonia:

$f'(x)=\dfrac{-1}{1-x}\log_{\frac{1}{2}} e$., quindi $f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-x>0 \Leftrightarrow x<1$, e conseguentemente risulta $f'(x)<0 \Leftrightarrow x>1$ quindi la funzione è strettamente crescente in $\forall x\in\left]-\infty,1\right[$, pertanto in tutto il suo dominio.

Derivata seconda e concavità:

$f''(x)=-\log_{\frac{1}{2}} e\dfrac{1}{(1-x)^2}$, per cui risulta $f''(x)<0 \Leftrightarrow \forall x\in\varnothing$ e conseguentemente $f''(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,1\right[$; per cui la funzione è strettamente convessa in tutto il suo dominio.



e quindi dedurre che:

$f\left(\left]-\infty,1\right[\right)=R$, f è invertibile, non è limitata, è 1-simmetrica.

4. Iniziamo con il calcolare la trasposta della matrice $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ che risulta $B^T=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ed essendo la matrice $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è possibile effettuare il prodotto $A \cdot B^T$ in quanto il numero delle colonne di *A* è uguale al numero delle righe della trasposta di *B*, per cui il prodotto righe per colonne risulta $A \cdot B^T=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -k & 0 & k-1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ il cui determinante risulta $\det\left(A \cdot B^T\right)=0$ per cui la matrice risulta singolare quindi non ha soluzioni e conseguentemente $\nexists\left(A \cdot B^T\right)^{-1}$.

5. Data la funzione $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-3x^2}}$, *la primitiva nell'intervallo* $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ risulta: $\displaystyle\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}\,dx$; per cui per il teorema fondamentale del calcolo dell'integrale essendo $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{3}}arcsen\left(\sqrt{3}x\right)+c$ risulta $\displaystyle\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}\,dx=\left[\frac{1}{\sqrt{3}}arcsen\left(\sqrt{3}x\right)+c\right]_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}$ ovvero $\dfrac{1}{\sqrt{3}}arcsen\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-\dfrac{1}{\sqrt{3}}arcsen\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}arcsen\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\dfrac{\pi}{3}$.

6. Il Teorema *della media dell'integrale definito sia* $f:X\to R$, sia f continua *allora* $\forall a,b\in X,\exists c\in[a,b], t.c.: \displaystyle\int_a^b f(x)=f(c)(b-a)$.