Matematica per l'Economia (A-K)
I Esonero – 27 ottobre 2017
(prof. Bisceglia)

Traccia A

1. Sia $Y=\{[0,1[,1,a\}$, dopo averne data la definizione, riportare l'*Insieme delle Parti*, $P(Y)$.
2. Sia $A\subseteq R$, dare la definizione di *Partizione finita* di *A*.
3. Sia $X=[0,1[\cap(R-Q)$ ed $Y=]0,1]\cap Q$, dire se tali insiemi sono *Disgiunti*.
4. Sia $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{se } x\in[-1,0[\\ x-1 & \text{se } x\in[0,1[\end{cases}$, dire se tale funzione è *limitata inferiormente* e se è dotata di *massimo*.
5. Dire se la funzione $f:\forall x\in]-1,2[\to f(x)=x^2-1\in f(]-1,2[)$ è *invertibile*.
6. Data la funzione $f(x)=2x-1$, riportare la funzione che garantisce un *incremento costante* pari a 2.
7. Dire se la funzione $f:\forall x\in]-1,1[\to f(x)=e^{\frac{x}{2}-1}$, è *concava*.
8. Dire se la funzione $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$, è dotata di asintoti *verticali* ed *orizzontali*.
9. Dire se la funzione $f(x)=arcsen\log(x-1)$ è *regolare* nel punto 1.
10. Dato il $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{e^{\frac{1}{|x|}}}$, *verificare* che si possa calcolare, e *constatarne* la correttezza.

Svolgimento - Traccia A

1. Essendo $Y=\{[0,1[,1,a\}$, l'insieme delle Parti è l'insieme $P(Y)=\{A/\,A\subseteq Y\}$, pertanto avremo che $P(Y)=\{\varnothing,\{[0,1[,1,a\},[0,1[,\{1\},\{a\},\{[0,1[,1\},\{[0,1[,a\},\{1,a\}\}$.
2. Per Partizione finita di A, si intende l'insieme $\{X_1,X_2,X_3,...,X_n\}$ costituito da *n* sottoinsiemi di *A*, tale che $\forall i,j\in\{1,2,...,n\},i\neq j: X_i\cap X_j=\varnothing$ e $\bigcup\limits_{i=1}^{n}X_i=A$.
3. Essendo $(R-Q)\cap Q=\varnothing$ si ha che $X\cap Y=\varnothing$, quindi i due insiemi sono *Disgiunti*.

4. Essendo $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{se } x\in[-1,0[\\ x-1 & \text{se } x\in[0,1[\end{cases}$, ed essendo $f([-1,1[)=[-1,1[$, tale funzione è *limitata inferiormente* e l' $\inf_{x\in[-1,1[} f(x)=-1$ in quando $\begin{cases}\exists -1\in R/\forall x\in[-1,1[:\ f(x)\geq -1\\ \forall\varepsilon>0,\exists\overline{x}\in[-1,1[:\ f(\overline{x})<-1+\varepsilon\end{cases}$; mentre non è dotata di *massimo* in quanto , $\nexists\overline{x}\in[-1,1[/\forall x\in[-1,1[:\ f(x)\leq\overline{x}$.

5. Una funzione è *invertibile* se *ingettiva* e *surgettiva*. Si definisce *ingettiva* se $\forall(x_1,x_2)\in]-1,2[$, con $x_1\neq x_2$, risulta $f(x_1)\neq f(x_2)$, pertanto se poniamo $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1^{\ 2}-1=x_2^{\ 2}-1\Leftrightarrow\sqrt{x_1^{\ 2}}=\sqrt{x_2^{\ 2}}\Leftrightarrow|x_1|=|x_2|\not\Rightarrow x_1=x_2$ quindi non è *ingettiva* pertanto non è *invertibile*.

6. Data la funzione $f(x)=2x-1$, la funzione che garantisce un *incremento costante* pari a 2, ha stesso coefficiente angolare e risulta: $h(x)=f(x)+2\Leftrightarrow h(x)=2x-1+2\Leftrightarrow h(x)=2x+1$.

7. Essendo $f(]-1,1[)=\left]\frac{1}{\sqrt{e^3}},\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$ un intervallo, ed essendo monotona, *f* è concava o in modo equivalente $\forall a,b\in]-1,1[$ e con $a<b$, $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\frac{f(a)+f(b)}{2}$. Pertanto considerando $a=\frac{x-2}{2}$ e $b=\frac{y-2}{2}$, risulta $e^{\frac{x-2+y-2}{4}}\geq\frac{e^{\frac{x-2}{2}}+e^{\frac{y-2}{2}}}{2}$, ovvero $2\left(e^{\frac{x-2}{4}}\cdot e^{\frac{y-2}{4}}\right)\geq e^{\frac{x-2}{2}}+e^{\frac{y-2}{2}}\Leftrightarrow e^{\frac{x-2}{2}}+e^{\frac{y-2}{2}}-2\left(e^{\frac{x-2}{4}}\cdot e^{\frac{y-2}{4}}\right)\leq 0\Leftrightarrow\left(e^{\frac{x-2}{4}}-e^{\frac{y-2}{4}}\right)^2\leq 0$ che risulta ovviamente falso, pertanto la funzione *f* non è concava.

8. La funzione: $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$, è definita $\forall x\in R-\{-1\}\Leftrightarrow\forall x\in]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$, pertanto ha senso calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$, $\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}(x-1)\cdot\lim_{x\to-1^-}\frac{1}{x+1}=-2(-\infty)=+\infty$ ed $\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}(x-1)\cdot\lim_{x\to-1^+}\frac{1}{x+1}=-2(+\infty)=-\infty$; pertanto la funzione ha un asintoto orizzontale a destra ed a sinistra di equazione $y=1$ ed un asintoto verticale a destra ed a sinistra di equazione $x=-1$.

9. Una funzione si definisce *regolare* in x_0 se $\exists\lim_{x\to x_0}f(x)$. Essendo la funzione $f(x)=arcsen\log(x-1)$ definita per $-1\leq\log(x-1)\leq 1\Leftrightarrow\frac{1}{e}+1\leq x\leq 1+e\Leftrightarrow\forall x\in\left[1+\frac{1}{e},1+e\right]$ ed inoltre per $x-1>0\Leftrightarrow\forall x\in]1,+\infty[$ quindi la funzione è definita $\forall x\in\left[1+\frac{1}{e},1+e\right]\cap]1,+\infty[\Leftrightarrow\forall x\in\left[1+\frac{1}{e},1+e\right]$; pertanto $\nexists\lim_{x\to 1}arcsen\log(x-1)$ in quanto il punto 1 non è di accumulazione per il dominio della funzione assegnata.

10. Essendo la funzione $f(x)=\frac{1}{e^{\frac{1}{|x|}}}$ definita $\forall x\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$, è possibile calcolare il $\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{\frac{1}{|x|}}}$; e risulta che $\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|}=+\infty$, quindi $\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{e^{y}}=0$, pertanto $\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{\frac{1}{|x|}}}=0$. Per la definizione di limite $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ tale che $\forall x\in\left(\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[\right)\cap\left]-\delta,\delta\right[$ si ha $\left|\frac{1}{e^{\frac{1}{|x|}}}\right|<\varepsilon$ e quindi $\left|\frac{1}{e^{\frac{1}{|x|}}}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow 0<\frac{1}{e^{\frac{1}{|x|}}}<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{1}{\varepsilon}<e^{\frac{1}{|x|}}\Leftrightarrow\log\frac{1}{\varepsilon}<\frac{1}{|x|}\Leftrightarrow|x|<\frac{1}{\log\frac{1}{\varepsilon}}=\log_{\frac{1}{\varepsilon}}e$, ovvero $\forall x\in\left]-\log_{\frac{1}{\varepsilon}}e,\log_{\frac{1}{\varepsilon}}e\right[$ pertanto ponendo $\delta=\log_{\frac{1}{\varepsilon}}e$ si è individuato un intorno del punto 0, si è, quindi constatata la correttezza del limite.

Traccia B

1. Sia $Z=\{0,\left]0,1\right],b\}$, dopo averne data la definizione, riportare l'*Insieme delle Parti*, $P(Z)$.
2. Sia $B\subseteq R$, dare la definizione di *Partizione finita* di *B*.
3. Sia $X=\left[1,2\right[\cap(R-Q)$ ed $Y=\left]1,2\right]\cap Q$, dire se tali insiemi sono *Disgiunti*.
4. Sia $f(x)=\begin{cases}2x-1 \text{ se } x\in[1,2]\\ x+1 \text{ se } x\in\left]0,1\right[\end{cases}$, dire se tale funzione è *limitata superiormente* e se è dotata di *massimo*.
5. Dire se la funzione $f:\forall x\in\left]-1,1\right[\to f(x)=x^2+1\in f\left(\left]-1,1\right[\right)$ è *invertibile*.
6. Data la funzione $g(x)=x+1$, riportare la funzione che garantisce un *incremento costante* pari a 2.
7. Dire se la funzione $f:\forall x\in\left]-1,1\right[\to f(x)=e^{\frac{x}{2}-1}$, è *concava*.
8. Dire se la funzione $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, è dotata di asintoti *verticali* ed *orizzontali*.
9. Dire se la funzione $f(x)=\arccos\log(x+1)$ è *regolare* nel punto -1.
10. Dato il $\lim_{x\to 0}\sqrt{e^{\frac{1}{|x|}}}$, *verificare* che si possa calcolare, e *constatarne* la correttezza.

Svolgimento - Traccia B

1. Essendo $Z=\{0,]0,1],b\}$, l'insieme delle Parti è l'insieme $P(Z)=\{A/A\subseteq Z\}$, pertanto avremo che $P(Z)=\{\varnothing,\{0,[0,1[,b\},\{0\},[0,1[,\{b\},\{[0,1[,0\},\{[0,1[,b\},\{0,b\}\}$.

2. Per Partizione finita di B, si intende l'insieme $\{X_1,X_2,X_3,...,X_n\}$ costituito da *n* sottoinsiemi di *B*, tale che $\forall i,j\in\{1,2,...,n\}, i\neq j: X_i\cap X_j=\varnothing$ e $\bigcup_{i=1}^{n}X_i=B$.

3. Essendo $(R-Q)\cap Q=\varnothing$ si ha che $X\cap Y=\varnothing$, quindi i due insiemi sono *Disgiunti*.

4. Essendo $f(x)=\begin{cases}2x-1 \text{ se } x\in[1,2]\\ x+1 \text{ se } x\in]0,1[\end{cases}$, ed essendo $f(]0,2])=[1,3]$, tale funzione è *limitata superiormente* ed il $\sup\limits_{x\in]0,2]}f(x)=3$ in quando $\begin{cases}\exists 3\in R/\forall x\in]0,2]: f(x)\leq 3\\ \forall\varepsilon>0,\exists\bar{x}\in]0,2]: f(\bar{x})>3-\varepsilon\end{cases}$; inoltre è dotata di *massimo* in quanto, in quanto $\sup\limits_{x\in]0,2]}f(x)=3\in[1,3]\Leftrightarrow\sup\limits_{x\in]0,2]}f(x)=\max\limits_{x\in]0,2]}f(x)=3$ ed ovviamente $\exists\bar{x}\in]0,2]/\forall x\in]0,2]: f(x)\leq\bar{x}$.

5. $f:\forall x\in]-1,1[\to f(x)=x^2+1\in f(]-1,1[)$ Una funzione è *invertibile* se *ingettiva* e *surgettiva*. Si definisce *ingettiva* se $\forall(x_1,x_2)\in]-1,1[$, con $x_1\neq x_2$, risulta $f(x_1)\neq f(x_2)$, pertanto se poniamo $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow {x_1}^2+1={x_2}^2+1\Leftrightarrow\sqrt{{x_1}^2}=\sqrt{{x_2}^2}\Leftrightarrow|x_1|=|x_2|\neq x_1=x_2$, quindi non è *ingettiva* pertanto non è *invertibile*.

6. Data la funzione $g(x)=x+1$, la funzione che garantisce un *incremento costante* pari a 2, ha stesso coefficiente angolare e risulta: $h(x)=g(x)+2\Leftrightarrow h(x)=x+1+2\Leftrightarrow h(x)=x+3$.

7. Essendo $f(]-1,1[)=\left]\frac{1}{\sqrt{e^3}},\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$ un intervallo, ed essendo monotona, *f* è concava o in modo equivalente $\forall a,b\in]-1,1[$ e con $a<b$, $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\frac{f(a)+f(b)}{2}$. Pertanto considerando $a=\frac{x-2}{2}$ e $b=\frac{y-2}{2}$, risulta $e^{\frac{x-2+y-2}{4}}\geq\frac{e^{\frac{x-2}{2}}+e^{\frac{y-2}{2}}}{2}$, ovvero $2\left(e^{\frac{x-2}{4}}\cdot e^{\frac{y-2}{4}}\right)\geq e^{\frac{x-2}{2}}+e^{\frac{y-2}{2}}\Leftrightarrow e^{\frac{x-2}{2}}+e^{\frac{y-2}{2}}-2\left(e^{\frac{x-2}{4}}\cdot e^{\frac{y-2}{4}}\right)\leq 0\Leftrightarrow\left(e^{\frac{x-2}{4}}-e^{\frac{y-2}{4}}\right)^2\leq 0$ che risulta ovviamente falso, pertanto la funzione *f* non è concava.

8. La funzione: $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, è definita $\forall x\in R-\{1\}\Leftrightarrow\forall x\in]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$, pertanto ha senso calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x+1)\cdot\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1}{x-1}=2(-\infty)=-\infty$ ed $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x+1)\cdot\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}=2(+\infty)=+\infty$; pertanto la funzione ha un asintoto orizzontale a destra ed a sinistra di equazione $y=1$ ed un asintoto verticale a destra ed a sinistra di equazione $x=1$.

9. Una funzione si definisce *regolare* in x_0 se $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Essendo la funzione $f(x) = \arccos \log(x+1)$ definita per $-1 \le \log(x+1) \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{e} - 1 \le x \le e - 1 \Leftrightarrow \forall x \in \left[\dfrac{1}{e} - 1, e - 1\right]$ ed inoltre per $x + 1 > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \left]-1, +\infty\right[$ quindi la funzione è definita $\forall x \in \left[\dfrac{1}{e} - 1, e - 1\right] \cap \left]-1, +\infty\right[\Leftrightarrow \forall x \in \left[\dfrac{1}{e} - 1, e - 1\right]$; pertanto $\nexists \lim\limits_{x \to 1} \arccos \log(x+1)$ in quanto il punto -1 non è di accumulazione per il dominio della funzione assegnata.

10. Essendo la funzione $f(x) = \sqrt{e^{\frac{1}{|x|}}}$ definita $\forall x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[$, è possibile calcolare il $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{e^{\frac{1}{|x|}}}$; e risulta che $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{|x|} = +\infty$, $\lim\limits_{y \to +\infty} e^y = +\infty$, quindi $\lim\limits_{z \to +\infty} \sqrt{z} = +\infty$, pertanto $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{e^{\frac{1}{|x|}}} = +\infty$. Per la definizione di limite $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in \left(\left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[\right) \cap \left]-\delta, \delta\right[$ si ha $\sqrt{e^{\frac{1}{|x|}}} > \varepsilon$ e quindi $\sqrt{e^{\frac{1}{|x|}}} > \varepsilon \Leftrightarrow e^{\frac{1}{|x|}} > \varepsilon^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{|x|} > \log \varepsilon^2 \Leftrightarrow |x| < \log \varepsilon^2$, ovvero $\forall x \in \left]-\log \varepsilon^2, \log \varepsilon^2\right[$ pertanto ponendo $\delta = \log \varepsilon^2$ si è individuato un intorno del punto 0, si è, quindi constatata la correttezza del limite.