Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
II Esonero – 19 dicembre 2016
(prof. Bisceglia)

Traccia A

1. Calcolare il seguente $\lim_{x\to+\infty}\frac{3\sqrt[3]{x}-2}{2x^2+x-\sqrt{x}}$, e verificare che sia corretto.

2. Data la funzione $h(x)=\cos\frac{1}{x-1}$, dire se esistono dei punti in cui non è regolare, motivando la risposta.

3. Studiare la funzione $f(x)=xe^{-2x^2}$, e tracciarne approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione $g:\forall x\in[0,1]\to ax^2+2x+\frac{1}{2}$, per quali valori del parametro a soddisfa le ipotesi del Teorema del Punto fisso.

5. Data la funzione $p(x)=(x^2+2x-8)e^{-2x}$, calcolare la primitiva *P*, che nel punto 0 assume valore 1.

Svolgimento - Traccia A

1. Essendo $\lim_{x\to+\infty}\frac{3\sqrt[3]{x}-2}{2x^2+x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^{\frac{1}{3}}-2}{2x^2+x-x^{\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}\left(3-2x^{-\frac{1}{3}}\right)}{x^2\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)}=$, ovvero $\frac{3}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}=0$.

   Per cui si ha $\left|\frac{3\sqrt[3]{x}-2}{2x^2+x-\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}-0\right|<\varepsilon\Leftrightarrow-\varepsilon<\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}<\varepsilon$, per cui essendo la radice sempre positiva è sufficiente studiare la seguente diseguaglianza $\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{1}{\varepsilon}<\sqrt[3]{x^5}\Leftrightarrow x^5>\frac{1}{\varepsilon^3}\Leftrightarrow x>\sqrt[5]{\frac{1}{\varepsilon^3}}$ pertanto posto $\delta=\sqrt[5]{\frac{1}{\varepsilon^3}}$, abbiamo individuato un intorno di più infinito.

2. Essendo $h(x)=\cos\frac{1}{x-1}$, tale funzione è definita in $R-\{1\}$, ed essendo continua è regolare in $R-\{1\}$, pertanto occorre vedere se è regolare in 1, per cui occorre calcolare il $\lim_{x\to1^-}\cos\frac{1}{x-1}$ ed il $\lim_{x\to1^+}\cos\frac{1}{x-1}$, osservando che il $\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$ e che il $\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$, possiamo affermare che $\nexists\lim_{y\to-\infty}\cos y$, così come $\nexists\lim_{y\to+\infty}\cos y$, pertanto la funzione nel punto 1 non è regolare.

3. *Data la funzione*: $x \to f(x) = xe^{-2x^2}$.

Ricordando che la funzione esponenziale è definita in R è facile rendersi conto che R è l'insieme di definizione di *f* e quindi è:

$$f : x \in R \to xe^{-2x^2}$$

ed essendo:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow xe^{-2x^2} > 0 \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in \left]0,+\infty\right[,$$
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow xe^{-2x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in R - \left[0,+\infty\right[= \left]-\infty,0\right[$$

il grafico di *f* è al di sopra dell'asse delle *x* in $\left]0,+\infty\right[$, è al di sotto dell'asse delle *x* in $\left]-\infty,0\right[$, ha in comune con gli assi il punto $(0, f(0)) = (0,0)$ ed essendo:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{-2x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{2x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{4xe^{2x^2}} = 0$$ e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{2x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4xe^{2x^2}} = 0$$

il grafico di *f* ha un solo asintoto: la retta di equazione $y = 0$ asintoto orizzontale a sinistra e a destra.

Essendo:

$$f'(x) = D\left(xe^{-2x^2}\right) = e^{-2x^2}\left(1-4x^2\right) \text{ se } x \in R$$

è:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-2x^2}\left(1-4x^2\right) > 0 \Leftrightarrow 1-4x^2 > 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-1/2,1/2\right[$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-2x^2}\left(1-4x^2\right) = 0 \Leftrightarrow 1-4x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1/2 \text{ o } x = 1/2$$
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in -\left[-1/2,1/2\right] = \left]-\infty,-1/2\right[\cup \left]1/2,+\infty\right[$$

quindi *f* è strettamente crescente in $\left[-1/2,1/2\right]$, è strettamente decrescente in $\left]-\infty,-1/2\right]$ ed in $\left[1/2,+\infty\right[$, $-1/2$ è un punto di minimo relativo proprio per *f* ed è il punto di minimo per *f*, $1/2$ è un punto di massimo relativo proprio per *f* ed è il punto di massimo per *f*, il grafico di *f* passa per i punti $(-1/2, f(-1/2)) = \left(-1/2, -e^{-1/2}/2\right)$ e $(1/2, f(1/2)) = \left(1/2, e^{-1/2}/2\right)$ ed $-e^{-1/2}/2$ è il minimo di *f* ed $e^{-1/2}/2$ è il massimo di *f*.

Risultando infine:

$$f''(x) = D\left(e^{-2x^2}\left(1-4x^2\right)\right) = e^{-2x^2}\left(-4x+16x^3-8x\right) = 4xe^{-2x^2}\left(4x^2-3\right) \text{ se } x \in R$$

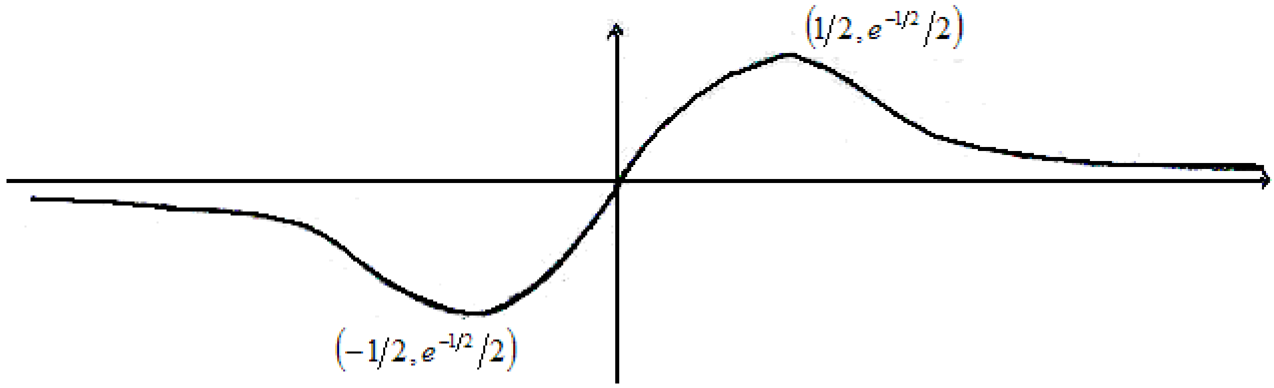
è:

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 4xe^{-2x^2}\left(4x^2-3\right) > 0 \Leftrightarrow x\left(4x^2-3\right) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\sqrt{3}/2,0\right[\cup \left]\sqrt{3}/2,+\infty\right[,$$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 4xe^{-2x^2}\left(4x^2-3\right)=0 \Leftrightarrow x\left(4x^2-3\right)=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt{3}/2 \text{ o } x=0 \text{ o } x=\sqrt{3}/2$
$f''(x)<0 \Leftrightarrow x \in -\left(\left]-\sqrt{3}/2,0\right[\cup\left]\sqrt{3}/2,+\infty\right[\right)=\left]-\infty,-\sqrt{3}/2\right[\cup\left]0,\sqrt{3}/2\right[$

e pertanto f è strettamente convessa in $\left[-\sqrt{3}/2,0\right]$ ed in $\left[\sqrt{3}/2,+\infty\right[$, è strettamente concava in $\left]-\infty,-\sqrt{3}/2\right]$ ed in $\left[0,\sqrt{3}/2\right]$, $-\sqrt{3}/2$, 0 e $\sqrt{3}/2$ sono tre punti di flesso proprio per f ed il grafico di f passa per i punti $\left(-\sqrt{3}/2, f\left(-\sqrt{3}/2\right)\right)=\left(-\sqrt{3}/2,-\sqrt{3}\,e^{-3/2}/2\right)$ e $\left(\sqrt{3}/2, f\left(\sqrt{3}/2\right)\right)=\left(\sqrt{3}/2,\sqrt{3}\,e^{-3/2}/2\right)$.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di f:



e quindi dedurre che:

$f(R)=\left[-e^{-1/2}/2,e^{-1/2}/2\right]$, $f\left(\left]-\infty,-1/2\right]\right)=\left[-e^{-1/2}/2,0\right[$, $f\left(\left[-1/2,1/2\right]\right)=\left[-e^{-1/2}/2,e^{-1/2}/2\right]$, $f\left(\left[1/2,+\infty\right[\right)=\left]0,e^{-1/2}/2\right]$, f non è biunivoca, la restrizione di f a $\left]-\infty,-1/2\right]$ è biunivoca su $\left[-e^{-1/2}/2,0\right[$, la restrizione di f a $\left[-1/2,1/2\right]$ è biunivoca su $\left[-e^{-1/2}/2,e^{-1/2}/2\right]$ e la restrizione di f a $\left[1/2,+\infty\right[$ è biunivoca su $\left]0,e^{-1/2}/2\right]$.

OSSERVAZIONE. È immediato verificare che f è una funzione dispari quindi avremmo potuto limitarci a tracciare il grafico G della restrizione di f a $\left[0,+\infty\right[$ e completare quindi il grafico di f unendo a G la curva G' simmetrica di G rispetto al punto $(0,0)$.

4. Essendo g continua in $[0,1]$, ed essendo $g(0)=\frac{1}{2}\in[0,1]$, e

$g(1)=a+2+\frac{1}{2}\in[0,1] \Leftrightarrow 0\le a+2+\frac{1}{2}\le 1 \Leftrightarrow -\frac{5}{2}\le a\le 1-\frac{5}{2}$ pertanto la funzione soddisfa le ipotesi del punto fisso se $a\in\left[-\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right]$.

5. Essendo $p(x)=\left(x^2+2x-8\right)e^{-2x}$, del tipo $f(x)g'(x)$ si procede integrando per parte, quindi $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$ per cui essendo $g(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x}$ si ha

$\int\left(x^2+2x-8\right)e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\left(x^2+2x-8\right)e^{-2x}+\frac{1}{2}\int(2x+2)e^{-2x}dx=$

$$=-\frac{1}{2}\left(x^2+2x-8\right)e^{-2x}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}(2x+2)e^{-2x}+\int e^{-2x}dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(x^2+2x-8\right)e^{-2x}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}(2x+2)e^{-2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)+c=$$, ovvero

$$=-\frac{1}{4}e^{-2x}\left(2\left(x^2+2x-8\right)+(2x+2)+1\right)+c=-\frac{1}{4}e^{-2x}\left(2x^2+6x-13\right)+c=$$ quindi

$P(x)=-\frac{1}{4}e^{-2x}\left(2x^2+6x-13\right)+c$ e conseguentemente si ha $P(0)=1\Leftrightarrow -\frac{1}{4}(-13)+c=1\Leftrightarrow c=1-\frac{13}{4}\Leftrightarrow c=-\frac{9}{4}$ quindi la primitiva cercata è $P(x)=-\frac{1}{4}e^{-2x}\left(2x^2+6x-13\right)-\frac{9}{4}$.

Traccia B

1. Calcolare il seguente $\lim_{x\to+\infty}\frac{1-2\sqrt[3]{x}}{2x^3+x-\sqrt{x}}$, e verificare che sia corretto.

2. Data la funzione $h(x)=sen\frac{1}{1+x}$, dire se esistono dei punti in cui non è regolare, motivando la risposta.

3. Studiare la funzione $f(x)=x(x-1)e^{-x}$, e tracciarne approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione $g:\forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\to ax^2-x+\frac{1}{2}$, per quali valori del parametro a soddisfa le ipotesi del Teorema del Punto fisso.

5. Data la funzione $p(x)=\left(x^2-2x+2\right)e^{-\frac{x}{2}}$, calcolare la primitiva *P*, che nel punto 0 assume valore 1.

Svolgimento - Traccia B

1. Essendo $\lim_{x\to+\infty}\frac{1-2\sqrt[3]{x}}{2x^3+x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-2x^{\frac{1}{3}}}{2x^3+x-x^{\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}\left(x^{-\frac{1}{3}}-2\right)}{x^3\left(2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}\right)}==-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\frac{8}{3}}}=0$. Per cui si ha $\left|\frac{1-2\sqrt[3]{x}}{2x^3+x-\sqrt{x}}+0\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{1}{\sqrt[3]{x^8}}+0\right|<\varepsilon\Leftrightarrow-\varepsilon<\frac{1}{\sqrt[3]{x^8}}<\varepsilon$, per cui essendo la radice sempre positiva è sufficiente studiare la seguente diseguaglianza

$\frac{1}{\sqrt[3]{x^8}} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < \sqrt[3]{x^8} \Leftrightarrow x^8 > \frac{1}{\varepsilon^3} \Leftrightarrow x > \sqrt[8]{\frac{1}{\varepsilon^3}}$ pertanto posto $\delta = \sqrt[8]{\frac{1}{\varepsilon^3}}$, abbiamo individuato un intorno di più infinito.

2. Essendo $h(x) = sen\frac{1}{1+x}$, tale funzione è definita in $R-\{-1\}$, ed essendo continua è regolare in $R-\{-1\}$, pertanto occorre vedere se è regolare in -1, per cui occorre calcolare il $\lim_{x\to-1^-} sen\frac{1}{1+x}$ ed il $\lim_{x\to-1^+} sen\frac{1}{1+x}$, osservando che il $\lim_{x\to-1^-}\frac{1}{1+x} = -\infty$ e che il $\lim_{x\to-1^+}\frac{1}{1+x} = +\infty$, possiamo affermare che $\nexists \lim_{y\to-\infty} seny$, così come $\nexists \lim_{y\to+\infty} seny$, pertanto la funzione nel punto -1 non è regolare.

3. Data la funzione: $x \to f(x) = x(x-1)e^{-x}$.

   L'insieme di definizione di *f* è, evidentemente, *R* quindi è:

$$f : x \in R \to x(x-1)e^{-x}$$

e risultando:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x(x-1)e^{-x} > 0 \Leftrightarrow x(x-1) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,0\right[\cup \left]1,+\infty\right[,$$
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x = 1,$$
$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in -\left]-\infty,0\right] \cup \left[1,+\infty\right[= \left]0,1\right[$$

il grafico di *f* si trova al di sopra dell'asse delle *x* in $\left]-\infty,0\right[$ ed in $\left]1,+\infty\right[$, è al di sotto dell'asse delle x in $\left]0,1\right[$, ha in comune con gli assi i punti $(0,0)$ e $(1,0)$ ed essendo:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x(x-1)e^{-x} = +\infty,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}(x-1)e^{-x} = -\infty \text{ e } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x(x-1)e^{-x} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x} = 0$$

il grafico di *f* ha un solo asintoto: la retta di equazione $y = 0$ asintoto orizzontale a destra.

Essendo:

$$f'(x) = D\left(x(x-1)e^{-x}\right) = e^{-x}\left(2x-1-x^2+x\right) = -\left(x^2-3x+1\right)e^{-x} \text{ se } x \in R$$

è

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\left(x^2-3x+1\right)e^{-x} > 0 \Leftrightarrow x^2-3x+1 < 0 \Leftrightarrow x \in \left]\left(3-\sqrt{5}\right)/2,\left(3+\sqrt{5}\right)/2\right[,$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\left(x^2-3x+1\right)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x^2-3x+1 = 0 \Leftrightarrow x = \left(3-\sqrt{5}\right)/2 \text{ o } x = \left(3+\sqrt{5}\right)/2$$
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in -\left[\left(3-\sqrt{5}\right)/2,\left(3+\sqrt{5}\right)/2\right] = \left]-\infty,\left(3-\sqrt{5}\right)/2\right[\cup \left]\left(3+\sqrt{5}\right)/2,+\infty\right[$$

quindi *f* è strettamente crescente in $\left[\left(3-\sqrt{5}\right)/2,\left(3+\sqrt{5}\right)/2\right]$, è strettamente decrescente in $\left]-\infty,\left(3-\sqrt{5}\right)/2\right]$ ed in $\left[\left(3+\sqrt{5}\right)/2,+\infty\right[$, $\left(3-\sqrt{5}\right)/2$ è un punto di minimo relativo proprio per *f*, $\left(3+\sqrt{5}\right)/2$ è un punto di massimo relativo proprio per *f*, il grafico di *f* passa per i punti $\left(\left(3-\sqrt{5}\right)/2,\ f\left(\left(3-\sqrt{5}\right)/2\right)\right) =$

$= \left(\left(3-\sqrt{5}\right)/2, \left(2-\sqrt{5}\right)e^{\left(\sqrt{5}-3\right)/2}\right)$ e $\left(\left(3+\sqrt{5}\right)/2, f\left(\left(3+\sqrt{5}\right)/2\right)\right) = \left(\left(3+\sqrt{5}\right)/2, \quad \left(2+\sqrt{5}\right)e^{-\left(3+\sqrt{5}\right)/2}\right)$, $\left(3-\sqrt{5}\right)/2$ è un punto di minimo per *f* e $\left(2-\sqrt{5}\right)e^{\left(\sqrt{5}-3\right)/2}$ è il minimo di *f*.

Risultando infine:

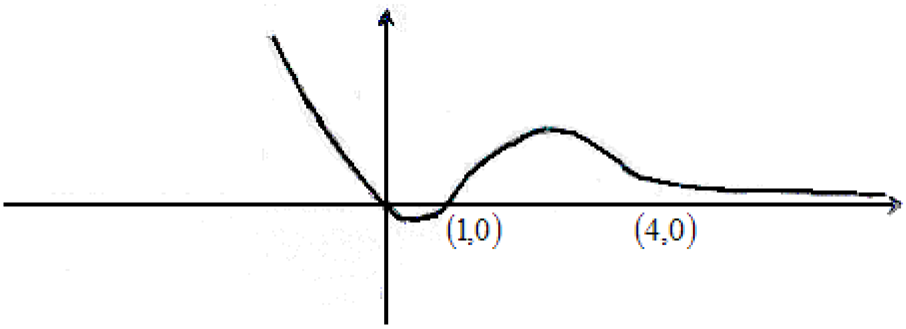
$$f''(x) = D\left(-\left(x^2-3x+1\right)e^{-x}\right) = -e^{-x}\left(2x-3-x^2+3x-1\right) = \left(x^2-5x+4\right)e^{-x} \text{ se } x \in R$$

è:

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \left(x^2-5x+4\right)e^{-x} > 0 \Leftrightarrow x^2-5x+4>0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,1\right[\cup \left]4,+\infty\right[$$
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x^2-5x+4\right)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ o } x=4$$
$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in -\left(\left]-\infty,1\right] \cup \left[4,+\infty\right[\right) = \left]1,4\right[$$

e pertanto *f* è strettamente convessa in $\left]-\infty,1\right]$ ed in $\left[4,+\infty\right]$, è strettamente concava in $\left[1,4\right]$, 1 e 4 sono due punti di flesso proprio per *f* ed il grafico di *f* passa per il punto $\left(4, f(4)\right) = \left(4,12e^{-4}\right)$.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:



e quindi dedurre che:

$f(R) = \left[\left(2-\sqrt{5}\right)e^{\left(\sqrt{5}-3\right)/2},+\infty\right[$, $f\left(\left]-\infty,\left(3-\sqrt{5}\right)/2\right]\right) = \left[\left(2-\sqrt{5}\right)e^{\left(\sqrt{5}-3\right)/2},+\infty\right[$, $f\left(\left[\left(3-\sqrt{5}\right)/2,\left(3+\sqrt{5}\right)/2\right]\right) =$ $= \left[\left(2-\sqrt{5}\right)e^{\left(\sqrt{5}-3\right)/2},\left(2+\sqrt{5}\right)e^{-\left(3+\sqrt{5}\right)/2}\right]$, $f\left(\left[\left(3+\sqrt{5}\right)/2,+\infty\right[\right) = \left]0,\left(2+\sqrt{5}\right)e^{-\left(3+\sqrt{5}\right)/2}\right]$, *f* non è biunivoca, la restrizione di *f* a $\left]-\infty,\left(3-\sqrt{5}\right)/2\right]$ è biunivoca su $\left[\left(2-\sqrt{5}\right)e^{\left(\sqrt{5}-3\right)/2},+\infty\right[$, la restrizione di *f* a $\left[\left(3-\sqrt{5}\right)/2,\left(3+\sqrt{5}\right)/2\right]$ è biunivoca su $\left[\left(2-\sqrt{5}\right)e^{\left(\sqrt{5}-3\right)/2},\left(2+\sqrt{5}\right)e^{-\left(3+\sqrt{5}\right)/2}\right]$ e la restrizione di *f* a $\left[\left(3+\sqrt{5}\right)/2,+\infty\right[$ è biunivoca su $\left]0,\left(2+\sqrt{5}\right)e^{-\left(3+\sqrt{5}\right)/2}\right]$.

4. Essendo *g* continua in $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, ed essendo $g(0) = \frac{1}{2} \in [0,1]$, e $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \in \left[0,\frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow 0 \le \frac{a}{4} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \le a \le 2$ pertanto la funzione soddisfa le ipotesi del punto fisso se $a \in [0,2]$.

5. Essendo $p(x) = \left(x^2-2x+2\right)e^{-\frac{x}{2}}$, del tipo $f(x)g'(x)$ si procede integrando per parte, quindi $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$ per cui essendo $g(x) = -2e^{-\frac{x}{2}}$ si ha

$$\int \left(x^2-2x+2\right)e^{-\frac{x}{2}}dx = -2\left(x^2-2x+2\right)e^{-\frac{x}{2}} + 2\int (2x-2)e^{-\frac{x}{2}}dx =$$

$$= -2\left(x^2-2x+2\right)e^{-\frac{x}{2}} + 2\left(-2\left(2x-2\right)e^{-\frac{x}{2}} + 2\int 2e^{-\frac{x}{2}}dx\right) =$$

$$= -2\left(x^2-2x+2\right)e^{-\frac{x}{2}} + 2\left(-2\left(2x-2\right)e^{-\frac{x}{2}} + 4\left(-2e^{-\frac{x}{2}}\right)\right) + c =$$, ovvero $= -2e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2+2x+6\right) + c =$

quindi $P(x) = -2e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2+2x+6\right) + c =$ e conseguentemente si ha
$P(0) = 1 \Leftrightarrow -2(6) + c = 1 \Leftrightarrow -12 + c = 1 \Leftrightarrow c = 13$ quindi la primitiva cercata è
$P(x) = -2e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2+2x+6\right) + 13$.