Matematica per l'Economia (A-K)
II Esonero – 20 dicembre 2019
(prof. Bisceglia)

Traccia A

1. Data la funzione $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{se } x<1 \\ 3x-1 & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$, individuare *eventuali* punti di *discontinuità* e *classificarli* e verificare inoltre la *sua derivabilità*.

2. Data la funzione $f(x)=arc\cot g\left(\frac{1}{x}\right)$, dire se *soddisfa le ipotesi* dei Teoremi di *Weierstrass* e di *Bolzano*.

3. *Studiare* la funzione $f(x)=arcsen\left(\frac{1}{x}\right)$, *e tracciarne* approssimativamente il grafico.

4. Data la matrice $A=\begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e la matrice $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, *riportare* la matrice $(A\cdot B)^{-1}$.

5. Data la funzione $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$, *calcolare la primitiva P*, *passante* per il punto $(0,1)$.

6. Data la funzione utilità, $U(x,y)=xy$, determinare *l'eventuale punto estremante nel rispetto* del seguente *vincolo*, $x+y=1$.

Svolgimento - Traccia A

1. Data la funzione $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{se } x<1 \\ 3x-1 & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$, definita $\forall x\in R$; si osserva nel punto $x=1$, che $f(1)=2$, il $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(3x-1)=2$ ed il $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x^2+1=2=f(1)$; pertanto la funzione data *non ha punti di discontinuità*. Inoltre la sua funzione derivata prima risulta $f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{se } x<1 \\ 3 & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$ definita $\forall x\in R$; verifichiamo quindi la derivabilità della funzione nel punto di raccordo $x=1$, per cui deve $\exists \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\in R$, ed essendo $\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2$ ed $\lim_{x\to 1^+}\frac{3x-1-2}{x-1}=-\lim_{x\to 1^+}\frac{3(x-1)}{x-1}=3$, la funzione *non è dotata di derivata* in $x=1$ e tale punto *è un punto angoloso* per la funzione data.

2. La funzione $f(x)=arc\cot g\left(\frac{1}{x}\right)$, definita $\forall x\in R-\{0\}$ risulta continua nel suo insieme di definizione, ma essendo questo $\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$, né un intervallo, né una parte di R chiusa e limitata, la funzione assegnata *non soddisfa le ipotesi dei due teoremi*.

3. *Data la funzione*: $f(x)=arcsen\left(\frac{1}{x}\right)$.

Insieme di definizione:

Essendo una funzione arcoseno, deve essere $\frac{1}{x}\in[-1,1]\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}\leq 1\\ \frac{1}{x}\geq -1\end{cases}\Leftrightarrow\forall x\in\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[$

pertanto $X=\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[$

Quindi tale funzione è definita $\forall x\in\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[$, ovvero

$$f:\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[\to f(x)=arcsen\left(\frac{1}{x}\right)\in R$$

Segno della funzione:

Deve essere $f(x)>0\Leftrightarrow arcsen\left(\frac{1}{x}\right)>0=arcsen(sen0)\Leftrightarrow\frac{1}{x}>0\Leftrightarrow x>0$

Pertanto $f(x)>0\Leftrightarrow\forall x\in\left]0,+\infty\right[\cap X=\left[1,+\infty\right[$

Quindi $f(x)<0\Leftrightarrow\forall x\in\left]-\infty,0\right[\cap X=\left]-\infty,-1\right]$

E conseguentemente $f(x)=0\Leftrightarrow x\in\varnothing$

Inoltre essendo $f(-1)=arcsen(-1)=-\frac{\pi}{2}$ ed essendo $f(1)=arcsen(1)=\frac{\pi}{2}$; la funzione passa per i punti $\left(-1,-\frac{\pi}{2}\right)$ ed $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$

Limiti significativi:

Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare il limite nell'estremo inferiore e nell'estremo superiore.

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}arcsen\left(\frac{1}{x}\right)=0$, in quanto trattandosi di funzione composta, per cui $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$ e conseguentemente $\lim_{y\to 0}arcseny=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} arcsen\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, in quanto trattandosi di funzione composta, per cui $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ e conseguentemente $\lim\limits_{y\to 0} arcseny = 0$

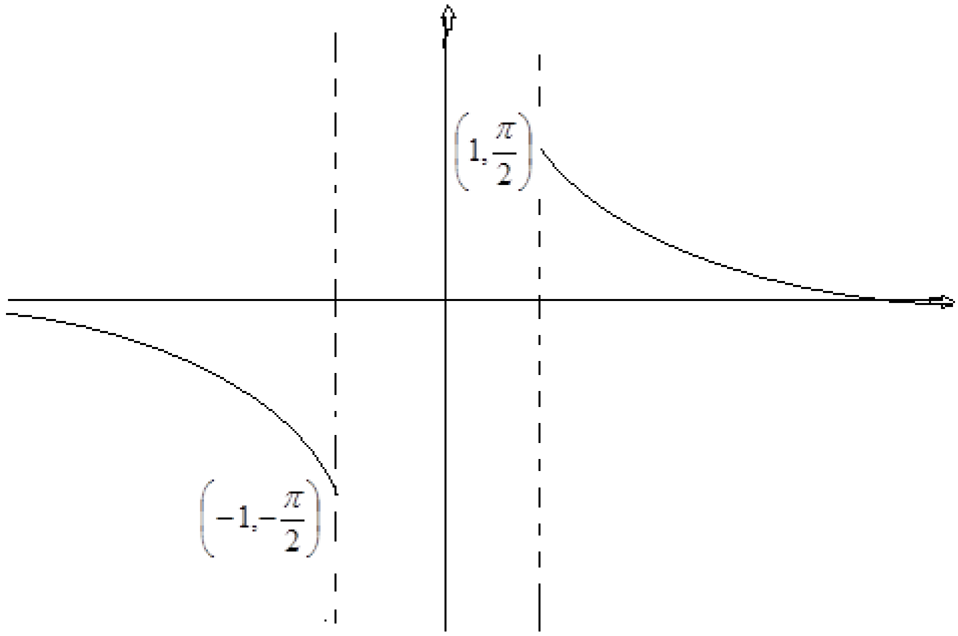
Pertanto la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale sia a sinistra che a destra.

Derivata prima e monotonia:

$f'(x) = \dfrac{-1}{x^2\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2}}}$., quindi $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{x^2\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2}}} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2}}} < 0$, ovvero $x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow \forall x \in \left]-1,1\right[$ e conseguentemente risulta $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in -\left]-1,1\right[\Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-1\right] \cup \left[1,+\infty\right[- \{-1,1\}$ quindi la funzione è strettamente decrescente in $\forall x \in \left]-\infty,-1\right] \cup \left[1,+\infty\right[- \{-1,1\}$ ed osservando che $\lim\limits_{x\to-1^-} f'(x) = -\lim\limits_{x\to-1^-} = \dfrac{1}{x^2\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2}}} = -(+\infty)$, così come $\lim\limits_{x\to1^+} f'(x) = -\lim\limits_{x\to1^+} = \dfrac{1}{x^2\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2}}} = -(+\infty)$, per cui la funzione è strettamente decrescente in tutto il suo dominio.

Derivata seconda e concavità:

$f''(x) = \dfrac{\dfrac{|x|}{x}\sqrt{x^2-1} + |x|\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{\left(|x|\sqrt{x^2-1}\right)^2} = \dfrac{|x|\left(2x^2-1\right)}{x\sqrt{x^2-1}\left(|x|\sqrt{x^2-1}\right)^2}$, per cui risulta $f''(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{|x|\left(2x^2-1\right)}{x\sqrt{x^2-1}\left(|x|\sqrt{x^2-1}\right)^2} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\left(2x^2-1\right)}{x} > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{2},0\right[\cup \left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ e conseguentemente $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in -\left(\left]-\frac{1}{2},0\right[\cup \left]\frac{1}{2},+\infty\right[\right) \Leftrightarrow x \in \left]-\infty-\frac{1}{2}\right[\cup \left]0,\frac{1}{2}\right[$; inoltre osservando che la funzione non è derivabile in $\{-1,1\}$ e risulta $\lim\limits_{x\to-1^-} f''(x) = -\infty$ mentre $\lim\limits_{x\to1^+} f''(x) = +\infty$ per cui la funzione è strettamente convessa $\forall x \in \left(\left]-\frac{1}{2},0\right[\cup \left]\frac{1}{2},+\infty\right[\right) \cap \left(\left]-\infty,-1\right] \cup \left[1,+\infty\right[\right) \Leftrightarrow \forall x \in \left[1,+\infty\right[$ ed è strettamente concava $\forall x \in \left(\left]-\infty-\frac{1}{2}\right[\cup \left]0,\frac{1}{2}\right[\right) \cap \left(\left]-\infty,-1\right] \cup \left[1,+\infty\right[\right) \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty,-1\right]$.



e quindi dedurre che:

$f\left(\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[\right)=\left[-\frac{\pi}{2},0\right[\cup\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, f è invertibile, è limitata, è dotata di minimo e massimo, è dispari.

4. Essendo la matrice $A=\begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e la matrice $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, è possibile effettuare il prodotto $A\cdot B$ in quanto il numero delle colonne della matrice *A* è pari al numero delle righe della matrice *B*, pertanto il prodotto righe per colonne, risulta $A\cdot B=\begin{pmatrix} k & 2-k & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ il cui determinante risulta $\det(A\cdot B)=0$ per cui la matrice risulta singolare quindi non ha soluzioni e conseguentemente $\nexists(A\cdot B)^{-1}$.

5. Data la funzione $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$, si ha: $\int e^{\frac{x}{2}}dx=2e^{\frac{x}{2}}+c$; pertanto per la primitiva richiesta deve essere $F(0)=1\Leftrightarrow 2e^{0}+c=1\Leftrightarrow c=-1$, per cui la primitiva richiesta risulta : $F(x)=2e^{\frac{x}{2}}-1$

6. Data la funzione utilità $U(x,y)=xy$, nel rispetto del vincolo $x+y=1$, che possiamo esprime in funzione di una variabile, $y=1-x\Leftrightarrow g(x)=1-x$, per cui la funzione diventa $U(x,g(x))=h(x)=x(1-x)$, quindi la funzione di una variabile $h(x)=-x^{2}+x$, la cui derivata prima risulta $h'(x)=-2x+1$ e posta uguale a zero, $h'(x)=0\Leftrightarrow -2x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ e conseguentemente, nella funzione $y=g(x)\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}$ quindi il punto estremante risulta $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$;

ed osservando che $h''(x) = -2$, il punto trovato è di massimo, e la sua utilità massima è $U\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Traccia B

1. Data la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{se } x < 0 \\ 3x + 2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, individuare *eventuali* punti di *discontinuità* e *classificarli* e verificare inoltre la *sua derivabilità*.

2. Data la funzione $f(x) = arctg\left(\frac{1}{x}\right)$, dire se *soddisfa le ipotesi* dei Teoremi di *Weierstrass* e di *Bolzano*.

3. *Studiare* la funzione $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$, *e tracciarne* approssimativamente il grafico.

4. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & k \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, *riportare l*a matrice $(A \cdot B)^{-1}$.

5. Data la funzione $f(x) = e^{2x}$, *calcolare la primitiva P, passante* per il punto $(0,1)$.

6. Data la funzione utilità, $U(x, y) = xy$, determinare *l'eventuale punto estremante nel rispetto* del seguente *vincolo,* $x + y = 1$.

Svolgimento - Traccia B

1. Data la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{se } x < 0 \\ 3x + 2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, definita $\forall x \in R$; si osserva nel punto $x = 0$, che $f(0) = 2$, il $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (3x + 2) = 2$ ed il $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 + 2 = 2 = f(1)$; pertanto la funzione data *non ha punti di discontinuità*. Inoltre la sua funzione derivata prima risulta $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 0 \\ 3 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ definita $\forall x \in R$; verifichiamo quindi la derivabilità della funzione nel punto di raccordo $x = 0$, per cui deve $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in R$, ed essendo $\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + 2 - 2}{x - 0} = 4 \lim_{x \to 0^-} x = 0$ ed $\lim_{x \to 0^+} \frac{3x + 2 - 2}{x - 0} = 3$, la funzione *non è dotata di derivata* in $x = 0$ e tale punto *è un punto angoloso* per la funzione data.

2. La funzione $f(x)=arctg\left(\frac{1}{x}\right)$, definita $\forall x\in R-\{0\}$ risulta continua nel suo insieme di definizione, ma essendo questo $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$, né un intervallo, né una parte di R chiusa e limitata, la funzione assegnata *non soddisfa le ipotesi dei due teoremi*.

3. *Data la funzione*: $f(x)=\arccos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Insieme di definizione:

Essendo una funzione arcoseno, deve essere $\frac{1}{x}\in[-1,1]\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x}\le 1\\ \frac{1}{x}\ge -1\end{cases}\Leftrightarrow\forall x\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

pertanto $X=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

Quindi tale funzione è definita $\forall x\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$, ovvero

$$f:]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[\to f(x)=\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\in R$$

Segno della funzione:

Deve essere $f(x)>0\Leftrightarrow\arccos\left(\frac{1}{x}\right)>0=\arccos(\cos 0)\Leftrightarrow\frac{1}{x}<1$

Pertanto $f(x)>0\Leftrightarrow\forall x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[\cap X=]-\infty,-1]\cup]1,+\infty[$

Quindi $f(x)<0\Leftrightarrow\forall x\in]0,1[\cap X=\varnothing$

E conseguentemente $f(x)=0\Leftrightarrow x=1$

Quindi la funzione passa per i punti $(1,f(1))=(1,0)$ e $(-1,f(-1))=(-1,\pi)$

Limiti significativi:

Essendo una funzione continua, per ogni punto di accumulazione interno al suo insieme di definizione il $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, pertanto ha senso calcolare il limite nell'estremo inferiore e nell'estremo superiore.

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\arccos\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$, in quanto trattandosi di funzione composta, per cui $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$

e conseguentemente $\lim_{y\to 0}\arccos y=\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\arccos\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$, in quanto trattandosi di funzione composta, per cui $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$

e conseguentemente $\lim_{y\to 0}\arccos y=\frac{\pi}{2}$

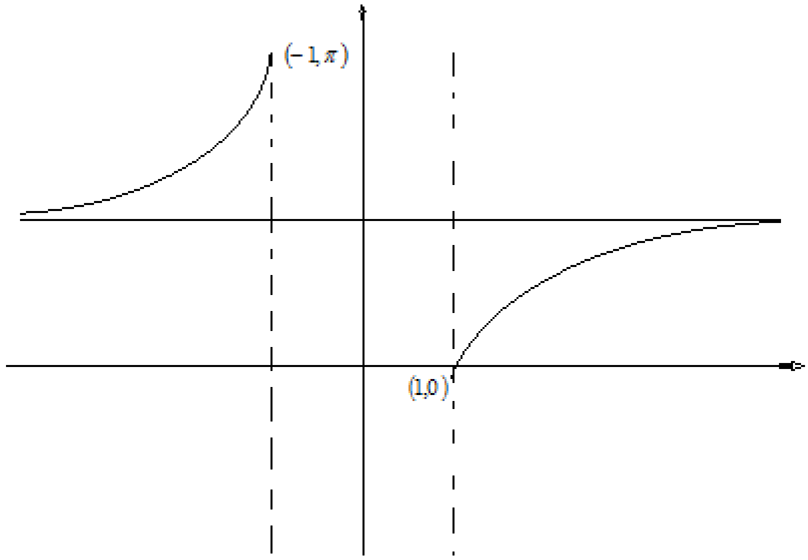
Pertanto la retta $y = \frac{\pi}{2}$ è un asintoto orizzontale sia a sinistra che a destra.

Derivata prima e monotonia:

$f'(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}}$, quindi $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} > 0$, ovvero $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$ e conseguentemente risulta $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-1,1\right[$ quindi la funzione è strettamente crescente $\forall x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$ ed osservando che $\lim_{x\to-1^-} f'(x) = \lim_{x\to-1^-} = \frac{1}{x^2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} = +\infty$, così come $\lim_{x\to1^+} f'(x) = \lim_{x\to1^+} = \frac{1}{x^2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} = +\infty$, per cui la funzione è strettamente crescente in tutto il suo dominio.

Derivata seconda e concavità:

$f''(x) = -\frac{\frac{|x|}{x}\sqrt{x^2-1} + |x|\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{\left(|x|\sqrt{x^2-1}\right)^2} = -\frac{|x|\left(2x^2-1\right)}{x\sqrt{x^2-1}\left(|x|\sqrt{x^2-1}\right)^2}$, per cui risulta $f''(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{|x|\left(2x^2-1\right)}{x\sqrt{x^2-1}\left(|x|\sqrt{x^2-1}\right)^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{\left(2x^2-1\right)}{x} < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup \left]0,\frac{1}{2}\right[$ e conseguentemente $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{2},0\right[\cup \left]\frac{1}{2},+\infty\right[$; inoltre osservando che la funzione non è derivabile in $\{-1,1\}$ e risulta $\lim_{x\to-1^-} f''(x) = +\infty$ mentre $\lim_{x\to1^+} f''(x) = -\infty$ per cui la funzione è strettamente concava $\forall x \in \left(\left]-\frac{1}{2},0\right[\cup \left]\frac{1}{2},+\infty\right[\right) \cap \left(\left]-\infty,-1\right] \cup \left[1,+\infty\right[\right) \Leftrightarrow \forall x \in \left[1,+\infty\right[$ ed è strettamente convessa $\forall x \in \left(\left]-\infty-\frac{1}{2}\right[\cup \left]0,\frac{1}{2}\right[\right) \cap \left(\left]-\infty,-1\right] \cup \left[1,+\infty\right[\right) \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty,-1\right]$.



e quindi dedurre che:

$f\left(\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[\right)=\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{\pi}{2},\pi\right]$, f è invertibile, è limitata, è dotata di minimo e massimo, è dispari.

4. Data la matrice $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & k\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ e la matrice $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$, è possibile effettuare il prodotto $A\cdot B$ in quanto il numero delle colonne della matrice *A* è pari al numero delle righe della matrice *B*, pertanto il prodotto righe per colonne, risulta $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2k & 0 & -k\\ 4 & -2 & -1\end{pmatrix}$ il cui determinante risulta $\det(A\cdot B)=0$ per cui la matrice risulta singolare quindi non ha soluzioni e conseguentemente $\nexists(A\cdot B)^{-1}$.

5. Data la funzione $f(x)=e^{2x}$, si ha: $\int e^{2x}dx=\frac{e^{2x}}{2}+c$; pertanto per la primitiva richiesta deve essere $F(0)=1\Leftrightarrow\frac{e^{0}}{2}+c=1\Leftrightarrow c=\frac{1}{2}$, per cui la primitiva richiesta risulta : $F(x)=\frac{1}{2}\left(e^{2x}+1\right)$

6. Data la funzione utilità $U(x,y)=xy$, nel rispetto del vincolo $x-y=1$, che possiamo esprime in funzione di una variabile, $x=1+y\Leftrightarrow g(y)=1+y$, per cui la funzione diventa $U(g(y),y)=h(y)=(1+y)y$, quindi la funzione di una variabile $h(y)=y^2+y$, la cui derivata prima risulta $h'(y)=2y+1$ e posta uguale a zero, $h'(y)=0\Leftrightarrow 2y+1=0\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}$ e conseguentemente, nella funzione $x=g(y)\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ quindi il punto estremante risulta $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$;

ed osservando che $h''(x) = 2$, il punto trovato è di minimo, e la sua utilità minima è $U\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.