Matematica per l'Economia (A-K)
II Esonero – 15 dicembre 2017
(prof. Bisceglia)

## Traccia A

1. Data la funzione $f(x)=\begin{cases} sen2x & \forall x<\dfrac{\pi}{2} \\ \cos(\pi-x) & \forall x\geq\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$, individuare *eventuali* punti di *discontinuità* e *classificarli*.

2. Determinare, *se possibile*, un *punto di approssimazione* con un errore $\in\leq 9^{-1}$, dell'equazione $-xe^{x}+1=0$, nell'intervallo $[0,1]$.

3. *Studiare* la funzione $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(2^{x}-1\right)$, *e tracciarne* approssimativamente il grafico.

4. Data la matrice $A=\begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1\end{pmatrix}$ con $b=\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1\end{pmatrix}$ *studiare il* relativo *sistema*, nella *sua variabile*.

5. Data la funzione $f(x)=e^{\frac{x}{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-(\pi x)^{2}}}$, *calcolare la primitiva P*, *passante* per il punto $(0,1)$.

6. Data la funzione utilità, $U(x,y)=xy$, *nel rispetto* del seguente *vincolo*, $x+y=10$; determinare *l'eventuale punto estremante esterno*.

## Svolgimento - Traccia A

1. Essendo $f(x)=\begin{cases} sen2x & \forall x<\dfrac{\pi}{2} \\ \cos(\pi-x) & \forall x\geq\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$, per cui $f$ è continua in $R-\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$; si osserva che $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ , il $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^{+}}\cos(\pi-x)=0$ ed il $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^{-}} sen2x=0=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ ; pertanto la funzione data *non ha punti di discontinuità*.

2. Data la funzione $f(x) = -xe^x + 1$, continua nell'intervallo $[0,1]$, e risultando $f(0) \cdot f(1) < 0$, ricorrono tutte le ipotesi del teorema degli zeri, pertanto $\exists x_0 \in ]0,1[ / f(x_0) = 0$. Per cui sapendo che $|x_0 - c_n| < c_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n+1}} \le 9^{-1}$, si ha $\frac{b-a}{2^{n+1}} \le 9^{-1} \Leftrightarrow \frac{b-a}{9^{-1}} \le 2^{n+1} \Leftrightarrow n \ge \frac{\log((b-a)9)}{\log 2} - 1$ quindi $n \ge \frac{\log 9}{\log 2} - 1 = 2.16$ pertanto, posto $n = 3$ si osserva che il punto di approssimazione con un errore $\in \le 9^{-1}$ risulta:

| N | $a_n$ | $b_n$ | $c_n$ | $f(a_n)$ | $f(b_n)$ | $f(c_n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1/2 | + | — | + |
| 1 | 1 | 1/2 | 3/4 | — | + | — |
| 2 | 1/2 | 3/4 | 5/8 | + | — | — |
| 3 | ½ | 5/8 | 9/16 | + | — | |

essere $c_3 = \frac{9}{16}$, e tale valore rispetta l'errore in quanto $\left|\frac{9}{16} - \frac{5}{8}\right| = \left|\frac{9}{16} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{16} \le \frac{1}{9}$.

3. *Data la funzione*: $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(2^x - 1)$.

*Insieme di definizione:*

Essendo una funzione logaritmica, deve essere $2^x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2^x > 1 = 2^0 \Leftrightarrow x \in ]0,+\infty[$

pertanto $X = ]0,+\infty[$

Quindi tale funzione è definita $\forall x \in ]0,+\infty[$, ovvero

$$f : ]0,+\infty[ \to f(x) = \log_{1/2}(2^x - 1) \in R$$

*Segno della funzione:*

Deve essere $f(x) > 0 \Leftrightarrow \log_{1/2}(2^x - 1) > 0 = \log_{1/2} 1 \Leftrightarrow 2^x - 1 < 1 \Leftrightarrow 2^x < 2 \Leftrightarrow x < 1$

Pertanto $f(x) > 0 \Leftrightarrow \forall x \in ]-\infty,1[ \cap X = ]0,1[$

Quindi $f(x) < 0 \Leftrightarrow \forall x \in ]1,+\infty[ \cap X = ]1,+\infty[$

E conseguentemente $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ la funzione passa per il punto $(1,0)$

*Limiti significativi:*

Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare il limite nel punto di accumulazione che non appartiene al dominio e nell'estremo inferiore.

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \log_{1/2}(2^x - 1) = +\infty$, in quanto trattasi di funzione composta, per cui $\lim_{x \to 0^+}(2^x - 1) = 0$ e conseguentemente $\lim_{y \to 0^+} \log_{1/2} y = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \log_{1/2}(2^x - 1) = -\infty$, sempre trattandosi di funzione composta, si ha $\lim_{x \to +\infty}(2^x - 1) = +\infty$ e conseguentemente $\lim_{y \to +\infty} \log_{1/2} y = -\infty$

Quindi si osserva che il limite $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ponendosi sotto la forma indeterminata infinito su infinito, con de l'Hopital si ha $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_{1/2}(2^x-1)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\log 2}{(2^x-1)}\log_{1/2}e=\log 2\log_{1/2}e=-1$ e quindi il $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to+\infty}\log_{1/2}(2^x-1)+x=0$

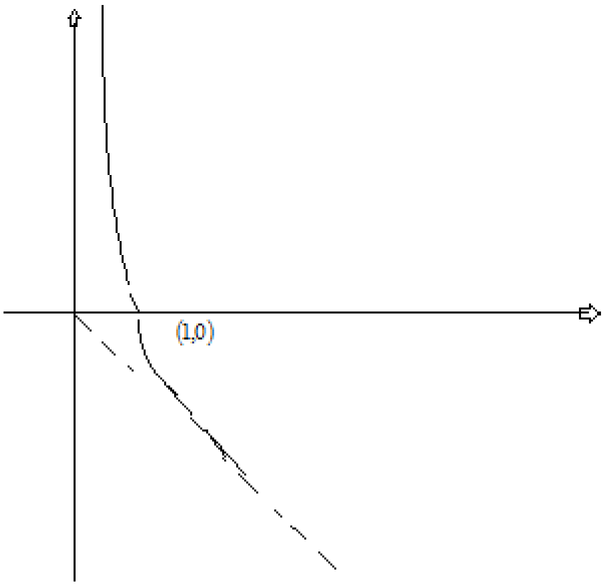
Pertanto la retta $y=-x$ è un asintoto obliquo a destra e la retta $x=0$ è un asintoto verticale a destra.

*Derivata prima e monotonia:*

$f'(x)=\log_{1/2}e\frac{2^x}{2^x-1}\log_e 2$., quindi $f'(x)>0\Leftrightarrow\log_{1/2}e\frac{2^x}{2^x-1}\log_e 2>0$, ed osservando che solo $\log_{1/2}e$, è negativo, risulta $f'(x)>0\Leftrightarrow x\in\varnothing$ quindi la funzione è strettamente decrescente nel suo dominio.

*Derivata seconda e concavità:*

$f''(x)=\frac{\log_e 2}{\log_e 1/2}\frac{(2^x-1)2^x\log_e 2-2^x(2^x\log_e 2)}{(2^x-1)^2}=\frac{\log_e 2}{\log_e 1/2}\frac{-(2^x\log_e 2)}{(2^x-1)^2}$, ed osservando che il $\log_e 1/2$ è negativo, risulta $f''(x)>0\Leftrightarrow x\in\left]0,+\infty\right[$ pertanto la funzione è strettamente convessa nel suo dominio.




e quindi dedurre che:

$f\left(\left]0,+\infty\right[\right)=R$, $f$ è invertibile ed illimitata.

4. Essendo il sistema $A\alpha=b$, si osserva che per $A=\begin{pmatrix}k&1\\1&0\\2&1\end{pmatrix}$ $\det(A')=\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}=1$ mentre il

$\det(B)=\begin{vmatrix}k&1&0\\1&0&-1\\2&1&1\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}0&-1\\1&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}=k-3$; quindi per $k\neq 3$ $Car(A)=2\neq Car(B)=3$, pertanto il sistema è incompatibile; mentre $k=3$, $Car(A)=Car(B)=2=r$ il numero delle incognite, pertanto il sistema diventa di Cramer, compatibile ed ammette una sola soluzione ovvero $\begin{cases} x = -1 \\ 2x + y = 1 \end{cases} = \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$.

5. Data la funzione $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{\sqrt{1-(\pi x)^2}}$, si ha: $\int \left( e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{\sqrt{1-(\pi x)^2}} \right) dx$, e quindi $\int e^{\frac{x}{2}} dx - \int \frac{1}{\sqrt{1-(\pi x)^2}} dx = 2e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{\pi} arcsen(\pi x) + c$; pertanto per la primitiva richiesta deve essere $F(0) = 1 \Leftrightarrow 2e^{\frac{0}{2}} - \frac{1}{\pi} arcsen(\pi 0) + c = 1 \Leftrightarrow c = -1$, conseguentemente la primitiva è: $F(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{\pi} arcsen(\pi x) - 1$.

6. Data la funzione utilità $U(x, y) = xy$, nel rispetto del vincolo $x + y = 10$, che possiamo esprime in funzione di una variabile, $y = 10 - x \Leftrightarrow g(x) = 10 - x$, per cui la funzione diventa $U(x, g(x)) = h(x) = x(10 - x)$, quindi la funzione di una variabile $h(x) = -x^2 + 10x$, la cui derivata prima risulta $h'(x) = -2x + 10$ e posta uguale a zero, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ e conseguentemente, nella funzione $y = g(x) \Leftrightarrow y = 5$ quindi il punto estremante risulta $(5,5)$; ed osservando che $h''(x) = -2$, il punto trovato è di massimo, e la sua utilità massima è $U(5,5) = 5^2$.

## Traccia B

1. Data la funzione $f(x) = \begin{cases} arcsenx + \frac{\pi}{2} & \forall x < 0 \\ \arccos x & \forall x \geq 0 \end{cases}$, individuare *eventuali* punti di *discontinuità* e *classificarli*.

2. Determinare, *se possibile*, un *punto di approssimazione* con un errore $\in \leq 9^{-1}$, dell'equazione $xe^x - 1 = 0$, nell'intervallo $[0,1]$.

3. *Studiare* la funzione $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(3^x - 1)$, *e tracciarne* approssimativamente il grafico.

4. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ con $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ *studiare* il relativo *sistema*, nella *sua variabile*.

5. Data la funzione, $f(x) = 2^{3x-1} + \frac{1}{sen^2 x}$ *calcolare la primitiva P, passante* per il punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

6. Data la funzione utilità, $U(x, z) = xz$, *nel rispetto* del seguente *vincolo*, $x + z = 8$; determinare *l'eventuale punto estremante esterno*.

## Svolgimento - Traccia B

1. Essendo $f(x)=\begin{cases} arcsenx+\dfrac{\pi}{2} & \forall x<0 \\ \arccos x & \forall x\ge 0 \end{cases}$, per cui $f$ è continua in $R-\{0\}$; si osserva che $f(0)=\arccos(0)=\dfrac{\pi}{2}$, il $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$ ed il $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} arcsenx+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}=f(0)$; pertanto la funzione data *non ha punti di discontinuità*.

2. Data la funzione $f(x)=xe^x-1$, continua nell'intervallo $[0,1]$, e risultando $f(0)\cdot f(1)<0$, ricorrono tutte le ipotesi del teorema degli zeri, pertanto $\exists x_0\in ]0,1[ / f(x_0)=0$. Per cui sapendo che $|x_0-c_n|<c_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^{n+1}}\le 9^{-1}$, si ha $\dfrac{b-a}{2^{n+1}}\le 9^{-1}\Leftrightarrow \dfrac{b-a}{9^{-1}}\le 2^{n+1}\Leftrightarrow n\ge \dfrac{\log((b-a)9)}{\log 2}-1$ quindi $n\ge\dfrac{\log 9}{\log 2}-1=2.16$ pertanto, posto $n=3$ si osserva che il punto di approssimazione con un errore $\in\le 9^{-1}$ risulta:

| N | $a_n$ | $b_n$ | $c_n$ | $f(a_n)$ | $f(b_n)$ | $f(c_n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1/2 | — | + | — |
| 1 | 1 | 1/2 | 3/4 | + | — | + |
| 2 | 1/2 | 3/4 | 5/8 | — | + | + |
| 3 | ½ | 5/8 | 9/16 | — | + | |

essere $c_3=\dfrac{9}{16}$, e tale valore rispetta l'errore in quanto $\left|\dfrac{9}{16}-\dfrac{5}{8}\right|=\left|\dfrac{9}{16}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{16}\le\dfrac{1}{9}$.

3. *Data la funzione*: $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(3^x-1)$.

*Insieme di definizione:*
Essendo una funzione logaritmica, deve essere $3^x-1>0\Leftrightarrow 3^x>1=3^0\Leftrightarrow x\in ]0,+\infty[$
pertanto $X=]0,+\infty[$

Quindi tale funzione è definita $\forall x\in ]0,+\infty[$, ovvero

$$f: ]0,+\infty[\to f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(3^x-1)\in R$$

*Segno della funzione:*
Deve essere
$f(x)>0\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(3^x-1)>0=\log_{1/3}1\Leftrightarrow 3^x-1<1\Leftrightarrow 3^x<2=3^{\log_3 2}\Leftrightarrow x<\log_3 2$

Pertanto $f(x) > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty, \log_3 2\right[ \cap X = \left]0, \log_3 2\right[$

Quindi $f(x) < 0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]\log_3 2, +\infty\right[ \cap X = \left]\log_3 2, +\infty\right[$

E conseguentemente $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_3 2$ la funzione passa per il punto $(\log_3 2, 0)$

*Limiti significativi:*

Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare il limite nel punto di accumulazione che non appartiene al dominio e nell'estremo inferiore.

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \log_{\frac{1}{3}}(3^x - 1) = +\infty$, in quanto trattasi di funzione composta, per cui

$\lim_{x \to 0^+}(3^x - 1) = 0$ e conseguentemente $\lim_{y \to 0^+} \log_{1/3} y = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \log_{\frac{1}{3}}(3^x - 1) = -\infty$, sempre trattandosi di funzione composta, si ha

$\lim_{x \to +\infty}(3^x - 1) = +\infty$ e conseguentemente $\lim_{y \to +\infty} \log_{1/3} y = -\infty$

Quindi si osserva che il limite $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ponendosi sotto la forma indeterminata infinito su infinito, con de l'Hopital si ha $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_{\frac{1}{3}}(3^x - 1)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3^x \log 3}{(3^x - 1)} \log_{1/3} e = \log 3 \log_{1/3} e = -1$ e quindi il

$\lim_{x \to +\infty}(f(x) + x) = \lim_{x \to +\infty} \log_{1/3}(3^x - 1) + x = 0$

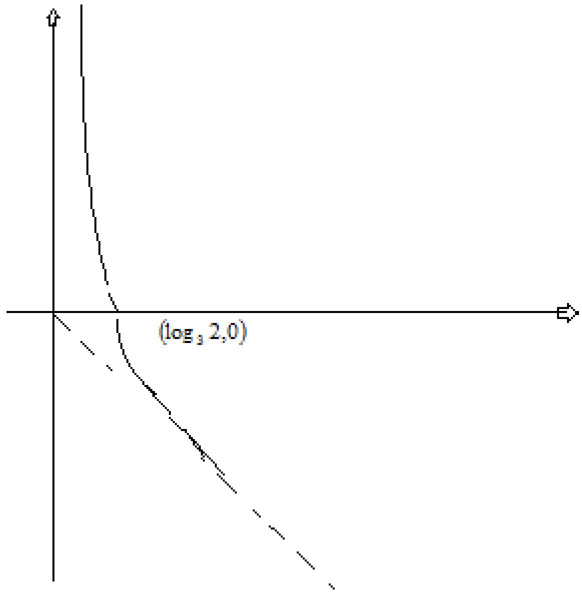
Pertanto la retta $y = -x$ è un asintoto obliquo a destra e la retta $x = 0$ è un asintoto verticale a destra.

*Derivata prima e monotonia:*

$f'(x) = \log_{1/3} e \frac{3^x}{3^x - 1} \log_e 3$., quindi $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \log_{1/3} e \frac{3^x}{3^x - 1} \log_e 3 > 0$, ed osservando che solo il $\log_{1/3} e$ , è negativo, risulta $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$ quindi la funzione è strettamente decrescente nel suo dominio.

*Derivata seconda e concavità:*

$f''(x) = \frac{\log_e 3}{\log_e 1/3} \frac{(3^x - 1)3^x \log_e 3 - 3^x(3^x \log_e 3)}{(3^x - 1)^2} = \frac{\log_e 3}{\log_e 1/3} \frac{-(3^x \log_e 3)}{(3^x - 1)^2}$ , ed osservando che il $\log_e 1/3$ è negativo, risulta $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]0, +\infty\right[$ pertanto la funzione è strettamente convessa nel suo dominio.




e quindi dedurre che:

$f\left(\left]0,+\infty\right[\right) = R$, $f$ è invertibile ed illimitata.

4. Essendo il sistema $A\alpha = b$, si osserva che per $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ $\det(A') = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$ mentre il $\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ k & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$; quindi $Car(A) = 2 \neq Car(B) = 3$, pertanto il sistema è incompatibile per $\forall k \in R$.

5. Data la funzione $f(x) = 2^{3x-1} + \frac{1}{sen^2 x}$, si ha: $\int \left( 2^{3x-1} + \frac{1}{sen^2 x} \right) dx$, e quindi $\int 2^{3x-1} dx + \int \frac{1}{sen^2 x} dx = \frac{1}{3\log 2} 2^{3x-1} - \cot gx + c$; pertanto per la primitiva richiesta deve essere $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2^{\frac{3}{2}\pi-1}}{\log 8} - \cot g\left(\frac{\pi}{2}\right) + c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{2^{\frac{3}{2}\pi-1}}{\log 8}$, conseguentemente la primitiva è: $F(x) = \frac{2^{3x-1}}{\log 8} - \cot gx - \frac{2^{\frac{3}{2}\pi-1}}{\log 8}$.

6. Data la funzione utilità $U(x,z) = xz$, nel rispetto del vincolo $x + z = 8$, che possiamo esprime in funzione di una variabile, $z = 10 - x \Leftrightarrow g(x) = 8 - x$, per cui la funzione diventa $U(x, g(x)) = h(x) = x(8 - x)$, quindi la funzione di una variabile $h(x) = -x^2 + 8x$, la cui derivata prima risulta $h'(x) = -2x + 8$ e posta uguale a zero, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ e conseguentemente, nella funzione $z = g(x) \Leftrightarrow z = 4$ quindi il punto estremante risulta $(4,4)$; ed osservando che $h''(x) = -2$, il punto trovato è di massimo, e la sua utilità massima è $U(4,4) = 4^2$.