Matematica per l'Economia (A-K)
I Provetta – 05 novembre 2021
(prof. Bisceglia)

Traccia A

1. Date le funzioni $f:[0,2[\to 2^x \in f([0,2[)$ e $g:[1,5[\to \sqrt{x-1}\in R$; riportare le *possibili funzioni composte*, tra le funzioni date.

2. Data la funzione $f(x)=x-1$ e della sua perpendicolare *g* passante per l'origine; riportare l'equazione delle *due rette parallele* che circoscrivono, con quelle date, una superficie pari a 10.

3. Dire se la funzione $f:[0,2[\to R$, con $f(x)=\begin{cases}4x-2 & \text{se } x\in[0,1[\\ x+2 & \text{se } x\in[1,2[\end{cases}$ è *strettamente monotona*.

4. Data la funzione $f:]0,+\infty[\to R$, con $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$; dire se gode delle condizioni sufficienti del *Teorema dell'invertibilità*, dopo aver enunciato il Teorema.

5. Dire se la funzione $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{x+1}$, ha eventuali *asintoti*, e nel caso, riportare le relative *equazioni*.

6. Calcolare gli *eventuali limiti significativi* della seguente funzione $f(x)=arcsen\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right)$.

7. Enunciare il Teorema della permanenza del segno.

8. *Calcolare* il seguente limite: $\lim\limits_{x\to 0} e^x+1$, e *verificare* che il risultato è corretto.

Svolgimento - Traccia A

1. La funzione composta $(g\circ f)$ è possibile calcolarla in quanto $f([0,2[)=[1,4[\subseteq[1,5[$, e risulta $(g\circ f):[0,2[\to\sqrt{2^x-1}\in R$. La funzione composta $(f\circ g)$ è possibile calcolarla in quanto $g([1,5[)=[0,2[\subseteq[0,2[$, e risulta $(f\circ g):[1,5[\to 2^{\sqrt{x-1}}\in[1,4[$.

2. Essendo $f(x)=x-1$, la funzione *g* risulta $g(x)=-x$; inoltre per avere una superficie pari a 10 è sufficiente descrivere un rettangolo di lati pari a 2 e 5, quindi è sufficiente trovare le due rette parallele alle funzioni date che hanno distanza da un punto di queste pari a 2 ed a 5, ovvero la retta parallela alla funzione *f*, che denotiamo con f_p risulta $y=x+c$, con distanza dal punto $P=(1,0)$ pari a $\dfrac{|1\cdot 1+(-1)\cdot 0+c|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\Leftrightarrow|1+c|=2\sqrt{2}\Leftrightarrow c=\pm2\sqrt{2}-1$, quindi $f_p(x)=x+2\sqrt{2}-1$; mentre la retta parallela alla funzione *g*, che denotiamo con g_p risulta $y=-x+c$, con distanza dall'origine pari a $\dfrac{|(-1)\cdot 0+(-1)\cdot 0+c|}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}}=5\Leftrightarrow|c|=5\sqrt{2}\Leftrightarrow c=\pm5\sqrt{2}$, quindi $g_p(x)=-x+5\sqrt{2}$.

3. Essendo $f(x)=\begin{cases}4x-2 & \text{se } x\in[0,1[\\ x+2 & \text{se } x\in[1,2[\end{cases}$ si osserva dal grafico che la funzione è strettamente monotona (crescente) in quanto, $\forall x_1,x_2\in[0,2[$ con $x_1<x_2$ risulta $f(x_1)<f(x_2)$.

4. Il Teorema dell'invertibilità delle funzioni strettamente monotone afferma che: data una funzione $f:X\to f(X)$ con X intervallo, se strettamente monotona, allora è invertibile. Essendo $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$, definita in un intervallo ed avente valori in tutto *R*, gode di tutte le ipotesi del teorema.

5. La funzione: $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{x+1}$, è definita $\forall x\in R-\{-1\}\Leftrightarrow\forall x\in]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$, pertanto ha senso calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-1}{x+1}=-\infty$, pertanto potrebbe esserci un asintoto obliquo, quindi consideriamo $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-1}{x^2+x}=3$ e conseguentemente $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-3x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-1-3x^2-3x}{x+1}=-3$ per cui la retta $y=3x-3$ è l'asintoto obliquo a sx. Inoltre $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}(3x^2-1)\cdot\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{1}{x+1}=2(-\infty)=-\infty$ ed $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}(3x^2-1)\cdot\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{1}{x+1}=2(+\infty)=+\infty$; per cui la retta $x=-1$ è l'asintoto verticale sia a destra che a sinistra. In fine essendo $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-1}{x+1}=+\infty$, pertanto potrebbe esserci un asintoto obliquo, quindi consideriamo $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-1}{x^2+x}=3$ e conseguentemente $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-1-3x^2-3x}{x+1}=-3$ per cui la retta $y=3x-3$ è l'asintoto obliquo anche a destra.

6. È necessario conoscere il dominio della funzione data, pertanto essendo $f(x)=arcsen\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right)$ definita per $\begin{cases}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\le 1=\cos 0\\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\ge -1=\cos\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}-x\ge 0\\ \dfrac{\pi}{2}-x\le\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{\pi}{2}\\ x\ge-\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\forall x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, pertanto *non esistono limiti significativi* della funzione data.

7. Il *Teorema della Permanenza del segno*, afferma che: data una funzione $f:X\to R$ *sia* $x_0\in\hat{R}$ in cui è possibile effettuare il limite su *X*, *sia* $L\in\hat{R}$, se $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L<0$, allora $\exists I_{x_0}$ t.c. $\forall x\in(X-\{x_0\})\cap I_{x_0}$ risulta $f(x)<0$.

8. Essendo la funzione esponenziale definita $\forall x\in R$, è possibile calcolare il $\lim\limits_{x\to0}e^x-1$; e risulta $\lim\limits_{x\to0}e^x-1=0$. Per la definizione di limite $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ tale che se $x\in(R-\{0\})\cap]-\delta,\delta[$ si ha

$\left|e^x - 1 - 0\right| < \varepsilon$; ovvero $\left|e^x - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} e^x < \varepsilon + 1 \\ e^x > -\varepsilon + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \log(1+\varepsilon) \\ x > \log(1-\varepsilon) \end{cases}$, pertanto ponendo $\delta = \log(1+\varepsilon)$ ed osservando che $\log(1-\varepsilon) < 0$ si è individuato un intorno di *zero*, quindi si è constatata la correttezza del limite.

Traccia B

1. Date le funzioni $f : [1,5[\to \sqrt{x-1} \in f([1,5[)$ e $g : [0,2[\to 2^x \in R$; riportare le *possibili funzioni composte* tra le funzioni date.
2. Data la funzione $f(x) = x + 1$ e della sua perpendicolare *g* passante per l'origine; riportare l'equazione delle *due rette parallele* che circoscrivono, con quelle date, una superficie pari a 8.
3. Dire se la funzione $f : [0,4[\to R$, con $f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{se } x \in [0,2[\\ x - 2 & \text{se } x \in [2,4[\end{cases}$ è *strettamente monotona*.
4. Data la funzione $f : [0,+\infty[\to R$, con $f(x) = e^{3x}$; dire se gode delle condizioni sufficienti del *Teorema dell'invertibilità*, dopo aver enunciato il Teorema.
5. Dire se la funzione $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x - 1}$, ha eventuali *asintoti*, e nel caso, riportare le relative *equazioni*.
6. Calcolare gli *eventuali limiti significativi* della seguente funzione $f(x) = \arccos(sen(\pi - x))$.
7. Enunciare il II Teorema del confronto.
8. *Calcolare* il seguente limite: $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x + 1$, e *verificare* che il risultato è corretto.

Svolgimento - Traccia B

1. La funzione composta $(g \circ f)$ è possibile calcolarla in quanto $f([1,5[) = [0,2[\subseteq [0,2[$, e risulta $(g \circ f) : [1,5[\to 2^{\sqrt{x-1}} \in R$. La funzione composta $(f \circ g)$ è possibile calcolarla in quanto $g([0,2[) = [1,4[\subseteq [1,5[$, e risulta $(f \circ g) : [0,2[\to \sqrt{2^x - 1} \in [0,2[$.
2. Essendo $f(x) = x + 1$, la funzione *g* risulta $g(x) = -x$; inoltre per avere una superficie pari a 8 è sufficiente descrivere un rettangolo di lati pari a 2 e 4, quindi è sufficiente trovare le due rette parallele alle funzioni date che hanno distanza da un punto di queste pari a 2 ed a 4, ovvero la retta parallela alla funzione *f*, che denotiamo con f_p risulta $y = x + c$, con distanza dal punto $P = (1,2)$ pari a $\dfrac{\left|1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + c\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 2 \Leftrightarrow \left|-1 + c\right| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow c = \pm 2\sqrt{2} + 1$, quindi $f_p(x) = x + 2\sqrt{2} + 1$; mentre la

retta parallela alla funzione g, che denotiamo con g_p risulta $y=-x+c$, con distanza dall'origine pari a $\frac{|(-1)\cdot 0+(-1)\cdot 0+c|}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}}=4 \Leftrightarrow |c|=4\sqrt{2} \Leftrightarrow c=\pm 4\sqrt{2}$, quindi $g_p(x)=-x+4\sqrt{2}$.

3. Essendo $f(x)=\begin{cases}-x+2 & \text{se } x\in[0,2[\\ x-2 & \text{se } x\in[2,4[\end{cases}$ si osserva dal grafico che la funzione non è strettamente monotona in quanto, $\forall x_1,x_2\in[0,4[$ con $x_1<x_2$ non sempre risulta $f(x_1)<f(x_2)$.

4. Il Teorema dell'invertibilità delle funzioni strettamente monotone afferma che: data una funzione $f:X\to f(X)$ con X intervallo, se strettamente monotona, allora è invertibile. Essendo $f(x)=e^{3x}$, definita in $f:[0,+\infty[\to R$ e osservando che $f([0,+\infty[)=[0,+\infty[\subseteq R$ *non gode* di tutte le ipotesi del teorema.

5. La funzione: $f(x)=\frac{2x^2+1}{x-1}$, è definita $\forall x\in R-\{1\}\Leftrightarrow \forall x\in\,]-\infty,1[\,\cup\,]1,+\infty[$, pertanto ha senso calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+1}{x-1}=-\infty$, pertanto potrebbe esserci un asintoto obliquo, quindi consideriamo $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+1}{x^2-x}=2$ e conseguentemente $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+1-2x^2+2x}{x-1}=2$ per cui la retta $y=2x+2$ è l'asintoto obliquo a sx. Inoltre $\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}(2x^2+1)\cdot\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x-1}=3(-\infty)=-\infty$ ed $\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}(2x^2+1)\cdot\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}=3(+\infty)=+\infty$; per cui la retta $x=1$ è l'asintoto verticale sia a destra che a sinistra. In fine essendo $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1}{x-1}=+\infty$, pertanto potrebbe esserci un asintoto obliquo, quindi consideriamo $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1}{x^2-x}=2$ e conseguentemente $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1-2x^2+2x}{x-1}=2$ per cui la retta $y=2x+2$ è l'asintoto obliquo anche a destra.

6. È necessario conoscere il dominio della funzione data, pertanto essendo $f(x)=\arccos en(sen(\pi-x))$ definita per $\begin{cases}sen(\pi-x)\le 1=sen\frac{\pi}{2}\\ sen(\pi-x)\ge -1=sen-\frac{\pi}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\pi-x\le\frac{\pi}{2}\\ \pi-x\ge-\frac{\pi}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{\pi}{2}\\ x\le\frac{3}{2}\pi\end{cases}\Leftrightarrow\forall x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right]$, pertanto *non esistono limiti significativi* della funzione data.

7. Il *II Teorema del confronto*, afferma che: sia $f:X\to R$, e *sia* $g:X\to R$, *sia* $x_0\in\hat{R}$ in cui è possibile effettuare il limite su X, *siano* $L,M\in\hat{R}$, se $\exists I_{x_0}$ t.c. $\forall x\in(X-\{x_0\})\cap I_{x_0}$ risulta $f(x)\le g(x)$ e se $\exists\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ ed $\exists\lim_{x\to x_0} g(x)=M$ allora $L\le M$.

8. Essendo la funzione esponenziale definita $\forall x \in R$, è possibile calcolare il $\lim_{x \to -\infty} e^x + 1$; e risulta $\lim_{x \to -\infty} e^x + 1 = 1$. Per la definizione di limite $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che se $x \in (R) \cap I_{-\infty}$ si ha $\left|e^x - 1 - 1\right| < \varepsilon$; ovvero $\left|e^x\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left\{e^x < \varepsilon \Leftrightarrow \left\{x < \log(\varepsilon)\right.\right.$, pertanto ponendo $\delta = -\log(\varepsilon)$ in quanto $\log(\varepsilon) < 0$ si è individuato un intorno di *meno infinito*, quindi si è constatata la correttezza del limite.

Traccia C

1. Date le funzioni $f : [1,3[\to 2^x \in f([1,3[)$ e $g : [1,5[\to \sqrt{x-1} \in R$; riportare le *possibili funzioni composte* tra le funzioni date.
2. Servendosi della funzione $f(x) = x + 2$ e della sua perpendicolare *g* passante per l'origine; riportare l'equazione delle *due rette parallele* che circoscrivono, con quelle date, una superficie pari a 8.
3. Dire se la funzione $f : [0,2[\to R$, con $f(x) = \begin{cases} 4x - 2 & \text{se } x \in [0,1[\\ x + 2 & \text{se } x \in [1,2[\end{cases}$ è *strettamente monotona*.
4. Data la funzione $f :]0,+\infty[\to R$, con $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$; dire se gode delle condizioni sufficienti del *Teorema dell'invertibilità*, dopo aver enunciato il Teorema.
5. Dire se la funzione $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$, ha eventuali *asintoti*, e nel caso, riportare le relative *equazioni*.
6. Calcolare gli *eventuali limiti significativi* della seguente funzione $f(x) = arcsen(\cos(\pi - x))$.
7. Enunciare il Teorema della permanenza del segno
8. *Calcolare* il seguente limite: $\lim_{x \to 0} e^x - 1$, e *verificare* che il risultato è corretto.

Svolgimento - Traccia C

1. La funzione composta $(g \circ f)$ non è possibile calcolarla in quanto $f([1,3[) = [2,8[\not\subseteq [1,5[$. La funzione composta $(f \circ g)$ non è possibile calcolarla in quanto $g([1,5[) = [0,2[\not\subseteq [1,3[$.
2. Essendo $f(x) = x + 2$, la funzione *g* risulta $g(x) = -x$; inoltre per avere una superficie pari a 8 è sufficiente descrivere un rettangolo di lati pari a 2 e 4, quindi è sufficiente trovare le due rette parallele alle funzioni date che hanno distanza da un punto di queste pari a 2 ed a 4, ovvero la retta parallela alla funzione *f*, che denotiamo con f_p risulta $y = x + c$, con distanza dal punto $P = (0,2)$ pari a

$$\frac{|1\cdot 0+(-1)\cdot 2+c|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2 \Leftrightarrow |-2+c|=2\sqrt{2} \Leftrightarrow c=\pm 2\sqrt{2}+2$$, quindi $f_p(x)=x+2\sqrt{2}+2$; mentre la retta parallela alla funzione *g*, che denotiamo con g_p risulta $y=-x+c$, con distanza dall'origine pari a $$\frac{|(-1)\cdot 0+(-1)\cdot 0+c|}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}}=4 \Leftrightarrow |c|=4\sqrt{2} \Leftrightarrow c=\pm 4\sqrt{2}$$, quindi $g_p(x)=-x+4\sqrt{2}$.

3. Essendo $f(x)=\begin{cases}4x-2 & \text{se } x\in[0,1[\\ x+2 & \text{se } x\in[1,2[\end{cases}$ si osserva dal grafico che la funzione è strettamente monotona (crescente) in quanto, $\forall x_1,x_2\in[0,2[$ con $x_1<x_2$ risulta $f(x_1)<f(x_2)$.

4. Il Teorema dell'invertibilità delle funzioni strettamente monotone afferma che: data una funzione $f: X\to f(X)$ con X intervallo, se strettamente monotona, allora è invertibile. Essendo $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$, definita in un intervallo ed avente valori in tutto *R*, *gode* di tutte le ipotesi del teorema.

5. La funzione: $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$, è definita $\forall x\in R-\{-1\}\Leftrightarrow \forall x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]-1,+\infty[$, pertanto ha senso calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1}{x+1}=-\infty$, pertanto potrebbe esserci un asintoto obliquo, quindi consideriamo $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+x}=1$ e conseguentemente $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1-x^2-x}{x+1}=-1$ per cui la retta $y=x-1$ è l'asintoto obliquo a sx. Inoltre $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}(x^2-1)\cdot\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{1}{x+1}=0\cdot(-\infty)$ forma indeterminata, pertanto servendoci di De l'Hopital si ha $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{1}{\dfrac{x+1}{(x^2-1)}}=\lim\limits_{x\to-1^-}2x=-2$ ed analogo ragionamento da destra di meno uno $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}(x^2-1)\cdot\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{1}{x+1}=0\cdot(+\infty)$; per cui $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{1}{\dfrac{x+1}{(x^2-1)}}=\lim\limits_{x\to-1^+}2x=-2$. In fine essendo $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{x+1}=+\infty$, pertanto potrebbe esserci un asintoto obliquo, quindi consideriamo $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+x}=1$ e conseguentemente $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1-x^2-x}{x+1}=-1$ per cui la retta $y=x-1$ è l'asintoto obliquo anche a destra.

6. È necessario conoscere il dominio della funzione data, pertanto essendo $f(x)=arcsen(\cos(\pi-x))$ definita per $\begin{cases}\cos(\pi-x)\le 1=\cos 0\\ \cos(\pi-x)\ge -1=\cos\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\pi-x\ge 0\\ \pi-x\le\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\pi\\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \forall x\in[0,\pi]$, pertanto *non esistono limiti significativi* della funzione data.

7. Il *Teorema della Permanenza del segno*, afferma che: data una funzione $f : X \to R$ *sia* $x_0 \in \hat{R}$ in cui è possibile effettuare il limite su *X*, *sia* $L \in \hat{R}$, se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L < 0$, allora $\exists I_{x_0}$ t.c. $\forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I_{x_0}$ risulta $f(x) < 0$.

8. Essendo la funzione esponenziale definita $\forall x \in R$, è possibile calcolare il $\lim_{x \to 0} e^x - 1$; e risulta $\lim_{x \to 0} e^x - 1 = 0$. Per la definizione di limite $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che se $x \in (R - \{0\}) \cap]-\delta, \delta[$ si ha $|e^x - 1 - 0| < \varepsilon$; ovvero $|e^x - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} e^x < \varepsilon + 1 \\ e^x > -\varepsilon + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \log(1+\varepsilon) \\ x > \log(1-\varepsilon) \end{cases}$, pertanto ponendo $\delta = \log(1+\varepsilon)$ ed osservando che $\log(1-\varepsilon) < 0$ si è individuato un intorno di *zero*, quindi si è constatata la correttezza del limite.

Traccia D

1. Date le funzioni $f : [1,5[\to \sqrt{x-1} \in f([1,5[)$ e $g : [1,3[\to 2^x \in R$; riportare le *possibili funzioni composte* tra le funzioni date.

2. Servendosi della funzione $f(x) = x + 1$ e della sua perpendicolare *g* passante per l'origine; riportare l'equazione delle *due rette parallele* che circoscrivono, con quelle date, una superficie pari a 6.

3. Dire se la funzione $f : [0,4[\to [0,3]$, con $f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{se } x \in [0,2[\\ x - 2 & \text{se } x \in [2,4[\end{cases}$ è *strettamente monotona*.

4. Data la funzione $f : [0,+\infty[\to R$, con $f(x) = e^{2x}$; dire se gode delle condizioni sufficienti del *Teorema dell'invertibilità*, dopo aver enunciato il Teorema.

5. Dire se la funzione $f(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{x - 1}$, ha eventuali *asintoti*, e nel caso, riportare le relative *equazioni*.

6. Calcolare gli *eventuali limiti significativi* della seguente funzione $f(x) = \arccos\left(sen\left(\dfrac{\pi}{2} - x \right) \right)$.

7. Enunciare il I Teorema del confronto.

8. *Calcolare* il seguente limite: $\lim_{x \to -\infty} e^x - 1$, e *verificare* che il risultato è corretto.

Svolgimento - Traccia D

1. La funzione composta $(g \circ f)$ non è possibile calcolarla in quanto $f([1,5[) = [0,2[\not\subseteq [1,3[$. La funzione composta $(f \circ g)$ non è possibile calcolarla in quanto $g([1,3[) = [2,8[\not\subseteq [1,5[$.

2. Essendo $f(x)=x+1$, la funzione g risulta $g(x)=-x$; inoltre per avere una superficie pari a 6 è sufficiente descrivere un rettangolo di lati pari a 2 e 3, quindi è sufficiente trovare le due rette parallele alle funzioni date che hanno distanza da un punto di queste pari a 2 ed a 3, ovvero la retta parallela alla funzione *f*, che denotiamo con f_p risulta $y=x+c$, con distanza dal punto $P=(1,2)$ pari a $\frac{|1\cdot 1+(-1)\cdot 2+c|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2 \Leftrightarrow |-1+c|=2\sqrt{2} \Leftrightarrow c=\pm 2\sqrt{2}+1$, quindi $f_p(x)=x+2\sqrt{2}+1$; mentre la retta parallela alla funzione *g*, che denotiamo con g_p risulta $y=-x+c$, con distanza dall'origine pari a $\frac{|(-1)\cdot 0+(-1)\cdot 0+c|}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}}=3 \Leftrightarrow |c|=3\sqrt{2} \Leftrightarrow c=\pm 3\sqrt{2}$, quindi $g_p(x)=-x+3\sqrt{2}$.

3. Essendo $f(x)=\begin{cases}-x+2 & \text{se } x\in[0,2[\\ x-2 & \text{se } x\in[2,4[\end{cases}$ si osserva dal grafico che la funzione non è strettamente monotona in quanto, $\forall x_1,x_2\in[0,4[$ con $x_1<x_2$ non sempre risulta $f(x_1)<f(x_2)$.

4. Il Teorema dell'invertibilità delle funzioni strettamente monotone afferma che: data una funzione $f: X\rightarrow f(X)$ con X intervallo, se strettamente monotona, allora è invertibile. Essendo $f(x)=e^{3x}$, definita in $f:[0,+\infty[\rightarrow R$ e osservando che $f([0,+\infty[)=[0,+\infty[\subseteq R$ *non gode* di tutte le ipotesi del teorema.

5. La funzione: $f(x)=\frac{3x^2+1}{x-1}$, è definita $\forall x\in R-\{1\}\Leftrightarrow \forall x\in]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$, pertanto ha senso calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+1}{x-1}=-\infty$, pertanto potrebbe esserci un asintoto obliquo, quindi consideriamo $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+1}{x^2-x}=3$ e conseguentemente $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-3x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+1-3x^2+3x}{x-1}=3$ per cui la retta $y=3x+3$ è l'asintoto obliquo a sx. Inoltre $\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}(3x^2+1)\cdot\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x-1}=4(-\infty)=-\infty$ ed $\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}(x^2+1)\cdot\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}=4(+\infty)=+\infty$; per cui la retta $x=1$ è l'asintoto verticale sia a destra che a sinistra. In fine essendo $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x-1}=+\infty$, pertanto potrebbe esserci un asintoto obliquo, quindi consideriamo $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2-x}=3$ e conseguentemente $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-3x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1-3x^2+3x}{x-1}=3$ per cui la retta $y=3x+3$ è l'asintoto obliquo anche a destra.

6. È necessario conoscere il dominio della funzione data, pertanto essendo $f(x)=\arccos en\left(sen\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$ definita per

$$\begin{cases} sen\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \le 1 = sen\frac{\pi}{2} \\ sen\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \ge -1 = sen-\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2}-x \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}-x \ge -\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \le \pi \end{cases} \Leftrightarrow \forall x \in [0,\pi]$$

, pertanto *non esistono limiti significativi* della funzione data.

7. Il *I Teorema del confronto*, afferma che: sia $f : X \to R$, e *sia* $g : X \to R$, *sia* $x_0 \in \hat{R}$ in cui è possibile effettuare il limite su *X*, *siano* $L, M \in \hat{R}$, se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L$ ed $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = M$ e risulta che $L < M$ allora $\exists I_{x_0}$ t.c. $\forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I_{x_0}$ risulta $f(x) < g(x)$.

8. Essendo la funzione esponenziale definita $\forall x \in R$, è possibile calcolare il $\lim_{x \to -\infty} e^x - 1$; e risulta $\lim_{x \to -\infty} e^x - 1 = -1$. Per la definizione di limite $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che se $x \in (R) \cap I_{-\infty}$ si ha $\left|e^x - 1 + 1\right| < \varepsilon$; ovvero $\left|e^x\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \{e^x < \varepsilon \Leftrightarrow \{x < \log(\varepsilon)$, pertanto ponendo $\delta = -\log(\varepsilon)$ in quanto $\log(\varepsilon) < 0$ si è individuato un intorno di *meno infinito*, quindi si è constatata la correttezza del limite.