Matematica per l'Economia (A-K) e Matematica Generale
Esonero Completo – 19 dicembre 2016
(prof. Bisceglia)

Traccia C

1. Calcolare il seguente $\lim_{x\to+\infty}\frac{3\sqrt[3]{x}-2}{2x^2+x-\sqrt{x}}$, e verificare che sia corretto.

2. Data la funzione $h(x)=\cos\frac{1}{x-1}$, dire se esistono dei punti in cui non è regolare, motivando la risposta.

3. Studiare la funzione $f(x)=xe^{-2x^2}$, e tracciarne approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione $g:\forall x\in[0,1]\to ax^2+2x+\frac{1}{2}$, per quali valori del parametro a soddisfa le ipotesi del Teorema del Punto fisso.

5. Data la funzione $p(x)=(x^2+2x-8)e^{-2x}$, calcolare la primitiva *P*, che nel punto 0 assume valore 1.

6. Dire se la successione $x_n=2^n-1$ è limitata, e, se è dotata di estremi che appartengono all'insieme dei valori.

7. Riportare l'equazione delle rette parallele, alla retta passante per i punti del piano $A=(1,-1)$ e $B=(-1,1)$, e, che hanno distanza dall'origine pari a 2.

8. Dire se la funzione $h(x)=\frac{2x-1}{x-1}$ ha punti di simmetria e, se esistono, verificare che sia vero.

Svolgimento - Traccia C

1. Essendo $\lim_{x\to+\infty}\frac{3\sqrt[3]{x}-2}{2x^2+x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^{\frac{1}{3}}-2}{2x^2+x-x^{\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}\left(3-2x^{-\frac{1}{3}}\right)}{x^2\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)}=$, ovvero $\frac{3}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}=0$.

   Per cui si ha $\left|\frac{3\sqrt[3]{x}-2}{2x^2+x-\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}-0\right|<\varepsilon\Leftrightarrow-\varepsilon<\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}<\varepsilon$, per cui essendo la radice sempre positiva è sufficiente studiare la seguente diseguaglianza $\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{1}{\varepsilon}<\sqrt[3]{x^5}\Leftrightarrow x^5>\frac{1}{\varepsilon^3}\Leftrightarrow x>\sqrt[5]{\frac{1}{\varepsilon^3}}$ pertanto posto $\delta=\sqrt[5]{\frac{1}{\varepsilon^3}}$, abbiamo individuato un intorno di più infinito.

2. Essendo $h(x)=\cos\frac{1}{x-1}$, tale funzione è definita in $R-\{1\}$, ed essendo continua è regolare in $R-\{1\}$, pertanto occorre vedere se è regolare in 1, per cui occorre calcolare il $\lim_{x\to1^-}\cos\frac{1}{x-1}$ ed il $\lim_{x\to1^+}\cos\frac{1}{x-1}$,

osservando che il $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$ e che il $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$, possiamo affermare che $\nexists\lim_{y\to-\infty}\cos y$, così come $\nexists\lim_{y\to+\infty}\cos y$, pertanto la funzione nel punto 1 non è regolare.

3. *Data la funzione*: $x\to f(x)=xe^{-2x^2}$.

Ricordando che la funzione esponenziale è definita in R è facile rendersi conto che R è l'insieme di definizione di f e quindi è:

$$f : x\in R\to xe^{-2x^2}$$

ed essendo:

$f(x)>0\Leftrightarrow xe^{-2x^2}>0\Leftrightarrow x>0\Leftrightarrow x\in\left]0,+\infty\right[$,

$f(x)=0\Leftrightarrow xe^{-2x^2}=0\Leftrightarrow x=0$

$f(x)<0\Leftrightarrow x\in R-\left[0,+\infty\right[=\left]-\infty,0\right[$

Il grafico di f è al di sopra dell'asse delle x in $\left]0,+\infty\right[$, è al di sotto dell'asse delle x in $\left]-\infty,0\right[$, ha in comune con gli assi il punto $(0,f(0))=(0,0)$ ed essendo:

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}xe^{-2x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{2x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{4xe^{2x^2}}=0$ e

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}xe^{-2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{2x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4xe^{2x^2}}=0$

il grafico di f ha un solo asintoto: la retta di equazione $y=0$ asintoto orizzontale a sinistra e a destra.

Essendo:

$$f'(x)=D\left(xe^{-2x^2}\right)=e^{-2x^2}\left(1-4x^2\right)\text{ se }x\in R$$

è:

$f'(x)>0\Leftrightarrow e^{-2x^2}\left(1-4x^2\right)>0\Leftrightarrow 1-4x^2>0\Leftrightarrow 4x^2-1<0\Leftrightarrow x\in\left]-1/2,1/2\right[$

$f'(x)=0\Leftrightarrow e^{-2x^2}\left(1-4x^2\right)=0\Leftrightarrow 1-4x^2=0\Leftrightarrow x=-1/2\text{ o }x=1/2$

$f'(x)<0\Leftrightarrow x\in-\left[-1/2,1/2\right]=\left]-\infty,-1/2\right[\cup\left]1/2,+\infty\right[$

quindi f è strettamente crescente in $\left[-1/2,1/2\right]$, è strettamente decrescente in $\left]-\infty,-1/2\right]$ ed in $\left[1/2,+\infty\right[$, $-1/2$ è un punto di minimo relativo proprio per f ed è il punto di minimo per f, $1/2$ è un punto di massimo relativo proprio per f ed è il punto di massimo per f, il grafico di f passa per i punti $(-1/2,f(-1/2))=\left(-1/2,-e^{-1/2}/2\right)$ e $(1/2,f(1/2))=\left(1/2,e^{-1/2}/2\right)$ ed $-e^{-1/2}/2$ è il minimo di f ed $e^{-1/2}/2$ è il massimo di f.

Risultando infine:

$$f''(x)=D\left(e^{-2x^2}\left(1-4x^2\right)\right)=e^{-2x^2}\left(-4x+16x^3-8x\right)=4xe^{-2x^2}\left(4x^2-3\right)\text{ se }x\in R$$

è:

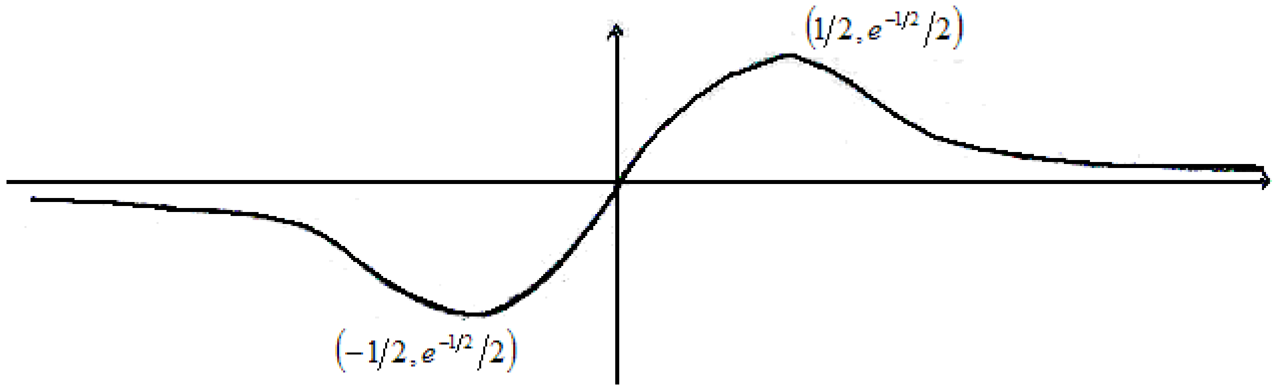
$$f''(x)>0\Leftrightarrow 4xe^{-2x^2}\left(4x^2-3\right)>0\Leftrightarrow x\left(4x^2-3\right)>0\Leftrightarrow x\in\left]-\sqrt{3}/2,0\right[\cup\left]\sqrt{3}/2,+\infty\right[,$$

$f''(x)=0\Leftrightarrow 4xe^{-2x^2}\left(4x^2-3\right)=0\Leftrightarrow x\left(4x^2-3\right)=0\Leftrightarrow x=-\sqrt{3}/2\text{ o }x=0\text{ o }x=\sqrt{3}/2$

$f''(x)<0\Leftrightarrow x\in-\left(\left]-\sqrt{3}/2,0\right[\cup\left]\sqrt{3}/2,+\infty\right[\right)=\left]-\infty,-\sqrt{3}/2,\right[\cup\left]0,\sqrt{3}/2\right[$

e pertanto f è strettamente convessa in $\left[-\sqrt{3}/2,0\right]$ ed in $\left[\sqrt{3}/2,+\infty\right[$, è strettamente concava in $\left]-\infty,-\sqrt{3}/2\right]$ ed in $\left[0,\sqrt{3}/2\right]$, $-\sqrt{3}/2$, 0 e $\sqrt{3}/2$ sono tre punti di flesso proprio per f ed il grafico di f passa per i punti $\left(-\sqrt{3}/2,f\left(-\sqrt{3}/2\right)\right)=\left(-\sqrt{3}/2,-\sqrt{3}\,e^{-3/2}/2\right)$ e $\left(\sqrt{3}/2,f\left(\sqrt{3}/2\right)\right)=\left(\sqrt{3}/2,\sqrt{3}\,e^{-3/2}/2\right)$.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di f:



e quindi dedurre che:
$f(R) = \left[-e^{-1/2}/2, e^{-1/2}/2\right]$, $f\left(\left]-\infty,-1/2\right]\right) = \left[-e^{-1/2}/2, 0\right[$, $f\left(\left[-1/2,1/2\right]\right) = \left[-e^{-1/2}/2, e^{-1/2}/2\right]$, $f\left(\left[1/2, +\infty\right[\right) = \left]0, e^{-1/2}/2\right]$, f non è biunivoca, la restrizione di f a $\left]-\infty,-1/2\right]$ è biunivoca su $\left[-e^{-1/2}/2, 0\right[$, la restrizione di f a $\left[-1/2,1/2\right]$ è biunivoca su $\left[-e^{-1/2}/2, e^{-1/2}/2\right]$ e la restrizione di f a $\left[1/2,+\infty\right[$ è biunivoca su $\left]0, e^{-1/2}/2\right]$.

OSSERVAZIONE. È immediato verificare che f è una funzione dispari quindi avremmo potuto limitarci a tracciare il grafico G della restrizione di f a $\left[0,+\infty\right[$ e completare quindi il grafico di f unendo a G la curva G' simmetrica di G rispetto al punto $(0,0)$.

4. Essendo g continua in $[0,1]$, ed essendo $g(0) = \frac{1}{2} \in [0,1]$, e $g(1) = a + 2 + \frac{1}{2} \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \le a + 2 + \frac{1}{2} \le 1 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \le a \le 1 - \frac{5}{2}$ pertanto la funzione soddisfa le ipotesi del punto fisso se $a \in \left[-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right]$.

5. Essendo $p(x) = \left(x^2 + 2x - 8\right)e^{-2x}$, del tipo $f(x)g'(x)$ si procede integrando per parte, quindi $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$ per cui essendo $g(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$ si ha
$$\int \left(x^2 + 2x - 8\right)e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}\left(x^2 + 2x - 8\right)e^{-2x} + \frac{1}{2}\int (2x+2)e^{-2x}dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(x^2 + 2x - 8\right)e^{-2x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}(2x+2)e^{-2x} + \int e^{-2x}dx\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(x^2 + 2x - 8\right)e^{-2x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}(2x+2)e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}\right) + c =$$
, ovvero
$$= -\frac{1}{4}e^{-2x}\left(2\left(x^2 + 2x - 8\right) + (2x+2) + 1\right) + c = -\frac{1}{4}e^{-2x}\left(2x^2 + 6x - 13\right) + c =$$
quindi $P(x) = -\frac{1}{4}e^{-2x}\left(2x^2 + 6x - 13\right) + c$ e conseguentemente si ha $P(0) = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}(-13) + c = 1 \Leftrightarrow c = 1 - \frac{13}{4} \Leftrightarrow c = -\frac{9}{4}$ quindi la primitiva cercata è $P(x) = -\frac{1}{4}e^{-2x}\left(2x^2 + 6x - 13\right) - \frac{9}{4}$.

6. La successione $x_n = 2^n - 1$ non è limitata, in quanto $x_n(N) = \{1,3,7,15,....,2^n - 1,..\}$, mentre è dotata di estremo inferiore $\underset{n \in N}{Inf}\, x_n = 1 \in x_n(N) \Leftrightarrow \underset{n \in N}{Inf}\, x_n = \min_{n \in N} x_n$, mentre $\underset{n \in N}{Sup}\, x_n = +\infty$, pertanto non è dotata di massimo.

7. L'equazione della retta passante per i punti del piano $A = (1,-1)$ e $B = (-1,1)$ è: $\frac{-1-1}{x-1} = \frac{1+1}{y+1} \Leftrightarrow \frac{-2}{x-1} = \frac{2}{y+1} \Leftrightarrow -2(y+1) = 2(x-1) \Leftrightarrow -2y - 2 = 2x - 2 \Leftrightarrow y = -x$, e considerando che una generica retta parallela ha equazione $y = -x + c$, per cui la distanza di quest'ultima dal punto $O = (0,0)$ è data da: $d(r,O) = \frac{|-1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + c|}{\sqrt{2}} = 2 \Leftrightarrow |c| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow c = \pm 2\sqrt{2}$, pertanto le rette che hanno distanza dalla bisettrice del secondo e quarto quadrante, pari a 2, sono $y = -x \pm 2\sqrt{2}$.

8. Data la funzione $h(x) = \frac{2x-1}{x-1}$, definita in $R - \{1\}$, ed essendo il $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x-1}{x-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x-1}{x-1} = 2$, un punto di simmetria potrebbe essere: $(1,2)$, quindi, se vero si ha: $h(1-x) - 2 = -h(1+x) + 2$ ovvero $\frac{2(1-x)-1}{1-x-1} - 2 = -\frac{2(1+x)-1}{1+x-1} + 2 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{-x} - 2 = -\frac{1+2x}{x} + 2 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x} - 2 = \frac{-1-2x}{x} + 2$ ovvero, $\frac{2x-1-2x}{x} = \frac{-1-2x+2x}{x}$ pertanto vera, quindi simmetrica rispetto al punto $(1,2)$.

Traccia D

1. Calcolare il seguente $\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - 2\sqrt[3]{x}}{2x^3 + x - \sqrt{x}}$, e verificare che sia corretto.

2. Data la funzione $h(x) = sen\frac{1}{1+x}$, dire se esistono dei punti in cui non è regolare, motivando la risposta.

3. Studiare la funzione $f(x) = x(x-1)e^{-x}$, e tracciarne approssimativamente il grafico.

4. Data la funzione $g : \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \to ax^2 - x + \frac{1}{2}$, per quali valori del parametro a soddisfa le ipotesi del Teorema del Punto fisso.

5. Data la funzione $p(x) = (x^2 - 2x + 2)e^{-\frac{x}{2}}$, calcolare la primitiva *P*, che nel punto 0 assume valore 1.

6. Dire se la successione $x_n = 2^n + 1$ è limitata, e, se è dotata di estremi che appartengono all'insieme dei valori.

7. Riportare l'equazione delle rette parallele, alla retta passante per i punti del piano $A = (1,1)$ e $B = (-1,-1)$, e, che hanno distanza dall'origine pari a 2.

8. Dire se la funzione $h(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$ ha punti di simmetria e, se esistono, verificare che sia vero.

Svolgimento - Traccia D

1. Essendo $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-2\sqrt[3]{x}}{2x^3+x-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-2x^{\frac{1}{3}}}{2x^3+x-x^{\frac{1}{2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\frac{1}{3}}\left(x^{-\frac{1}{3}}-2\right)}{x^3\left(2+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^{\frac{5}{2}}}\right)}==-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^{\frac{8}{3}}}=0$. Per cui si ha $\left|\dfrac{1-2\sqrt[3]{x}}{2x^3+x-\sqrt{x}}+0\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\left|\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^8}}+0\right|<\varepsilon\Leftrightarrow-\varepsilon<\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^8}}<\varepsilon$, per cui essendo la radice sempre positiva è sufficiente studiare la seguente diseguaglianza $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^8}}<\varepsilon\Leftrightarrow\dfrac{1}{\varepsilon}<\sqrt[3]{x^8}\Leftrightarrow x^8>\dfrac{1}{\varepsilon^3}\Leftrightarrow x>\sqrt[8]{\dfrac{1}{\varepsilon^3}}$ pertanto posto $\delta=\sqrt[8]{\dfrac{1}{\varepsilon^3}}$, abbiamo individuato un intorno di più infinito.

2. Essendo $h(x)=sen\dfrac{1}{1+x}$, tale funzione è definita in $R-\{-1\}$, ed essendo continua è regolare in $R-\{-1\}$, pertanto occorre vedere se è regolare in -1, per cui occorre calcolare il $\lim\limits_{x\to-1^-}sen\dfrac{1}{1+x}$ ed il $\lim\limits_{x\to-1^+}sen\dfrac{1}{1+x}$, osservando che il $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{1}{1+x}=-\infty$ e che il $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{1}{1+x}=+\infty$, possiamo affermare che $\nexists\lim\limits_{y\to-\infty}seny$, così come $\nexists\lim\limits_{y\to+\infty}seny$, pertanto la funzione nel punto -1 non è regolare.

3. Data la funzione: $x\to f(x)=x(x-1)e^{-x}$.
   L'insieme di definizione di f è, evidentemente, R quindi è:
$$f:x\in R\to x(x-1)e^{-x}$$
e risultando:
$f(x)>0\Leftrightarrow x(x-1)e^{-x}>0\Leftrightarrow x(x-1)>0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]1,+\infty\right[$,
$f(x)=0\Leftrightarrow x(x-1)e^{-x}=0\Leftrightarrow x(x-1)=0\Leftrightarrow x=0$ o $x=1$,
$f(x)<0\Leftrightarrow x\in-\left]-\infty,0\right]\cup\left[1,+\infty\right[=\left]0,1\right[$
   il grafico di f si trova al di sopra dell'asse delle x in $\left]-\infty,0\right[$ ed in $\left]1,+\infty\right[$, è al di sotto dell'asse delle x in $\left]0,1\right[$, ha in comune con gli assi i punti $(0,0)$ e $(1,0)$ ed essendo:
$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x(x-1)e^{-x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^{-x}=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x(x-1)e^{-x}=$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$$
il grafico di f ha un solo asintoto: la retta di equazione $y=0$ asintoto orizzontale a destra.
Essendo:
$$f'(x)=D\left(x(x-1)e^{-x}\right)=e^{-x}\left(2x-1-x^2+x\right)=-\left(x^2-3x+1\right)e^{-x}\ \text{ se }\ x\in R$$
è
$f'(x)>0\Leftrightarrow-\left(x^2-3x+1\right)e^{-x}>0\Leftrightarrow x^2-3x+1<0\Leftrightarrow x\in\left]\left(3-\sqrt{5}\right)/2,\left(3+\sqrt{5}\right)/2\right[$,
$f'(x)=0\Leftrightarrow-\left(x^2-3x+1\right)e^{-x}=0\Leftrightarrow x^2-3x+1=0\Leftrightarrow x=\left(3-\sqrt{5}\right)/2$ o $x=\left(3+\sqrt{5}\right)/2$
$f'(x)<0\Leftrightarrow x\in-\left[\left(3-\sqrt{5}\right)/2,\left(3+\sqrt{5}\right)/2\right]=\left]-\infty,\left(3-\sqrt{5}\right)/2,\right[\cup\left]\left(3+\sqrt{5}\right)/2,+\infty\right[$

quindi *f* è strettamente crescente in $\left[\left(3-\sqrt{5}\right)/2,\left(3+\sqrt{5}\right)/2\right]$, è strettamente decrescente in $\left]-\infty,\left(3-\sqrt{5}\right)/2\right]$ ed in $\left[\left(3+\sqrt{5}\right)/2,+\infty\right[$, $\left(3-\sqrt{5}\right)/2$ è un punto di minimo relativo proprio per *f*, $\left(3+\sqrt{5}\right)/2$ è un punto di massimo relativo proprio per *f*, il grafico di *f* passa per i punti $\left(\left(3-\sqrt{5}\right)/2, f\left(\left(3-\sqrt{5}\right)/2\right)\right)=$ $=\left(\left(3-\sqrt{5}\right)/2,\left(2-\sqrt{5}\right)e^{\left(\sqrt{5}-3\right)/2}\right)$ e $\left(\left(3+\sqrt{5}\right)/2, f\left(\left(3+\sqrt{5}\right)/2\right)\right)=\left(\left(3+\sqrt{5}\right)/2, \quad \left(2+\sqrt{5}\right)e^{-\left(3+\sqrt{5}\right)/2}\right)$, $\left(3-\sqrt{5}\right)/2$ è un punto di minimo per *f* e $\left(2-\sqrt{5}\right)e^{\left(\sqrt{5}-3\right)/2}$ è il minimo di *f*.

Risultando infine:

$$f''(x)=D\left(-\left(x^2-3x+1\right)e^{-x}\right)=-e^{-x}\left(2x-3-x^2+3x-1\right)=\left(x^2-5x+4\right)e^{-x} \text{ se } x\in R$$

è:

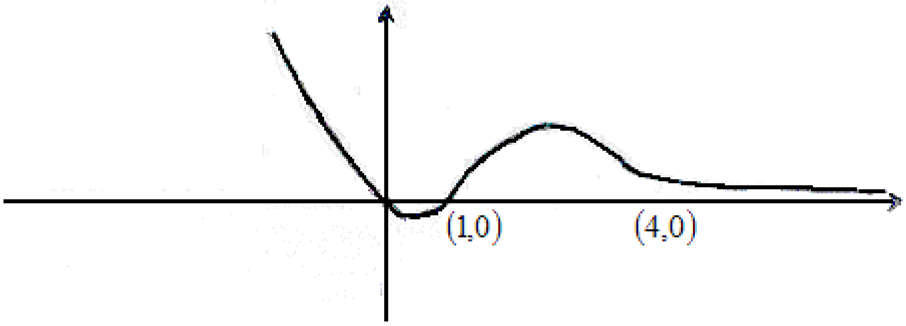
$f''(x)>0 \Leftrightarrow \left(x^2-5x+4\right)e^{-x}>0 \Leftrightarrow x^2-5x+4>0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,1\right[\cup\left]4,+\infty\right[$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \left(x^2-5x+4\right)e^{-x}=0 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ o } x=4$

$f''(x)<0 \Leftrightarrow x\in -\left(\left]-\infty,1\right]\cup\left[4,+\infty\right[\right)=\left]1,4\right[$

e pertanto *f* è strettamente convessa in $\left]-\infty,1\right]$ ed in $\left[4,+\infty\right]$, è strettamente concava in $[1,4]$, 1 e 4 sono due punti di flesso proprio per *f* ed il grafico di *f* passa per il punto $\left(4, f(4)\right)=\left(4,12e^{-4}\right)$.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di *f*:



e quindi dedurre che:

$f(R)=\left[\left(2-\sqrt{5}\right)e^{\left(\sqrt{5}-3\right)/2},+\infty\right[$, $f\left(\left]-\infty,\left(3-\sqrt{5}\right)/2\right]\right)=\left[\left(2-\sqrt{5}\right)e^{\left(\sqrt{5}-3\right)/2},+\infty\right[$, $f\left(\left[\left(3-\sqrt{5}\right)/2,\left(3+\sqrt{5}\right)/2\right]\right)=$ $=\left[\left(2-\sqrt{5}\right)e^{\left(\sqrt{5}-3\right)/2},\left(2+\sqrt{5}\right)e^{-\left(3+\sqrt{5}\right)/2}\right]$, $f\left(\left[\left(3+\sqrt{5}\right)/2,+\infty\right[\right)=\left]0,\left(2+\sqrt{5}\right)e^{-\left(3+\sqrt{5}\right)/2}\right]$, *f* non è biunivoca, la restrizione di *f* a $\left]-\infty,\left(3-\sqrt{5}\right)/2\right]$ è biunivoca su $\left[\left(2-\sqrt{5}\right)e^{\left(\sqrt{5}-3\right)/2},+\infty\right[$, la restrizione di *f* a $\left[\left(3-\sqrt{5}\right)/2,\left(3+\sqrt{5}\right)/2\right]$ è biunivoca su $\left[\left(2-\sqrt{5}\right)e^{\left(\sqrt{5}-3\right)/2},\left(2+\sqrt{5}\right)e^{-\left(3+\sqrt{5}\right)/2}\right]$ e la restrizione di *f* a $\left[\left(3+\sqrt{5}\right)/2,+\infty\right[$ è biunivoca su $\left]0,\left(2+\sqrt{5}\right)e^{-\left(3+\sqrt{5}\right)/2}\right]$.

4. Essendo *g* continua in $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, ed essendo $g(0)=\frac{1}{2}\in[0,1]$, e

   $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\Leftrightarrow 0\le\frac{a}{4}\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0\le a\le 2$ pertanto la funzione soddisfa le ipotesi del punto fisso se $a\in[0,2]$.

5. Essendo $p(x)=\left(x^2-2x+2\right)e^{-\frac{x}{2}}$, del tipo $f(x)g'(x)$ si procede integrando per parte, quindi

   $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$ per cui essendo $g(x)=-2e^{-\frac{x}{2}}$ si ha

   $$\int\left(x^2-2x+2\right)e^{-\frac{x}{2}}dx=-2\left(x^2-2x+2\right)e^{-\frac{x}{2}}+2\int(2x-2)e^{-\frac{x}{2}}dx=$$

   $$=-2\left(x^2-2x+2\right)e^{-\frac{x}{2}}+2\left(-2(2x-2)e^{-\frac{x}{2}}+2\int 2e^{-\frac{x}{2}}dx\right)=$$

$= -2\left(x^2 - 2x + 2\right)e^{-\frac{x}{2}} + 2\left(-2\left(2x-2\right)e^{-\frac{x}{2}} + 4\left(-2e^{-\frac{x}{2}}\right)\right) + c =$, ovvero $= -2e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2 + 2x + 6\right) + c =$

quindi $P(x) = -2e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2 + 2x + 6\right) + c =$ e conseguentemente si ha
$P(0) = 1 \Leftrightarrow -2(6) + c = 1 \Leftrightarrow -12 + c = 1 \Leftrightarrow c = 13$ quindi la primitiva cercata è

$P(x) = -2e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2 + 2x + 6\right) + 13$.

6. La successione $x_n = 2^n + 1$ non è limitata, in quanto $x_n(N) = \{3,5,9,17,....,2^n + 1,..\}$, mentre è dotata di estremo inferiore $\underset{n\in N}{Inf}\; x_n = 3 \in x_n(N) \Leftrightarrow \underset{n\in N}{Inf}\; x_n = \min_{n\in N} x_n$, mentre $\underset{n\in N}{Sup}\, x_n = +\infty$, pertanto non è dotata di massimo.

7. L'equazione della retta passante per i punti del piano $A = (1,1)$ e $B = (-1,-1)$ è:
$\frac{1+1}{x+1} = \frac{1+1}{y+1} \Leftrightarrow \frac{2}{x+1} = \frac{2}{y+1} \Leftrightarrow 2(y+1) = 2(x+1) \Leftrightarrow 2y + 2 = 2x + 2 \Leftrightarrow y = x$, e considerando che una generica retta parallela ha equazione $y = x + c$, per cui la distanza di quest'ultima dal punto $O = (0,0)$ è data da: $d(r,O) = \frac{|1\cdot 0 - 1\cdot 0 + c|}{\sqrt{2}} = 2 \Leftrightarrow |c| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow c = \pm 2\sqrt{2}$, pertanto le rette che hanno distanza dalla bisettrice del primo e terzo quadrante, pari a 2, sono $y = x \pm 2\sqrt{2}$.

8. Data la funzione $h(x) = \frac{x-1}{x+2}$, definita in $R - \{-2\}$, ed essendo il $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x+2} = 1$, un punto di simmetria potrebbe essere: $(-2,1)$, quindi, se vero si ha: $h(-2-x) - 1 = -h(-2+x) + 1$ ovvero $\frac{-2-x-1}{-2-x+2} - 1 = -\frac{-2+x-1}{-2+x+2} + 1 \Leftrightarrow \frac{-3-x}{-x} - 1 = -\frac{-3+x}{x} + 1 \Leftrightarrow \frac{3+x}{x} - 1 = \frac{3-x}{x} + 1$ ovvero, $\frac{3+x-x}{x} = \frac{3-x+x}{x}$ pertanto vera, quindi simmetrica rispetto al punto $(-2,1)$.