Matematica per l'Economia (A-K)
II Esonero – 15 dicembre 2017
(prof. Bisceglia)

Traccia A

1. Determinare, *se possibile*, un punto di approssimazione con un errore $\in\leq 10^{-1}$, dell'equazione $2x^2-4x=0$, nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

2. Data la funzione che, $\forall x\in[-1,2]\to f(x)=\left|x^2-2x\right|$, individuare eventuali punti di minimo e/o massimo, relativi e/o assoluti.

3. Studiare la funzione $f(x)=\dfrac{x^2}{4-x^2}$, e tracciarne approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione $f(x)=\begin{cases} k & \forall x=\{-1,1\} \\ (2-x^2)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\pi x^2\right) & \forall x\in\left]-1,1\right[\end{cases}$, per quali valori del parametro k soddisfa le ipotesi del Teorema del Punto fisso.

5. Data la funzione $p(x)=(4x^4+2)arctg\left(\frac{1}{x}\right)$, calcolare la primitiva *P*, passante per il punto $(1,0)$.

6. Data la funzione costo, $C(x,y)=2x^3-3xy+2y^2$ dei prodotti (x,y), nel rispetto di una produzione limitata a, $x+y=10$, determinare la combinazione dei prodotti con costo minimo.

Svolgimento - Traccia A

1. Data la funzione $2x^2-4x=0$, nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2},1\right]$, e risultando $f\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot f(1)<0$, ricorrono tutte le ipotesi del teorema degli zeri, pertanto $\exists x_0\in\left]-\frac{1}{2},1\right[\ /\ f(x_0)=0$. Per cui sapendo che $|x_0-c_n|<c_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^{n+1}}\leq 10^{-1}$, si ha $\dfrac{b-a}{2^{n+1}}\leq 10^{-1}\Leftrightarrow\dfrac{b-a}{10^{-1}}\leq 2^{n+1}\Leftrightarrow n\geq\dfrac{\log(b-a)10}{\log 2}-1$ quindi $n\geq\dfrac{\log\left(\left(1+\frac{1}{2}\right)10\right)}{\log 2}-1=2.9$ quindi, ponendo $n=3$ si trova il punto di approssimazione con un errore $\in\leq 10^{-1}$

N	a_n	c_n	b_n	$f(a_n)$	$f(c_n)$	$f(b_n)$
0	—1/2	1/4	1	+	—7/8	—

1	—1/2	—1/8	1/4	+	17/32	—
2	—1/8	1/16	1/4	+	—31/128	—
3	—1/8	—1/32	1/16	+	65/512	—

che risulta essere $c_4 = -\frac{1}{32}$, in quanto $\left|-\frac{1}{32}-\frac{1}{16}\right| \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{3}{32} \le \frac{1}{10}$.

2. Data la funzione $f(x)=\left|x^2-2x\right|$, definita $\forall x \in [-1,2]$, quindi continua nel suo dominio, parte chiusa e limitata, pertanto per il teorema di Weierstrass, è dotata di minimo e di massimo assoluti. Servendosi del teorema dei Punti Critici, si nota che la funzione valore assoluto non è derivabile in zero, quindi $x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0$ ovvero $S=\{0,2\}$; mentre $f'(x)=|2x-2|$ e risulta $f'(x)=0 \Leftrightarrow |2x-2|=0 \Leftrightarrow 2x-2=0 \Leftrightarrow x=1$ quindi $C=\{1\}$ ed $F=\{-1,2\}$ possiamo pertanto calcolare la funzione in tali punti ed osservare che $f(-1)=3$, $f(0)=0$, $f(1)=1$, ed $f(2)=0$; quindi la funzione ha massimo assoluto 3 ed un punto di massimo, minimo assoluto 0 e due punti di minimo assoluto ed un massimo relativo 1, con un punto di massimo relativo.

3. *Data la funzione*: $X \to f(x)=\frac{x^2}{4-x^2}$.

Si osserva subito che tale funzione è definita in R, tranne nei punti in cui il denominatore si annulla, ovvero $4-x^2 \ne 0 \Leftrightarrow x^2 \ne 4 \Leftrightarrow x \ne \pm 2$, pertanto $D(f) \Leftrightarrow \forall x \in R-\{\pm 2\}$.

Per quanto concerne il segno della funzione, essendo il numeratore comunque positivo, $f(x)>0 \Leftrightarrow 4-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow |x|<2$, ovvero $\forall x \in]-2,2[$ e conseguentemente $f(x)<0 \Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$.

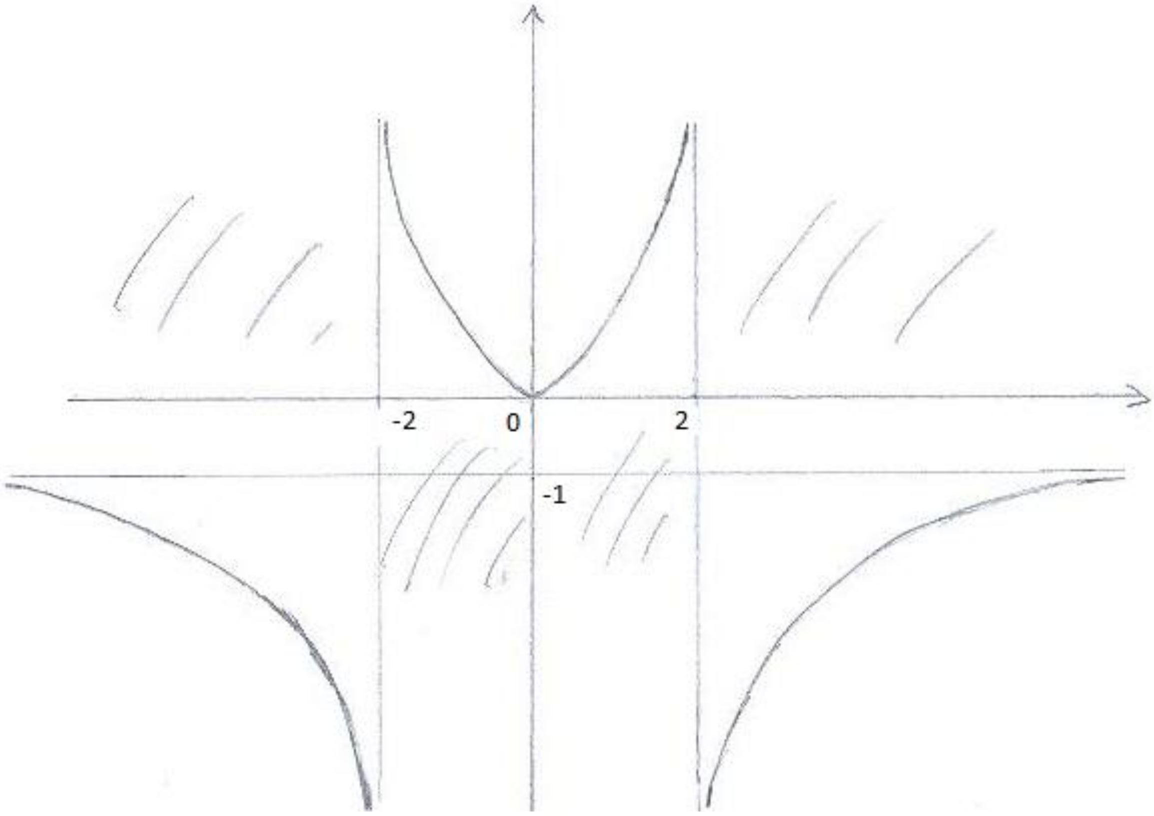
Essendo l'insieme di definizione non limitato, studiamo la funzione agli estremi, quindi $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{4-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2\left(\frac{4}{x^2}-1\right)}=-1$, quindi la retta $y=-1$ è l'asintoto orizzontale destro e sinistro.

Osserviamo nei punti in cui la funzione non è definita, se ci sono asintoti, $\lim_{x\to-2^-}\frac{x^2}{4-x^2}-\infty$, in quanto il numeratore è positivo, il limite del denominatore tende a zero e nell'intorno sinistro di -2 il denominatore è negativo. Per lo stesso teorema $\lim_{x\to-2^+}\frac{x^2}{4-x^2}+\infty$, così come $\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2}{4-x^2}+\infty$ e $\lim_{x\to 2+}\frac{x^2}{4-x^2}-\infty$, quindi le rette $x=\pm 2$ sono asintoti verticali sia a destra che a sinistra.

Per lo studio della monotonia della funzione, calcoliamo la derivata prima $f'(x)=\frac{2x(4-x^2)-x^2(-2x)}{(4-x^2)^2}=\frac{8x-2x^3+3x^3}{(4-x^2)^2}=\frac{8x}{(4-x^2)^2}$, per cui essendo il denominatore sempre positivo, $f'(x)>0 \Leftrightarrow 8x>0 \Leftrightarrow x>0$, quindi la funzione è strettamente crescente $\forall x \in]0,+\infty[\cap D(f)$ e di conseguenza sarà strettamente decrescente $\forall x \in]-\infty,0[\cap D(f)$, inoltre, passera per il punto $(0,0)$ che sarà un punto di minimo relativo per la funzione.

Per quanto concerne le convessità, si calcola la derivata seconda, $f''(x)=\frac{8(4-x^2)^2-8x2(4-x^2)(-2x)}{(4-x^2)^4}=\frac{8(4-x^2)+32x^2}{(4-x^2)^3}=\frac{24x^2+32}{(4-x^2)^3}$, dove si osserva che il

numeratore è sempre positivo in quanto il suo delta è negativo e quindi $f''(x)>0 \Leftrightarrow (4-x^2)^3>0 \Leftrightarrow \forall x \in]-2,2[$ ove la funzione è strettamente convessa e conseguentemente sarà strettamente concava $\forall x \in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$.
Pertanto siamo in grado di tracciare approssimativamente il suo grafico.



4. Data la funzione $f(x)=\begin{cases} k & \forall x=\{-1,1\} \\ (2-x^2)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\pi x^2\right) & \forall x \in]-1,1[\end{cases}$, ed osservando che $f(-1)=f(1)=h$ e che il $\lim\limits_{x\to -1^+}(2-x^2)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\pi x^2\right)=0$ ed il $\lim\limits_{x\to 1^-}(2-x^2)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\pi x^2\right)=0$, la funzione risulterebbe continua se $h=0$; in tal caso $f(-1)=f(1)=0\in[-1,1]$, quindi la funzione soddisferebbe le ipotesi del Teorema del Punto Fisso.

5. Data la funzione $p(x)=(4x^4+2)arctg\left(\frac{1}{x}\right)$, si ha: $\int (4x^4+2)arctg\left(\frac{1}{x}\right)dx$, è possibile procedere per parti, quindi posto $f(x)=arctg\left(\frac{1}{x}\right) \to f'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=-\frac{1}{x^2+1}$; e posto $g'(x)=4x^4+2 \to g(x)\frac{4}{5}x^5+2x$; per cui $\int (4x^4+2)arctg\left(\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{4}{5}x^5+2x\right)arctg\left(\frac{1}{x}\right)+\int \frac{\frac{4}{5}x^5+2x}{x^2+1}dx$ e per quest'ultimo integrale

effettuando al divisione si ha $\dfrac{\frac{4}{5}x^5+2x}{x^2+1}=\dfrac{4}{5}x^3-\dfrac{4}{5}x+\dfrac{14}{5}\dfrac{x}{x^2+1}$ quindi $\int(4x^4+2)arctg\left(\dfrac{1}{x}\right)dx=\left(\dfrac{4}{5}x^5+2x\right)arctg\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{4}{5}\int x^3dx-\dfrac{4}{5}\int xdx+\dfrac{14}{10}\int\dfrac{2x}{x^2+1}dx$; pertanto una primitiva risulta: $P(x)=(4x^5+2x)arctg\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{5}x^4-\dfrac{2}{5}x^2+\dfrac{14}{10}\log\left|x^2+1\right|+c$, e conseguentemente la primitiva *P*, passante per il punto $(1,0)$ risulta $P(1)=0\Leftrightarrow 6arctg(1)+\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}+\dfrac{14}{10}\log 2+c=0\Leftrightarrow c=-\dfrac{6}{4}\pi+\dfrac{1}{5}-\dfrac{7}{5}\log 2$ ovvero, $P(x)=(4x^5+2x)arctg\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{5}x^4-\dfrac{2}{5}x^2+\dfrac{14}{10}\log\left|x^2+1\right|-\dfrac{3}{2}\pi+\dfrac{1}{5}-\dfrac{7}{5}\log 2$.

6. Data la funzione costo, $C(x,y)=2x^3-3xy+2y^2$ dei prodotti (x,y) , nel rispetto di una produzione limitata a, $x+y=10$, che possiamo esprime in funzione di una variabile, $y=10-x\Leftrightarrow g(x)=10-x$, per cui la funzione diventa $C(x,g(x))=2x^3-3x(10-x)+2(10-x)^2$, quindi la funzione di una variabile $\hat{C}(x)=2x^3-30x+3x^2+200-40x+2x^2\Leftrightarrow\hat{C}(x)=2x^3+5x^2-70x+200$, la cui derivata prima risulta $\hat{C}'(x)=6x^2+10x-70$ e posta uguale a zero, $\hat{C}'(x)=0\Leftrightarrow 6x^2+10x-70=0$ si annulla nei punti $x_1=\dfrac{-5-\sqrt{445}}{6}$ e $x_2=\dfrac{-5+\sqrt{445}}{6}$; ed osservando che $\hat{C}''(x)=12x+10$, risulta $\hat{C}''(x_1)=12\dfrac{-5-\sqrt{445}}{6}+10\Leftrightarrow\hat{C}''(x_1)<0$ e $\hat{C}''(x_2)=12\dfrac{-5+\sqrt{445}}{6}+10\Leftrightarrow\hat{C}''(x_2)>0$; ed essendo $x_1=\dfrac{-5-\sqrt{445}}{6}\Leftrightarrow y_1=10-\dfrac{-5-\sqrt{445}}{6}$, il punto (x_1,y_1) risulta di massimo, inoltre essendo $x_2=\dfrac{-5+\sqrt{445}}{6}\Leftrightarrow y_2=10-\dfrac{-5+\sqrt{445}}{6}$, il punto (x_2,y_2) risulta di minimo. Pertanto la combinazione dei prodotti con costo minimo è (x_2,y_2), ovvero $(2.68,7.32)$, con costo minimo, nel rispetto del vincolo, $C(x_2,y_2)=2(2.68)^3-3(2.68)(7.32)+2(7.32)^2=86.81$.