CAPITOLO 6-INTEGRAZIONE INDEFINITA

§.6.1. LA NOZIONE DI PRIMITIVA E L'INTEGRALE INDEFINITO.

DEF.6.1.1. Siano: *X* un intervallo di *R* avente interno non vuoto ed *f* una funzione reale definita in *X*.

Si dice che *f* è dotata di primitiva se esistono una funzione reale *F* definita in *X* ed ivi continua ed una parte *Y* di *X* localmente finita in *X* e tale che, per ogni elemento *x* di $X-Y$, risulti: $F'(x)=f(x)$.

Se una tale funzione *F* esiste allora *F* si chiama primitiva di *f*.

Di semplice dimostrazione sono le seguenti tre proposizioni:

6.1.2. Siano: *X* un intervallo di *R* avente interno non vuoto, *f* ed *F* due funzioni reali definite in *X* e *c* un numero reale.

Se *F* è una primitiva di *f* allora anche la funzione $F_c : x \in X \to F(x)+c$ è una primitiva di *f*.

DlM. La funzione F_c è evidentemente continua, inoltre, se *Y* è una parte di *X* localmente finita in *X* e tale che, per ogni elemento *x* di $X-Y$, risulta $F'(x)=f(x)$, se *x* è un elemento di $X-Y$ è $F_c'(x)= =D(F(x)+c)=F'(x)=f(x)$ e ciò dimostra quanto asserito.

6.1.3. Siano: *X* un intervallo di *R* avente interno non vuoto, *f*, *F* e *G* tre funzioni reali definite in *X*.

Se *F* e *G* sono due primitive di *f* allora la funzione $F-G$ è costante.

DIM. Siano Y' ed Y'' due parti di *X* localmente finite in *X* e tali che, per ogni elemento *x* di $X-Y'$, si ha $F'(x)=f(x)$ e, per ogni elemento x di $X-Y''$, si ha $G'(x)=f(x)$ ed osserviamo che è immediato rendersi conto che anche $Y'\cup Y''$ è una parte di *X* localmente finita in *X*.

Ciò premesso è evidente che la funzione $F-G$ è continua e che inoltre, per ogni elemento *x* di $X-(Y'\cup Y'')$, è $D(F(x)-G(x))=F'(x)-G'(x)=0$ e di qui, in virtù della proposizione 5.4.4, consegue quanto asserito.

6.1.4. Siano: *X* un intervallo di *R* avente interno non vuoto, *f* una funzione reale definita in *X*, x_0 un elemento di *X* ed y_0 un numero reale.

Se *f* è dotata di primitiva, allora esiste una sola primitiva *F* di *f* tale che $F(x_0)=y_0$.

DIM. Sia F^* una primitiva di *f* ed osserviamo che la funzione $F : x \in X \to F^*(x)+y_0-F^*(x_0)$ è una primitiva di *f* tale che $F(x_0)=y_0$, se *G* fosse un'altra primitiva di *f* tale che $G(x_0)=y_0$, in virtù della proposizione 6.1.3, $F-G$ è costante ed essendo $(F-G)(x_0)=F(x_0)-G(x_0)=0$, come volevasi, risulta: $F=G$.

D'immediata dimostrazione è anche la seguente altra utile proposizione:

6.1.5. Siano: *X* un intervallo di *R* avente interno non vuoto, *f*, *g*, *F* e *G* quattro funzioni reali definite in *X* ed *a* e *b* due numeri reali.

Se *F* è una primitiva di *f* e se *G* è una primitiva di *g* allora la funzione $aF+bG$ è una primitiva della funzione $af+bg$.

DIM. Siano Y' ed Y'' due parti di *X* localmente finite in *X* e tali che, per ogni elemento *x* di $X-Y'$, si ha $F'(x)=f(x)$ e, per ogni elemento *x* di $X-Y''$, si ha $G'(x)=g(x)$ ed osserviamo che $Y'\cup Y''$ è una parte di *X* localmente finita in *X*.

Ciò premesso osserviamo che la funzione $aF+bG$ è continua e che inoltre, per ogni elemento *x* di

$X-(Y'\cup Y'')$, è $D(aF(x)+bG(x))=aF'(x)+bG'(x)=af(x)+bg(x)$ e ciò dimostra quanto asserito.

Poniamo ora la seguente definizione:

DEF.6.1.6. Siano: *X* un intervallo di *R* avente interno non vuoto ed *f* una funzione reale definita in *X*.
Se *f* è dotata di primitiva allora si chiama integrale indefinito della funzione *f* e si denota col simbolo $\int f(x)dx$, l'insieme costituito da tutte e sole le primitive di *f*.

OSSERVAZIONE.6.1.7. Si osservi che se *X* è un intervallo di *R* avente interno non vuoto ed *f* è una funzione reale definita in *X* e dotata di primitiva, allora l'integrale indefinito di *f* è individuato, in virtù delle proposizioni 6.1.2 e 6.1.3, da un suo elemento, nel senso che se si conosce un elemento *F* dell'integrale indefinito di *f*, allora ogni altro elemento dell'integrale indefinito di *f* si ottiene aggiungendo una opportuna funzione costante ad *F*.

Quanto sopra osservato giustifica la notazione che solitamente si usa scrivendo $\int f(x)dx=F(x)+c$.

Noi in seguito, più semplicemente, scriveremo: $\int f(x)dx=F(x)$.

Quando si usa la notazione sopra introdotta, dalla proposizione 6.1.5, consegue la seguente altra proposizione:

6.1.8. Siano: *X* un intervallo di *R* avente interno non vuoto, *f* e *g* due funzioni reali definite in *X* ed *a* e *b* due numeri reali.
Se *f* e *g* sono dotate di primitiva allora è: $\int(af(x)+bg(x))dx=a\int f(x)dx+b\int g(x)dx$.
In particolare si ha: $\int(f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$, $\int(f(x)-g(x))dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$ e $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$.

Di qualche interesse è la seguente proposizione:

6.1.9. Siano: *X* un intervallo di *R* avente interno non vuoto ed *f* una funzione reale definita in *X* ed ivi continua.
Se *f* è dotata di primitiva ed *F* è una sua primitiva allora risulta $F'(x)=f(x)$ per ogni elemento *x* di *X*.

DIM. Sia *Y* una parte di *X* localmente finita in *X* e tale che, se *x* è un elemento di $X-Y$ risulta $F'(x)=f(x)$.

Ciò premesso se *y* è un elemento di $Y\cap\overset{\circ}{X}$ allora *y* è un punto isolato di *Y* e quindi esiste un intorno I_y di y incluso in $\overset{\circ}{X}$ e tale che risulti $I_y\cap Y=\{y\}$ allora evidentemente è $\lim_{x\to y}F'(x)=\lim_{x\to y}f(x)=f(y)$ il che, in virtù della proposizione 5.4.1, è quanto dire che *F* è derivabile in *y* e risulta $F'(y)=f(y)$, quindi possiamo asserire che $F'(x)=f(x)$ per ogni elemento x intermo ad *X*.
In fine se esiste il $\min X$ (risp. il $\max X$) allora, sempre in virtù della proposizione 5.4.1 è $\lim_{x\to\min X}F'(x)=\lim_{x\to\min X}f(x)=f(\min X)$ (risp. $\lim_{x\to\max X}F'(x)=\lim_{x\to\max X}f(x)=f(\max X)$) e l'asserto resta così completamente dimostrato.

OSSERVAZIONE. 6.1.10. Vedremo in seguito che in virtù della proposizione 7.6.7 potremo asserire che ogni funzione continua definita in un intervallo è dotata di primitiva.

Da quanto affermato nell'osservazione 6.1.10 ed in virtù della proposizione 6.1.9 possiamo asserire che sussiste la seguente altra proposizione:

6.1.11. Siano: X un intervallo di R avente interno non vuoto ed f una funzione reale definita in X. Se f è continua allora f è dotata di primitiva e se F è una sua primitiva risulta $F'(x) = f(x)$ per ogni elemento x di X.

Per comodità del Lettore riportiamo qui di seguito una tabella degli integrali indefiniti di alcune funzioni che ricaveremo dall'elenco delle derivate delle funzioni elementari riportato alle pagine 98 e 99:

1°). Se a è un numero reale è: $\int a dx = ax$.

2°). Se p e un numero reale diverso da -1 é: $\int x^p dx = x^{p+1}/(p+1)$.

3°). $\int (1/x) dx = \log|x|$ (caso di $p=-1$).

4°). Se a è un numero reale positivo diverso da 1 è: $\int a^x dx = a^x / \log a = a^x \log_a e$.

In particolare è: $\int e^x dx = e^x$.

5°). $\int senx dx = -\cos x$ e $\int \cos x dx = senx$.

6°). $\int (1/sen^2 x) dx = -\cot gx$ e $\int (1/\cos^2 x) dx = tgx$.

7°). $\int \left(1/\sqrt{1-x^2}\right) dx = arcsenx$ oppure $\int \left(1/\sqrt{1-x^2}\right) dx = -\arccos x$.

8°). $\int (1/(1+x^2)) dx = arctgx$ oppure $\int (1/(1+x^2)) dx = -arc\cot gx$.

9°). Tenendo presente la proposizione 4.2.3 se X ed Y sono due intervalli di R aventi interno non vuoto, se f è una funzione reale definita in X e se g è una funzione definita in Y ed a valori in X, allora se f è dotata di primitiva e g è derivabile, detta F una primitiva di f, è:

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)).$$

È opportuno mettere in evidenza qui di seguito cinque casi particolari dell'uguaglianza stabilita in 9°) che si riveleranno molto utili per il calcolo degli integrali indefiniti:

9°_1). $\int (g'(x)/g(x)) dx = \log|g(x)|$.

9°_2). $\int (g'(x)/(1+g^2(x))) dx = arctgg(x)$ oppure $\int (g'(x)/(1+g^2(x))) dx = -arc\cot gg(x)$.

Se a e b sono due numeri reali, il primo dei quali diverso da zero, è:

9°_3). $\int e^{ax+b} dx = \int (ae^{ax+b}/a) dx = (1/a) \int e^{ax+b} D(ax+b) dx = e^{ax+b}/a$.

9°_4). $\int sen(ax+b) dx = \int (asen(ax+b)/a) dx = (1/a) \int sen(ax+b) D(ax+b) dx = -\cos(ax+b)/a$.

9°_5). $\int \cos(ax+b) dx = \int (a\cos(ax+b)/a) dx = (1/a) \int \cos(ax+b) D(ax+b) dx = sen(ax+b)/a$.

10°). Ricordando l'uguaglianza 9_1°) è: $\int tgx dx = \int (senx/\cos x)dx = -\int (D\cos x/\cos x)dx = -\log|\cos x|$ e $\int \cot gx dx = \int (\cos x/senx)dx = \int (Dsenx/senx)dx = \log|senx|$.

OSSERVAZIONE. 6.1.12. Si noti che le uguaglianze 7°) dicono che le funzioni arcoseno e l'opposto della funzione arcocoseno sono entrambe primitive della funzione $x \in]-1,1[\to 1/\sqrt{1-x^2}$, conseguentemente_la funzione $x \in [-1,1] \to arcsenx + \arccos x$ è, in virtù della proposizione 6.1.3, costante e quindi, per ogni elemento x di $[-1,1]$, è: $arcsenx + \arccos x = arcsen 0 + \arccos 0 = \pi/2$.

Tenendo presenti le uguaglianze 8°) il Lettore faccia vedere che, per ogni elemento x di R, si ha: $arctgx + arc\cot gx = \pi/2$.

ESERCIZI.6.1.13.

1°). Data la funzione $f : x \in]0,+\infty[\to 1/\sqrt[7]{x^2} + 3x^4 - 1/(1+x^2) + \cos \pi x$ trovare la primitiva F di f tale che $F(1) = \sqrt{2}$.

Essendo: $\int \left(\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}} + 3x^4 - \frac{1}{1+x^2} + \cos \pi x \right) dx = \int x^{-2/7} dx + 3\int x^4 dx - \int 1/(1+x^2)dx + \frac{1}{\pi}\int \cos \pi x D\pi x dx =$ $= 7\sqrt[7]{x^5}/5 + 3x^5/5 - arctgx + sen\pi x/\pi$ la primitiva F richiesta sarà:

$$F : x \in]0,+\infty[\to 7\sqrt[7]{x^5}/5 + 3x^5/5 - arctgx + sen\pi x/\pi + c$$

c essendo un numero reale tale che risulti: $F(1) = 7/5 + 3/5 - arctg1 + sen\pi/\pi + c = \sqrt{2} \Leftrightarrow c = \sqrt{2} - 2 + \pi/4$ e quindi è:

$$F : x \in]0,+\infty[\to 7\sqrt[7]{x^5}/5 + 3x^5/5 - arctgx + sen\pi x/\pi + \sqrt{2} - 2 + \pi/4 .$$

2°). Data la funzione $f : x \in [0,1[\to x\sqrt[4]{x} + 1/\sqrt{1-x^2} + sen(2x+\pi)$_trovare la primitiva F di f tale che $F(0) = 1$.

Al Lettore il compito di far vedere che è $F : x \in [0,1[\to 4\sqrt[4]{x^9}/9 + arcsenx - \cos(2x+\pi)/2 + 1/2$.

§.6.2. INTEGRAZIONE INDEFINITA DELLE FUNZIONI RAZIONALI. Cominceremo col calcolare gli integrali indefiniti di alcune particolari funzioni razionali:

α). Siano: n un numero intero maggiore o uguale a zero ed $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ $n+1$ numeri reali con a_0 diverso da zero.

Calcolare $\int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n) dx$.

Essendo: $\int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n) dx = a_0 \int x^n dx + a_1 \int x^{n-1} dx + ... + a_n \int dx$ è:

$$\int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n) dx = a_0\, x^{n+1}/(n+1) + a_1\, x^n/n + ... + a_n x .$$

1°). Al Lettore il compito di far vedere che si ha: $\int (2x^5 + 5x^4 - 2x + 1)dx = x^6/3 + x^5 - x^2 + x$, $\int (x^3 + x^2 - 3)dx = x^4/4 + x^3/3 - 3x$ e $\int (3x^7 - 5x^6 + 3x^4 - 2x^2)dx = 3x^8/8 - 5x^7/7 + 3x^5/5 - 2x^3/3$.

β). Siano: a un numero reale diverso da zero e b un numero reale.

Calcolare $\int (1/(ax+b))dx$.

Essendo: $1/(ax+b)=(1/a)(a/(ax+b))=(1/a)(D(ax+b))/(ax+b)$, in virtù dell'uguaglianza 9_1°) è:

$$\int (1/(ax+b))dx=(1/a)\int (D(ax+b))/(ax+b)=(1/a)\log|ax+b|.$$

2°). Al Lettore il compito di far vedere che risulta: $\int (3/(-7x+4))dx=(-3/7)\log|-7x+4|$, $\int (1/(3x+2))dx=(1/3)\log|3x+2|$ e $\int (1/(5x-2))dx=(1/5)\log|5x-2|$.

γ). Siano: a, b, c, h e k cinque numeri reali tali che risulti $b^2-4ac<0$ e tali inoltre che h e k non siano contemporaneamente nulli.

Calcolare $\int ((hx+k)/(ax^2+bx+c))dx$.

Per non appesantire la trattazione cercheremo di renderci conto di come si calcolano tali integrali illustrando il metodo con un esempio:

ESEMPIO: Calcolare $\int ((2x+3)/(9x^2-6x+5))dx$.

Calcoleremo questo integrale sfruttando le uguaglianze 9_1°) e 9_2°), scriveremo quindi la funzione integranda come somma di due funzioni tali che alla prima sarà possibile applicare la 9_1°) ed alla seconda la 9_2°), a questo scopo cominciamo con l'osservare che è:

$$(*)\qquad (2x+3)/(9x^2-6x+5)=2x/(9x^2-6x+5)+3/(9x^2-6x+5) \text{ e } D(9x^2-6x+5)=18x-6$$

ed essendo: $2x/(9x^2-6x+5)=(1/9)((18x-6)/(9x^2-6x+5))+(2/3)(1/(9x^2-6x+5))$, dalle $(*)$ consegue che è:

$$\binom{*}{*}\qquad (2x+3)/(9x^2-6x+5)=(1/9)(D(9x^2-6x+5)/(9x^2-6x+5))+(11/3)(1/(9x^2-6x+5))$$

e ricordando l'uguaglianza riportata in 0.5.6 è: $9x^2-6x+5=9\left(\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{4}{9}\right)=4\left(((3x-1)/3)^2\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+1\right)=$ $=4(((3x-1)/2)^2+1)$ ed essendo $D(3x-1)/2=3/2$ si ha

$$1/(9x^2-6x+5)=(1/4)/(((3x-1)/2)^2+1)=(1/6)D((3x-1)/2)/(((3x-1)/2)^2+1)$$

e di qui dalla $\binom{*}{*}$ consegue che è:

$$(2x+3)/(9x^2-6x+5)=(1/9)D(9x^2-6x+5)/(9x^2-6x+5)+(11/18)D((3x-1)/2)/(((3x-1)/2)^2+1)$$

e quindi si ha:

$$\int ((2x+3)/(9x^2-6x+5))dx=(1/9)\int (D(9x^2-6x+5)/(9x^2-6x+5))dx+$$
$$+(11/18)\int (D((3x-1)/2)/(((3x-1)/2)^2+1))dx$$

e pertanto è:

$$\int((2x+3)/(9x^2-6x+5))dx=(1/9)\log|9x^2-6x+5|+(11/18)arctg((3x-1)/2).$$

3°). Al Lettore il compito di far vedere che è:

$$\int(3x/(x^2+x+1))dx=(3/2)\log|x^2+x+1|-\sqrt{3}arctg((2x+1)/\sqrt{3}),$$
$$\int((3x-1)/(2x^2+5))dx=(3/4)\log|2x^2+5|-(1/\sqrt{10})arctg(\sqrt{2}x/\sqrt{5}),$$
$$\int((2x+5)/(9x^2-12x+5))dx=(1/9)\log|9x^2-12x+5|+(19/9)arctg(3x-2),$$
$$\int((3x-2)/(4x^2-4x+5))dx=(3/8)\log|4x^2-4x+5|-(1/8)arctg((2x-1)/2).$$

Considerata l'importanza che hanno gli integrali indefiniti delle funzioni considerate in α), β) e γ) conviene porre la seguente definizione:

DEF.6.2.1. Ogni funzione del tipo considerato in α), β) o γ) si chiama <u>funzione razionale elementare</u>.

Si potrebbe far vedere che il saper calcolare gli integrali indefiniti delle funzioni razionali elementari è sufficiente per calcolare l'integrale indefinito di ogni altra funzione razionale.

Noi qui di seguito però ci limiteremo a considerare integrali indefiniti di funzioni razionali nella ipotesi che <u>nella decomposizione in polinomi primi</u> (si veda la proposizione 0.5.8) <u>del polinomio che è al denominatore della funzione razionale ogni fattore figuri elevato alla potenza uno</u>.

Ferma restando l'ipotesi sopra specificata, per il calcolo degli integrali indefiniti di tali funzioni razionali distingueremo due casi: **PRIMO CASO** <u>Il polinomio che è al denominatore della funzione razionale è di grado maggiore del grado del polinomio che è al numeratore della funzione razionale</u>, **SECONDO CASO** <u>Il polinomio che è al denominatore della funzione razionale è di grado minore o uguale del grado, del polinomio che è al numeratore della funzione razionale</u>.

δ). Integrali indefiniti di funzioni razionali del tipo individuate dal **PRIMO CASO**.

Anche in questa circostanza per non appesantire la trattazione cercheremo di renderci conto di come si calcolano tali integrali illustrando il metodo con alcuni esempi:

ESEMPIO. 1. Calcolare $\int((x+1)/(x^2+4x-5))dx$.

Calcoleremo questo integrale scrivendo la funzione integranda come somma di due funzioni razionali di tipo β), a questo scopo cominciamo con l'osservare che essendo: $x^2+4x-5=0 \Leftrightarrow (x=-5 \text{ o } x=1)$ è $x^2+4x-5=(x+5)(x-1)$ e pertanto se si pone:

$$(x+1)/(x^2+4x-5)=A/(x+5)+B/(x-1)=$$
$$=(A(x-1)+B(x+5))/(x^2+4x-5)=((A+B)x-(A-5B))/(x^2+4x-5)$$

per ogni numero reale x deve essere: $x+1=(A+B)x-(A-5B)$ e di qui, in virtù della proposizione 0.5.2, consegue che deve essere: $\begin{cases} A+B=1 \\ -A+5B=1 \end{cases}$, risolvendo tale sistema risulta: $A=2/3$ e $B=1/3$ e pertanto è:

$$(x+1)/(x^2+4x-5)=(2/3)(1/(x+5))+(1/3)(1/(x-1))$$

e quindi si ha:

$$\int\left((x+1)/\left(x^2+4x-5\right)\right)dx=(2/3)\int(1/(x+5))dx+(1/3)\int(1/(x-1))dx=(2/3)\log|x+5|+(1/3)\log|x-1|.$$

ESEMPIO.2. Calcolare $\int\left(\left(-x^2+x+2\right)/x\left(x^2+1\right)\right)dx$.

Calcoleremo questo integrale scrivendo la funzione integranda come somma di due funzioni razionali, la prima di tipo β) e la seconda di tipo γ), a questo scopo poniamo:

$$\left(-x^2+x+2\right)/x\left(x^2+1\right)=A/x+(Bx+C)/\left(x^2+1\right)=\left(A\left(x^2+1\right)+Bx^2+Cx\right)/x\left(x^2+1\right)=$$
$$=\left((A+B)x^2+Cx+A\right)/x\left(x^2+1\right)$$

quindi per ogni numero reale x deve essere: $-x^2+x+2=(A+B)x^2+Cx+A$ e di qui, in virtù della proposizione 0.5.2, consegue che deve essere: $\begin{cases}A+B=-1\\ C=1,\ A=2\end{cases}$, risolvendo tale sistema risulta: $A=2$, $B=-3$ e $C=1$ e pertanto è:

$$\left(-x^2+x+2\right)/x\left(x^2+1\right)=2/x+(-3x+1)/\left(x^2+1\right)$$

e quindi si ha:

$$\int\left(\left(-x^2+x+2\right)/x\left(x^2+1\right)\right)dx=2\int(1/x)dx+\int(-3x+1)/\left(x^2+1\right)dx$$

ed essendo: $\int(1/x)dx=\log|x|$ e $\int(-3x+1)/\left(x^2+1\right)dx=(-3/2)\int\left(2x/\left(x^2+1\right)\right)dx+\int\left(1/\left(x^2+1\right)\right)dx=(-3/2)$ $\log\left|x^2+1\right|+arctgx$ è:

$$\int\left(\left(-x^2+x+2\right)/x\left(x^2+1\right)\right)dx=2\log|x|-(3/2)\log\left|x^2+1\right|+arctgx.$$

ESEMPIO.3. Calcolare $\int\left(\left(-2x^3+3x^2+x\right)/(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)\right)dx$.

Calcoleremo questo integrale scrivendo la funzione integranda come somma di tre funzioni razionali, la prima di tipo β) e le altre due di tipo γ), a questo scopo poniamo:

$$\left(-2x^3+3x^2+x\right)/(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)=A/(x+1)+(Bx+C)/\left(x^2+1\right)+(Dx+E)/\left(x^2+2\right).$$

Con facili calcoli e ripetendo un ragionamento analogo a quello fatto nei due esempi precedenti si ha che deve essere:

$$\begin{cases}A+B+D=0\\ B+C+D+E=-2\\ 3A+2B+C+D+E=3\\ 2B+2C+D+E=1\\ 2A+2C+E=0\end{cases}$$

risolvendo tale sistema risulta: $A=2/3$, $B=3$, $C=0$, $D=-11/3$ ed $E=-4/3$ e pertanto è:

$$\left(-2x^3+3x^2+x\right)/(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)=2/3(x+1)+3x/\left(x^2+1\right)+(-11x-4)/3\left(x^2+2\right)$$

e quindi facilmente si ha che:

$$\int \left(\left(-2x^3+3x^2+x\right)/(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)\right)dx = \int \left(2/3(x+1)\right)dx + \int \left(3x/\left(x^2+1\right)\right)dx - \int \left((11x+4)/3\left(x^2+2\right)\right)dx =$$
$$= (2/3)\log|x+1| + (3/2)\log\left|x^2+1\right| - (11/6)\log\left|x^2+2\right| - \left(2\sqrt{2}/3\right)arctg\left(x/\sqrt{2}\right).$$

Se r è una funzione razionale del tipo individuata dal **PRIMO CASO** e se n è il numero dei fattori di grado positivo che figurano nella decomposizione in polinomi primi del denominatore di r a questo punto-dovrebbe essere chiaro che esistono, univocamente determinate, n funzioni razionali elementari tali che r sia la somma di tali funzioni ed ognuna di queste funzioni ha il denominatore proporzionale ad uno ed uno soltanto dei fattori di grado positivo che figurano nella decomposizione in polinomi primi del denominatore di r.

La determinazione delle n funzioni razionali elementari sopra citate si effettua con un metodo che è la ovvia generalizzazione del metodo usato nei tre esempi sopra riportati.

4°). Al Lettore il compito di far vedere che è: $\int \left(\left(x^4-2x^3+4x^2-4x+2\right)/x\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)\right)dx =$ $= \log|x| - 2arctgx + (1/2)\log\left|x^2+1\right| - (1/2)\log\left|x^2+2\right|$.

5°). Osservando che è: $x^4-1=\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)=\left(x^2+1\right)(x+1)(x-1)$ al Lettore il compito di far vedere che risulta: $\int \left((2x+3)/\left(x^4-1\right)\right)dx = -(1/2)\log\left|x^2+1\right| - (3/2)arctgx - (1/4)\log|x+1| + (5/4)\log|x-1|$.

6°). Ricordando che è: $x^3+1=(x+1)\left(x^2-x+1\right)$ al Lettore il compito di far vedere che è: $\int \left(\left(x^2+1\right)/\left(x^3+1\right)\right)dx = (2/3)\log|x+1| + (1/6)\log\left|x^2-x+1\right| + \left(\sqrt{3}/3\right)arctg\left((2x-1)/\sqrt{3}\right)$.

7°). Ricordando che è: $x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$ al Lettore il compito di far vedere che è: $\int \left((x-4)/\left(x^3-1\right)\right)dx = -\log|x-1| + (1/2)\log\left|x^2+x+1\right| + \left(5\sqrt{3}/3\right)arctg\left((2x+1)/\sqrt{3}\right)$.

ε). Integrali indefiniti di funzioni razionali del tipo individuate dal **SECONDO CASO**.

Siano: m ed n due numeri interi positivi, p un polinomio di grado m e q un polinomio di grado n e supponiamo che sia $m \geq n$. Calcolare $\int \left(p(x)/q(x)\right)dx$.

Osserviamo che se si effettua la divisione di p per q (si vedano gli esercizi 0.7.5 e 0.7.6) allora si ottiene un quoziente q_1 che è un polinomio di grado $m-n$ ed un resto r che, se non identicamente nullo, è un polinomio di grado minore di n, conseguentemente, per ogni elemento x di $R-\{x\in R, q(x)=0\}$ è $p(x)/q(x) = q_1(x) + r(x)/q(x)$ e quindi possiamo affermare che la funzione p/q è la somma di un polinomio q_1 e di una funzione razionale r/q che è del tipo individuata dal **PRIMO CASO** e conseguentemente, essendo: $\int \left(p(x)/q(x)\right)dx = \int q_1(x)dx + \int \left(r(x)/q(x)\right)dx$ siamo in grado di calcolare l'integrale indefinito di ogni funzione razionale individuata dal **SECONDO CASO**.

Illustriamo quanto sopra detto con un esempio:

ESEMPIO. Calcolare $\int \left(\left(10x^5+2x^4+15x^3+3x^2+2x-1\right)/x\left(2x^2+3\right)\right)dx$.

È facile rendersi conto che e si ha : $\left(10x^5+2x^4+15x^3+3x^2+2x-1\right)/x\left(2x^2+3\right) = 5x^2+x+(2x-1)/x$ $\left(2x^2+3\right)$ e pertanto è: $\int \left(\left(10x^5+2x^4+15x^3+3x^2+2x-1\right)/x\left(2x^2+3\right)\right)dx = \int \left(5x^2+x\right)dx + \int \left((2x-1)/x\right.$

$\left(2x^2+3\right)\right)dx = 5x^3/3 + x^2/2 + \int\left(\left(2x-1\right)/x\left(2x^2+3\right)\right)dx$ e per il calcolo dell'integrale indefinito che figura al secondo membro dell'ultima uguaglianza si vede facilmente che ponendo: $\left(2x-1\right)/x\left(2x^2+3\right) = A/x + \left(Bx+C\right)/\left(2x^2+3\right) = \left(\left(2A+B\right)x^2 + Cx + 3A\right)/x\left(2x^2+3\right)$, deve essere: $A=-1/3$, $B=2/3$ e $C=2$ e conseguentemente è: $\int\left(\left(2x-1\right)/x\left(2x^2+3\right)\right)dx = \left(-1/3\right)\log|x| + \left(1/6\right)\log\left|2x^2+3\right| + \left(\sqrt{2}/\sqrt{3}\right)arctg\left(\sqrt{2}x/\sqrt{3}\right)$ e quindi si ha: $\int\left(\left(10x^5+2x^4+15x^3+3x^2+2x-1\right)/x\left(2x^2+3\right)\right)dx = 5x^3/3 + x^2/2 - \left(1/3\right)\log|x| + \left(1/6\right)\log\left|2x^2+3\right| + \left(\sqrt{2}/\sqrt{3}\right)arctg\left(\sqrt{2}x/\sqrt{3}\right)$.

8°). Al Lettore il compito di verificare che è:

$$\int\left(\left(5x^3+7x^2+4x+3\right)/\left(5x^2+2x+2\right)\right)dx = x^2/2 + x + \left(1/3\right)arctg\left(\left(5x+1\right)/3\right),$$
$$\int\left(\left(3x^5+10x^3+2x-1\right)/x\left(x^2+3\right)\right)dx = x^3 + x - \left(1/3\right)\log|x| + \left(1/6\right)\log\left|x^2+3\right| - \left(\sqrt{3}/3\right)arctg\left(x/\sqrt{3}\right).$$

§.6.3. INTEGRAZIONE INDEFINITA PER PARTI. È possibile dimostrare la seguente proposizione:

6.3.1. Siano: X un intervallo di R avente interno non vuoto ed f e g due funzioni reali definite in X ed ivi derivabili.
Se esiste una parte Y di X localmente finita in X tale che, le funzioni f' e g' sono continue in $X-Y$ e limitate in ogni intervallo chiuso e limitato incluso in X, allora le funzioni $f'g$ ed fg' sono dotate di primitiva e risulta: $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$.

Noi ora qui di seguito useremo l'uguaglianza garantita dalla proposizione 6.3.1 per calcolare gli integrali indefiniti di alcune funzioni.
Quando per calcolare un integrale indefinito si usa l'uguaglianza garantita dalla proposizione 6.3.1, allora si dice che si integra per parti.

ESEMPI.6.3.2.

1°). Calcolare $\int \log x dx$.

Per questo poniamo: $f'(x)=1$ e $g(x)=\log x$ e conseguentemente è: $f(x)=x$ e $g'(x)=1/x$ e quindi si ha:

$$\int \log x dx = x\log x - \int (x/x)dx = x\log x - \int dx = x\log x - x.$$

2°). Calcolare $\int\left(x^2+1\right)\log\left(2x+3\right)dx$.

Per questo poniamo: $f'(x)=x^2+1$ e $g(x)=\log\left(2x+3\right)$ e conseguentemente è: $f(x)=x^3/3+x$ e $g'(x)=2/\left(2x+3\right)$ e quindi si ha:

$$\int\left(x^2+1\right)\log\left(2x+3\right)dx = \left(x^3/3+x\right)\log\left(2x+3\right) - \left(2/3\right)\int\left(\left(x^3+3x\right)/\left(2x+3\right)\right)dx$$

per il calcolo dell'integrale indefinito che figura al secondo membro della precedente uguaglianza si vede facilmente che effettuando la divisione si ha: $\left(x^3+3x\right)/\left(2x+3\right) = x^2/2 - 3x/4 + 21/8 - \left(63/8\right)/\left(2x+3\right)$ e quindi è:

$$\int (x^2+1)\log(2x+3)dx = (x^3/3+x)\log(2x+3) - (2/3)(x^3/6 - 3x^2/8 + 21x/8 - (63/16)\log(2x+3)).$$

3°). Ricordando che ogni primitiva di un polinomio è un polinomio e che la derivata di un polinomio è un polinomio, se p e q sono due polinomi, l'integrazione indefinita per parti è utile per il calcolo di $\int p(x)\log q(x)dx$, infatti ponendo $f'(x)=p(x)$ e $g(x)=\log q(x)$, se P è una primitiva di p, è: $f(x)=P(x)$ e $g'(x)=q'(x)/q(x)$ e quindi è:

$$\int p(x)\log q(x)dx = P(x)\log q(x) - \int (P(x)q'(x)/q(x))dx$$

e l'integrale indefinito che figura al secondo membro della precedente uguaglianza è l'integrale indefinito di una funzione razionale.

Al Lettore il compito di far vedere che è:

$$\int (3x^2+2x)\log(x-1)dx = (x^3+x^2)\log(x-1) - (x^3/3 + x^2 + 2x + 2\log(x-1)),$$
$$\int (4x^3+3x^2)\log(5x-1)dx = (x^4+x^3)\log(5x-1) - (x^4/4 + 2x^3/5 + 3x^2/25 + 6x/125 + (6/625)\log(5x-1))$$
$$\int (x^2-1)\log(x^2+1)dx = (x^3/3 - x)\log(x^2+1) - (2/3)(x^3/3 - 4x + 4arctgx)$$
$$\int (5x^4+3x^2)\log(x^2+1)dx = (x^5+x^3)\log(x^2+1) - 2x^5/5.$$

4°). Calcolare $\int arctgxdx$ e $\int arc\cot gxdx$.

Per calcolare il primo degli integrali indefiniti proposti poniamo: $f'(x)=1$ e $g(x)=arctgx$ e conseguentemente è: $f(x)=x$ e $g'(x)=1/(x^2+1)$ e quindi è:

$$\int arctgxdx = xarctgx - \int (x/(x^2+1))dx = xarctgx - (1/2)\log(x^2+1).$$

Al Lettore il compito di far vedere che è:

$$\int arc\cot gxdx = xarc\cot gxdx + (1/2)\log(x^2+1).$$

5). Calcolare $\int (3x^2+1)arctg(x+1)dx$ e $\int (4x^3-1)arc\cot g(x-1)dx$.

Calcoliamo il secondo degli integrali indefiniti proposti, per questo poniamo: $f'(x)=4x^3-1$ e $g(x)=arc\cot g(x-1)$ e conseguentemente è: $f(x)=x^4-x$ e $g'(x)=-1/((x-1)^2+1)$ e pertanto si ha:

$$\int (4x^3-1)arc\cot g(x-1)dx = (x^4-x)arc\cot g(x-1) + \int ((x^4-x)/((x-1)^2+1))dx$$

per il calcolo dell'integrale indefinito che figura al secondo membro della precedente uguaglianza si vede facilmente che effettuando la divisione si ha: $(x^4-x)/((x-1)^2+1) = x^2+2x+2-(x+4)/((x-1)^2+1)$ e quindi è:

$$\int (4x^3-1)arc\cot g(x-1)dx = (x^4-x)arc\cot g(x-1) + x^3/3 + x^2 + 2x - 1/2\log\left|(x-1)^2+1\right| + 5arc\cot g(x-1).$$

Al Lettore il compito di far vedere che è:

$$\int (3x^2+1)arctg(x+1)dx = (x^3+x)arctg(x+1) - x^2/2 + 2x - (3/2)\log\left|(x+1)^2+1\right| - arctg(x+1).$$

6°). Calcolare $\int x^2 arctg(1/x)dx$ e $\int (5x^4+1)arc\cot g(1/x)dx$.

Calcoliamo il secondo degli integrali indefiniti proposti, per questo poniamo: $f'(x)=5x^4+1$ e $g(x)=arc\cot g(1/x)$ e conseguentemente è: $f(x)=x^5+x$ e $g'(x)=\left(-1/\left((1/x)^2+1\right)\right)\left(-1/x^2\right)$ e pertanto si ha:

$$\int (5x^4+1)arc\cot g(1/x)dx=(x^5+x)arc\cot g(1/x)-\int \left((x^5+x)/(x^2+1)\right)dx$$

per il calcolo dell'integrale indefinito che figura al secondo membro della precedente uguaglianza si vede facilmente che effettuando la divisione si ha: $(x^5+x)/(x^2+1)=x^3-x+2x/(x^2+1)$ e quindi è:

$$\int (5x^4+1)arc\cot g(1/x)dx=(x^5+x)arc\cot g(1/x)-x^4/4+x^2/2-\log\left|x^2+1\right|.$$

Al Lettore il compito di far vedere che è:

$$\int x^2 arctg(1/x)dx=(x^3/3)arctg(1/x)+x^2/6-(1/6)\log\left|x^2+1\right|.$$

7°). Ricordando che ogni primitiva di un polinomio è un polinomio e che la derivata di una funzione razionale è ancora una funzione razionale, se *p*, *q* ed *r* sono tre polinomi, l'integrazione indefinita per parti è utile per il calcolo di $\int p(x)arctg(r(x)/q(x))dx$ e di $\int p(x)arc\cot g(r(x)/q(x))dx$, infatti ponendo $f'(x)=p(x)$ e $g(x)=arctg(r(x)/q(x))$, se *P* è una primitiva di *p*, è: $f(x)=P(x)$ e $g'(x)=(r'(x)q(x)-$ $-r(x)q'(x))/(q^2(x)+r^2(x))$ e quindi si ha:

$$\int p(x)arctg(r(x)/q(x))dx=P(x)arctg(r(x)/q(x))-\int \left(P(x)(r'(x)q(x)-r(x)q'(x))/(q^2(x)+r^2(x))\right)dx$$

e l'integrale indefinito che figura al secondo membro della precedente uguaglianza è l'integrale indefinito di una funzione razionale.

Al Lettore il compito di far vedere che è:

$$\int p(x)arc\cot g(r(x)/q(x))dx=P(x)arc\cot g(r(x)/q(x))+\int \left(P(x)(r'(x)q(x)-r(x)q'(x))/(q^2(x)+r^2(x))\right)dx$$

8°). Calcolare $\int xe^x dx$.

Per questo poniamo: $f'(x)=e^x$ e $g(x)=x$ e conseguentemente è $f(x)=e^x$ e $g'(x)=1$ e quindi si ha:

$$\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x.$$

9°). Calcolare $\int x^2e^{3x+2}dx$.

Per questo poniamo: $f'(x)=e^{3x+2}$ e $g(x)=x^2$ e conseguentemente è $f(x)=e^{3x+2}/3$ e $g'(x)=2x$ e quindi si ha:

$$\int x^2e^{3x+2}dx=x^2\,e^{3x+2}/3-(2/3)\int xe^{3x+2}dx$$

per il calcolo dell'integrale indefinito che figura al secondo membro della precedente uguaglianza si pone

$f'(x)=e^{3x+2}$ e $g(x)=x$ e conseguentemente è $f(x)=e^{3x+2}/3$ e $g'(x)=1$ e quindi si ha:

$$\int xe^{3x+2}dx = xe^{3x+2}/3-(1/3)\int e^{3x+2}dx = xe^{3x+2}/3-e^{3x+2}/9$$

e pertanto risulta:

$$\int x^2e^{3x+2}dx = x^2\, e^{3x+2}/3-2xe^{3x+2}/9+2e^{3x+2}/27\,.$$

10°). Se p è un polinomio, a un numero reale diverso da zero e b un numero reale calcolare $\int p(x)e^{ax+b}dx$.

Per questo poniamo: $f'(x)=e^{ax+b}$ e $g(x)=p(x)$ e conseguentemente è $f(x)=e^{ax+b}/a$ e $g'(x)=$ $=p'(x)$ e quindi è:

$$\int p(x)e^{ax+b}dx = p(x)e^{ax+b}/a-(1/a)\int p'(x)e^{ax+b}dx$$

e l'integrale indefinito che figura al secondo membro della precedente uguaglianza è un integrale indefinito dello stesso tipo di quello proposto ed ha il polinomio che moltiplica e^{ax+b} di grado pari ad una unità inferiore al grado di p, pertanto applicando la formula dell'integrazione indefinita per parti tante volte quanto è il grado di p si perviene all'integrale indefinito di e^{ax+b} che è immediatamente calcolabile.

Come esempi il Lettore può rivedere gli esempi 8°) e 9°) sopra riportati, qui di seguito comunque faremo un ulteriore esempio:

Calcolare $\int (x^3-3x+2)e^{-x+1}dx$.

Evidentemente è: $\int (x^3-3x+2)e^{-x+1}dx = -(x^3-3x+2)e^{-x+1}+3\int (x^2-1)e^{-x+1}dx = -(x^3-3x+2)e^{-x+1}-$ $-3(x^2-1)e^{-x+1}+6\int xe^{-x+1}dx = -(x^3-3x+2)e^{-x+1}-3(x^2-1)e^{-x+1}+6\left(-xe^{-x+1}+\int e^{-x+1}dx\right) = -(x^3-3x+2)e^{-x+1}-$ $-3(x^2-1)e^{-x+1}-6xe^{-x+1}-6e^{-x+1}$ e quindi si ha:

$$\int (x^3-3x+2)e^{-x+1}dx = -(x^3+3x^2+3x+5)e^{-x+1}\,.$$

11°). Al Lettore il compito di far vedere che è:

$\int (-2x^3+x^2+2x)e^{-2x+3}dx = (x^3+x^2)e^{-2x+3}$,
$\int (3x^4+4x^3-3)e^{3x}dx = (x^4-1)e^{3x}$,
$\int (4x^3-8x^2-5)e^{2x}dx = (2x^3-7x^2+7x-6)e^{2x}$,
$\int (x^5+x^4)e^{5x-1}dx = (1/5)x^5e^{5x-1}$.

12°). Calcolare $\int xsenx dx$ e $\int x\cos x dx$

Per calcolare il primo integrale indefinito proposto poniamo: $f'(x)=senx$ e $g(x)=x$ e conseguentemente è $f(x)=-\cos x$ e $g'(x)=1$ e quindi si ha:

$$\int x sen x dx = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + sen x\,.$$

Al Lettore il compito di far vedere che è:

$$\int x\cos x dx = x sen x + \cos x$$

13°). Calcolare $\int x^2 sen(2x-1)dx$ e $\int (x^2+x)\cos(-2x+3)dx$.

Calcoliamo il secondo degli integrali indefiniti proposti, per questo poniamo: $f'(x)=\cos(-2x+3)$ e $g(x)=x^2+x$ e conseguentemente è: $f(x)=(-1/2)sen(-2x+3)$ e $g'(x)=2x+1$ e pertanto si ha:

$$\int (x^2+x)\cos(-2x+3)dx = (-1/2)(x^2+x)sen(-2x+3)+(1/2)\int((2x+1)sen(-2x+3))dx\,,$$

per calcolare l'integrale indefinito che figura al secondo membro della precedente uguaglianza poniamo: $f'(x)=sen(-2x+3)$ e $g(x)=2x+1$ e conseguentemente è: $f(x)=(1/2)\cos(-2x+3)$ e $g'(x)=2$ e quindi si ha:

$$\int((2x+1)sen(-2x+3))dx = (1/2)(2x+1)\cos(-2x+3)-\int\cos(-2x+3)dx =$$
$$= (1/2)(2x+1)\cos(-2x+3)+(1/2)sen(-2x+3)$$

e pertanto risulta:

$$\int (x^2+x)\cos(-2x+3)dx = (-1/2)(x^2+x)sen(-2x+3)+(1/4)(2x+1)\cos(-2x+3)+(1/4)sen(-2x+3)$$

Al Lettore il compito di far vedere che è:

$$\int x^2 sen(2x-1)dx = (-1/2)x^2\cos(2x-1)+(1/2)x sen(2x-1)+(1/4)\cos(2x-1)\,.$$

14°). Se *p* è un polinomio, se *a* è un numero reale diverso da zero e se *b* è un numero reale si calcolino i seguenti integrali: $\int p(x)sen(ax+b)dx$ e $\int p(x)\cos(ax+b)dx$.

Calcoliamo il primo integrale indefinito proposto, per questo poniamo: $f'(x)=sen(ax+b)$ e $g(x)=p(x)$ e conseguentemente è: $f(x)=(-1/a)\cos(ax+b)$ e $g'(x)=p'(x)$ e pertanto è:

$$\int p(x)sen(ax+b)dx = (-1/a)p(x)\cos(ax+b)+(1/a)\int p'(x)\cos(ax+b)dx\,.$$

Al Lettore il compito di far vedere che è:

$$\int p(x)\cos(ax+b)dx = (1/a)p(x)sen(ax+b)-(1/a)\int p'(x)sen(ax+b)dx\,.$$

Anche in questo caso così come nell'esempio 10°) applicando la formula dell'integrazione indefinita per parti tante volte quanto è il grado di *p* si perviene all'integrale indefinito di $sen(ax+b)$ o $\cos(ax+b)$ che è immediatamente calcolabile.

Come esempi il Lettore può rivedere gli esempi 12°) e 13°) sopra riportati, qui di seguito comunque faremo un ulteriore esempio:

Calcolare $\int\left(x^3+x^2\right)\cos(3x+5)dx$.

Risulta: $\int\left(x^3+x^2\right)\cos(3x+5)dx=(1/3)\left(x^3+x^2\right)sen(3x+5)-(1/3)\int\left(3x^2+2x\right)sen(3x+5)dx=(1/3)\left(x^3+\right.$ $\left.+x^2\right)sen(3x+5)-(1/3)\left(-(1/3)\left(3x^2+2x\right)\cos(3x+5)+(2/3)\int(3x+1)\cos(3x+5)dx\right)=(1/3)\left(x^3+x^2\right)sen(3x+5)+$ $+(1/9)\left(3x^2+2x\right)\cos(3x+5)-(2/9)\left((1/3)(3x+1)sen(3x+5)-\int sen(3x+5)dx\right)$ e quindi possiamo asserire che è:

$$\int\left(x^3+x^2\right)\cos(3x+5)dx=(1/27)\left(9x^3+9x^2-6x-2\right)sen(3x+5)+(1/27)\left(9x^2+6x-2\right)\cos(3x+5).$$

15°). Al Lettore il compito di far vedere che si ha:

$$\int\left(x^2-x\right)sen(5x+2)dx=(1/125)\left(-25x^2+25x+2\right)\cos(5x+2)+(1/25)(2x-1)sen(5x+2),$$
$$\int\left(2x^2-1\right)\cos(x+2)dx=\left(2x^2-5\right)sen(x+2)+4x\cos(x+2).$$

16°). Calcolare $\int arcsenxdx$ e $\int \arccos xdx$.

Per calcolare il primo integrale indefinito proposto poniamo: $f'(x)=1$ e $g(x)=arcsenx$ e conseguentemente è: $f(x)=x$ e $g'(x)=1/\sqrt{1-x^2}$ e pertanto risulta:

$$\int arcsenxdx=xarcsenx-\int\left(x/\sqrt{1-x^2}\right)dx,$$

osserviamo ora che è: $\int\left(x/\sqrt{1-x^2}\right)dx=(-1/2)\int\left(-2x/\sqrt{1-x^2}\right)dx=(-1/2)\int\left(1-x^2\right)^{-1/2}D\left(1-x^2\right)dx=-\sqrt{1-x^2}$ e quindi è:

$$\int arcsenxdx=xarcsenx+\sqrt{1-x^2}\ .$$

Al Lettore il compito di far vedere che è: $\int \arccos xdx=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$.

§.6.4. INTEGRAZIONE INDEFINITA PER SOSTITUZIONE. E' possibile dimostrare la seguente proposizione:

6.4.1. Siano: *X* ed *Y* due intervalli di *R* aventi interno non vuoto, *f* una funzione reale definita in *X*, *g* una funzione reale definita in *Y* ivi strettamente monotona ed a valori su *X*.
Se esiste una parte *D* di *Y*, localmente finita in *Y* tale che risulti $g'(y)\neq 0$ per ogni elemento *y* di $Y-D$ e se esiste una primitiva *F* della funzione $(f\circ g)g'$ allora la funzione $F\circ g^{-1}$ è una primitiva di *f*.

Quando la ricerca di una primitiva di una funzione *f* si effettua col metodo descritto dall'enunciato della proposizione 6.4.1 si dice che si integra tramite la sostituzione $g(y)$.

Formalmente l'enunciato della proposizione 6.4.1 può essere espresso nel seguente modo:

Calcolare l'integrale indefinito $\int f(x)dx$ tramite la sostituzione $x=g(y)$.
Se è $\int f(g(y))g'(y)dy=F(y)$ allora risulta: $\int f(x)dx=F\left(g^{-1}(x)\right)$.

ESEMPI.6.4.2.

l°). Calcolare $\int f(x)dx = \int \left(e^x / \left(e^{2x} + 2e^x + 2\right)\right)dx$ tramite la sostituzione $x = \log y$.

Essendo $D\log y = 1/y$ è $f(\log y)D\log y = 1/\left(y^2 + 2y + 2\right)$ e pertanto si ha:

$$\int f(\log y)D\log y dy = \int \left(1/\left(y^2 + 2y + 2\right)\right)dy = \int \left(1/\left((y+1)^2 + 1\right)\right)dy = arctg(y+1) = F(y).$$

e ricordando che è $x = \log y \Leftrightarrow e^x = y$ risulta: $\int \left(e^x / \left(e^{2x} + 2e^x + 2\right)\right)dx = F\left(e^x\right) = arctg\left(e^x + 1\right)$.

2°). Calcolare $\int f(x)dx = \int \sqrt{4 - 9x^2}\,dx$ tramite la sostituzione $x = (2/3)seny$.

Essendo $D(2/3)seny = (2/3)\cos y$ è $f((2/3)seny)D(2/3)seny = (2/3)\sqrt{4 - 4sen^2 y}\cos y = (4/3)\cos^2 y$ e pertanto si ha:

$$\int f((2/3)seny)D(2/3)senydy = (4/3)\int \cos^2 ydy$$

e ricordando che è: $\cos^2 y + sen^2 y = 1$ e $\cos^2 y - sen^2 y = \cos 2y$ sommando si ha: $\cos^2 y = (1 + \cos 2y)/2$ e quindi è:

$$(4/3)\int \cos^2 ydy = (2/3)\int (1 + \cos 2y)dy = (2/3)(y + (1/2)sen2y) = (2/3)(y + seny\cos y) =$$
$$= (2/3)\left(y + seny\sqrt{1 - sen^2 y}\right) = F(y)$$

e ricordando in fine che è $x = (2/3)seny \Leftrightarrow 3x/2 = seny \Leftrightarrow arcsen(3x/2) = y$ risulta:

$$\int \sqrt{4 - 9x^2}\,dx = F(arcsen(3x/2)) = (2/3)\left(arcsen(3x/2) + (3x/2)\sqrt{1 - (3x/2)^2}\right) =$$
$$= (2/3)\left(arcsen(3x/2) + (3/4)x\sqrt{4 - 9x^2}\right).$$

3°). Al Lettore il compito di far vedere che tramite la sostituzione $x = y^6 - 1$ si ha:

$$\int \left(\left(\sqrt{x+1} + 1\right)/(x+1)\left(\sqrt[3]{x+1} + 1\right)\right)dx = 6\left(\sqrt[6]{x+1} + \log\sqrt[6]{x+1} - (1/2)\log\left(\sqrt[3]{x+1} + 1\right) - arctg\sqrt[6]{x+1}\right).$$

4°). Al Lettore il compito di far vedere che tramite la sostituzione $x = y^2 - 2$ si ha:

$$\int \log\left(3\sqrt{x+2} + 1\right)dx = ((9x + 17)/9)\log\left(3\sqrt{x+2} + 1\right) - (1/2)(x+2) + (1/3)\sqrt{x+2}.$$

CAPITOLO 7-CENNI SULLA TEORIA DELL'INTEGRAZIONE SECONDO RIEMANN.

§.7.1.ALCUNI SOTTOINSIEMI DI R^k. In questo paragrafo andremo a definire alcuni sottoinsiemi di R^k che saranno essenziali per la comprensione di quanto sarà esposto nei paragrafi seguenti.

DEF.7.1.1. Siano: *k* un numero intero maggiore di uno ed $I_1, I_2, ..., I_k$ *k* intervalli di *R*.

Il sottoinsieme di R^k: $I = I_1 \times I_2 \times .... \times I_k = \{(x_1, x_2, ..., x_k) \in R^k, x_1 \in I_1, x_2 \in I_2, ..., x_k \in I_k\}$ si chiama <u>intervallo di</u> R^k <u>di componenti</u> $I_1, I_2, ..., I_k$.

Se tutti gli intervalli $I_1, I_2, ..., I_k$ sono aperti allora si dice che *I* è un <u>intervallo aperto di</u> R^k.

Se tutti gli intervalli $I_1, I_2, ..., I_k$ sono chiusi allora si dice che *I* è un <u>intervallo chiuso di</u> R^k.

Se tutti gli intervalli $I_1, I_2, ..., I_k$ sono superiormente semiaperti allora si dice che *I* è un <u>intervallo superiormente semiaperto di</u> R^k.

Se tutti gli intervalli $I_1, I_2, ..., I_k$ sono inferiormente semiaperti allora si dice che *I* è un <u>intervallo inferiormente semiaperto di</u> R^k.

Se tutti gli intervalli $I_1, I_2, ..., I_k$ sono limitati allora si dice che *I* è un <u>intervallo limitato di</u> R^k.

È evidente che gli intervalli limitati di R^2 sono tutte e sole quelle parti di R^2 che sono rappresentate nel piano da rettangoli con i lati paralleli agli assi cartesiani.

È anche evidente che gli intervalli limitati di R^3 sono tutte e sole quelle parti di R^3 che sono rappresentate nello spazio da parallelepipedi rettangoli con gli spigoli paralleli agli assi cartesiani.

DEF.7.1.2. Sia *P* una parte di R^k.

Si dice che *P* è un <u>plurintervallo di</u> R^k se è $P = \emptyset$ o, essendo $P \neq \emptyset$, se esiste una partizione di *P* costituita da un numero finito di intervalli limitati di R^k.

È evidente che ogni intervallo limitato di R^k è un plurintervallo di R^k.

È anche evidente che i plurintervalli di *R* sono tutte e sole quelle parti di *R* che sono rappresentate sulla retta dalla unione di un numero finito di segmenti a due a due disgiunti.

È ancora evidente che i plurintervalli di R^2 sono tutte e sole quelle parti di R^2 che sono rappresentate sul piano dalla unione di un numero finito di rettangoli a due a due disgiunti ed aventi tutti i lati paralleli agli assi cartesiani.

È in fine evidente che i plurintervalli di R^3 sono tutte e sole quelle parti di R^3 che sono rappresentate nello spazio dalla unione di un numero finito di parallelepipedi rettangoli a due a due disgiunti ed aventi tutti gli spigoli paralleli agli assi cartesiani.

È possibile dimostrare la seguente proposizione:

7.1.3. <u>Se</u> P' <u>e</u> P'' <u>sono due plurintervalli di</u> R^k <u>allora</u> $P' \cup P''$, $P' \cap P''$ <u>e</u> $P' - P''$ <u>sono tre plurintervalli di</u> R^k.

Poniamo in fine la seguente altra definizione:

DEF.7.1.4. Sia *X* una parte di R^k.

Si dice che *X* è una <u>parte limitata</u> di R^k se esiste un intervallo limitato *I* di R^k tale che sia $X \subseteq I$.

È evidente che la parte vuota di R^k è una parte limitata di R^k.

È anche evidente che l'unione di un numero finito di parti limitate di R^k è una parte limitata di R^k e conseguentemente ogni plurintervallo di R^k è una parte limitata di R^k.

È ancora evidente che le parti limitate di R^2 sono tutte e sole quelle parti di R^2 che sono rappresentate sul piano da una figura che può essere inclusa in un rettangolo avente i lati paralleli agli assi cartesiani.

Per esempio se (a,b) è un elemento di R^2 ed r è un numero reale positivo, allora il sottoinsieme di R^2: $\left\{(x,y)\in R^2, \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<r\right\}$ è una parte limitata di R^2 mentre il sottoinsieme di R^2: $\left\{(x,y)\in R^2, x\in\left]0,1\right] \text{ ed } y\in\left[0,1/x\right]\right\}$, ricordando il grafico della funzione $x\in\left]0,1\right]\to 1/x$, è una parte di R^2 non limitata.

È in fine evidente che le parti limitate di R^3 sono tutte e sole quelle parti di R^3 che sono rappresentate nello spazio da una figura che può essere inclusa in un parallelepipedo rettangolo con gli spigoli paralleli agli assi cartesiani.

Per esempio se (a,b,c) è un elemento di R^3 ed r è un numero reale positivo, allora il sottoinsieme di R^3: $\left\{(x,y,z)\in R^3, \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}<r\right\}$ è una parte limitata di R^3.

§.7.2. CENNI SULLA MISURA SECONDO PEANO-JORDAN. È noto che ad alcune parti X della retta si associa un numero reale maggiore o uguale a zero che si chiama lunghezza di X o misura elementare in R di X, ad alcune parti X del piano si associa un numero reale maggiore o uguale a zero che si chiama area di X o misura elementare in R^2 di X e ad alcune parti X dello spazio si associa un numero reale maggiore o uguale a zero che si chiama volume di X o misura elementare in R^3 di X.

Si pensi alla lunghezza di un segmento, all'area di un poligono o di un cerchio ed al volume di un poliedro, di una sfera, di un cilindro o di un cono.

Tutto ciò che fin qui è stato detto si può esprimere, più brevemente, dicendo che, se k è un elemento di $\{1,2,3\}$, ad alcune parti X di R^k si associa un numero reale positivo o nullo che si chiama la misura elementare di X in R^k ed X si dice elementarmente misurabile in R^k.

Noi qui di seguito daremo una generalizzazione della nozione di misura elementare nel senso che ad alcune parti X di R^k, k essendo un qualunque numero intero positivo, assoceremo un numero reale maggiore o uguale di zero che chiameremo misura di X in R^k e diremo pure che X è una parte misurabile di R^k.

La misura di X in R^k sarà definita in modo tale che se k è un elemento di $\{1,2,3\}$ ed X è una parte di R^k misurabile elementarmente in R^k allora X è misurabile in R^k e la misura di X in R^k è uguale alla misura elementare di X in R^k.

Per questo cominciamo col porre la seguente definizione:

DEF.7.2.1. Sia I un intervallo limitato di R^k.

Si dice misura di I in R^k e si denota col simbolo $i_k(I)$, zero se è $I=\varnothing$, se invece è $I\neq\varnothing$, il numero reale $\sup I-\inf I$ se è $I\subseteq R$ ed il numero reale $i_1(I_1)i_1(I_2)....i_1(I_k)$ se è $I\subseteq R^k$ con k maggiore di uno e se $I_1, I_2,....,I_k$ sono le componenti di I.

OSSERVAZIONE.7.2.2. Si noti che:

a) Un intervallo limitato di R ha per misura la lunghezza del segmento che lo rappresenta sulla retta.

b) Un intervallo limitato di R^2 ha per misura l'area del rettangolo che lo rappresenta sul piano.

c) Un intervalla limitato di R^3 ha per misura il volume del parallelepipedo rettangolo che lo rappresenta nello spazio.

d) Se per un intervallo limitato $I=I_1\times I_2\times....\times I_k$ di R^k esiste almeno un elemento h di $\{1,2,....,k\}$ tale che risulti $i_1(I_h)=0$ allora è $i_k(I)=0$. In particolare è di misura nulla ogni intervallo di R^k che si riduce ad un solo punto.

e) Se $I'=I_1'\times I_2'\times....\times I_k'$, ed $I''=I_1''\times I_2''\times....\times I_k''$ sono due intervalli limitati di R^k e per ogni elemento *h* di $\{1,2,....,k\}$ risulta: $\inf I'_h = \inf I''_h$ e, $\sup I'_h = \sup I''_h$ allora è $i_k(I') = i_k(I'')$.

f) Se I' ed I'' sono due intervalli limitati di R^k e risulta $I' \subseteq I''$ allora è $i_k(I') \le i_k(I'')$.

È ora possibile dimostrare la seguente proposizione:

7.2.3. <u>Sia</u> *P* <u>un plurintervallo di</u> R^k .

<u>Se</u> $\{J'_1, J'_2, ..., J'_m\}$ <u>e</u> $\{J''_1, J''_2, ..., J''_n\}$ <u>sono due partizioni di</u> *P* <u>entrambe costituite da un numero finito di intervalli limitati di</u> R^k , <u>allora è</u>: $\sum_{h=1}^{m} i_k(J'_h) = \sum_{h=1}^{n} i_k(J''_h)$.

La proposizione 7.2.3 legittima la seguente definizione:

DEF.7.2.4. Sia *P* un plurintervallo di R^k .

Si dice <u>misura di</u> *P* <u>in</u> R^k e si denota col simbolo $p_k(P)$ zero se è $P = \emptyset$, se invece è $P \ne \emptyset$, il numero reale maggiore o uguale a zero $\sum_{h=1}^{n} i_k(J_h)$ dove $\{J_1, J_2, ..., J_n\}$ è una qualunque partizione di *P* costituita da un numero finito di intervalli limitati di R^k .

È ora possibile dimostrare la seguente altra proposizione:

7.2.5. <u>Se</u> P' <u>e</u> P'' <u>sono due plurintervalli di</u> R^k , <u>allora risulta</u>: $p_k(P' \cup P'') = p_k(P') + p_k(P'') - p_k(P' \cap P'')$ e $p_k(P' - P'') = p_k(P') - p_k(P' \cap P'')$.

<u>Conseguentemente se è</u> $p_k(P' \cap P'') = 0$ <u>risulta</u>: $p_k(P' \cup P'') = p_k(P') + p_k(P'')$ <u>e se è</u> $P'' \subseteq P'$ <u>risulta</u>: $p_k(P' - P'') = p_k(P') - p_k(P'')$ <u>e pertanto se</u> $P'' \subseteq P'$ <u>allora risulta</u>: $p_k(P'') \le p_k(P')$.

Facciamo ora la seguente posizione:

Se *X* è una parte limitata e non vuota di R^k porremo:

$$A_X = \{a \in [0,+\infty[,\ \text{esiste un plurintervallo } P \text{ di } R^k \text{ incluso in } X : a = p_k(P)\}$$
$$B_X = \{b \in [0,+\infty[,\ \text{esiste un plurintervallo } P \text{ di } R^k \text{ includente } X : b = p_k(P)\}.$$

Si noti esplicitamente che, come d'altra parte è stato ben specificato nella definizione di A_X e B_X , si ha: $A_X \subseteq [0,+\infty[$ e $B_X \subseteq [0,+\infty[$.

D'immediata verifica è ora la seguente proposizione:

7.2.6. <u>Se</u> *X* <u>è una parte limitata di</u> R^k <u>allora</u> A_X <u>e</u> B_X <u>sono due parti separate di</u> R^k <u>ed</u> A_X <u>è la parte sottostante</u>.

<u>Conseguentemente</u> A_X <u>è limitata superiormente</u>, B_X <u>è limitata inferiormente e si ha</u>: $\sup A_X \le \inf B_X$.

DIM. Infatti se *a* è un elemento di A_X e *b* è un elemento di B_X , allora esistono due plurintervalli di R^k**,** P' e P'', tali che risulti: $P' \subseteq X \subseteq P''$, $a = p_k(P')$ e $b = p_k(P'')$ e di qui, in virtù della proposizione 7.2.5, come volevasi, è: $a \le b$.

Siamo ora in grado di porre la seguente definizione:

DEF.7.2.7. Sia *X* una parte limitata di R^k .

Si dice che X è una parte misurabile secondo PEANO-JORDAN o, più semplicemente, che X è misurabile se è $X=\varnothing$ o se, essendo $X\neq\varnothing$, A_X e B_X sono contigue o, ciò che è lo stesso, se risulta: $\sup A_X=\inf B_X$.

Se X è misurabile allora si dice misura di X in R^k e si denota col simbolo $m_k(X)$ zero se è $X=\varnothing$ se invece è $X\neq\varnothing$ il numero reale maggiore o uguale a zero $\sup A_X=\inf B_X$.

Si possono ora dimostrare le seguenti tre proposizioni:

7.2.8. Sia X una parte limitata di R^k.

Condizione necessaria e sufficiente affinché X sia misurabile è che per ogni numero reale positivo ε esistano due plurintervalli di R^k, P' e P'', tali che risulti: $P'\subseteq X\subseteq P''$ e $p_k(P'')-p_k(P')\leq\varepsilon$.

7.2.9. Sia X una parte limitata di R^k.

Condizione necessaria e sufficiente affinché X sia misurabile e risulti $m_k(X)=0$ è che per ogni numero reale positivo ε esista un plurintervallo P di R^k tale che risulti: $X\subseteq P$ e $p_k(P)\leq\varepsilon$.

Conseguentemente se è $m_k(X)=0$ e se Y è una parte di X allora è anche $m_k(Y)=0$.

7.2.10. Siano X ed Y due parti limitate di R^k.

Se X ed Y sono misurabili allora misurabili sono pure le parti di R^k $X\cup Y$, $X\cap Y$ ed $X-Y$ e risulta: $m_k(X\cup Y)=m_k(X)+m_k(Y)-m_k(X\cap Y)$ ed $m_k(X-Y)=m_k(X)-m_k(X\cap Y)$.

Conseguentemente se è $m_k(X\cap Y)=0$ risulta: $m_k(X\cup Y)=m_k(X)+m_k(Y)$ e se è $Y\subseteq X$ risulta: $m_k(X-Y)=m_k(X)-m_k(Y)$ e pertanto se è $Y\subseteq X$ allora risulta: $m_k(Y)\leq m_k(X)$.

OSSERVAZIONE.7.2.11. Si noti che se X è una parte limitata di R^k con $k\in\{1,2,3\}$ che è misurabile elementarmente in R^k allora X è misurabile in R^k ed $m_k(X)$ coincide con la misura elementare di X in R^k.

Per questa ragione se X è una parte limitata e misurabile di R ad $m_1(X)$ si da anche il nome di lunghezza di X, se X è una parte limitata e misurabile di R^2 ad $m_2(X)$ si da anche il nome di area di X e se X è una parte limitata e misurabile di R^3 ad $m_3(X)$ si da anche il nome di volume di X.

ESEMPI.7.2.12.

1°). Se X è una parte limitata e misurabile di R^k ed a è un numero reale maggiore o uguale a zero, allora l'insieme $X\times[0,a]$ è una parte limitata e misurabile di R^{k+1} e risulta: $m_{k+1}(X\times[0,a])=m_k(X)a$.

Se è $a=0$ diciamo I un intervallo limitato di R^k includente X ed osserviamo che l'intervallo $I\times[0,0]$ di R^{k+1}, ha, in virtù di quanto affermato nel punto d) dell'osservazione 7.2.2, misura nulla ed essendo $X\times[0,0]\subseteq I\times[0,0]$, come volevasi, è: $m_{k+1}(X\times[0,0])=0=m_k(X)0$.

Se è $a>0$ diciamo: ε un numero reale positivo, P' e P'' due plurintervalli di R^k tali che risulti: $P'\subseteq X\subseteq P''$ e $p_k(P'')-p_k(P')<\varepsilon/a$ ed osservando che $P'\times[0,a]$ e $P''\times[0,a]$ sono due plurintervalli di R^{k+1} per cui è: $P'\times[0,a]\subseteq X\times[0,a]\subseteq P''\times[0,a]$, $p_{k+1}(P''\times[0,a])-p_{k+1}(P'\times[0,a])=a(p_k(P'')-$ $-p_k(P'))<a\varepsilon/a=\varepsilon$, e $p_k(P')a\leq m_k(X)a\leq p_k(P'')a$, come volevasi, $X\times[0,a]$ è una parte limitata e misurabile di R^{k+1} e risulta $m_{k+1}(X\times[0,a])=m_k(X)a$.

2°). Si può far vedere che, più in generale di quanto affermato nell'esempio 1°), se k ed h sono due numeri interi positivi, se X è una parte limitata e misurabile di R^k ed Y è una parte limitata e misurabile di

R^h allora $X \times Y$ è una parte limitata e misurabile di R^{k+h} e risulta: $m_{k+h}(X \times Y) = m_k(X)m_h(Y)$.

3°). Siano: *X* una parte non vuota di R^k ed *f* una funzione definita in *X* ed a valori in $[0,+\infty[$.

Se è $m_k(X)=0$ e se la funzione *f* è limitata allora l'insieme $C_{X,f} = \{(x,y) \in R^k \times R, x \in X$ e $y \in [0, f(x)]\}$ è una parte limitata e misurabile di R^{k+1} e risulta: $m_{k+1}(C_{X,f}) = 0$.

Quanto asserito nell'esempio 3°) consegue dalla proposizione 7.2.9 e da quanto affermato nell'esempio 1°) quando si noti che è: $C_{X,f} \subseteq X \times [0, \sup f(X)]$.

4°). Siano: *X* una parte non vuota di *R* ed *f* una funzione definita in *X* ed a valori in $[0,+\infty[$.

Se *X* è una parte di *R* limitata e misurabile e se la funzione *f* è limitata e monotona, allora l'insieme $C_{X,f} = \{(x,y) \in R \times R, x \in X$ e $y \in [0, f(x)]\}$ è una parte limitata e misurabile di R^2.

Se *f* è identicamente nulla l'asserto consegue da quanto asserito nell'esempio 1°), se invece è $m_1(X)=0$ l'asserto consegue da quanto asserito nell'esempio 3°).

Sia quindi *f* non identicamente nulla ed $m_1(X)>0$. In questa ipotesi, se ε è un numero reale positivo, siano P' e P'' due plurintervalli di *R* tali che risulti: $P' \subseteq X \subseteq P''$ e $p_1(P'') - p_1(P') = p_1(P'' - P') < \varepsilon/2 \sup f(X)$.

Siano quindi *I* un intervallo limitato di *R* includente *X* e $\{J_1, J_2, ..., J_s\}$ una partizione di $[0, \sup f(X)]$ costituita da *s* intervalli di *R* aventi tutti misura in *R* minore di $\varepsilon/2i_1(I)$.

Se *h* è un elemento di $\{1,2,....,s\}$ U_h denota l'insieme vuoto se è $P' \cap f^{-1}(J_h) = \varnothing$, denota invece una partizione di $P' \cap [\ \inf f^{-1}(J_h), \sup f^{-1}(J_h)\ ]$ costituita da un numero finito di intervalli di *R* se è $P' \cap f^{-1}(J_h) \neq \varnothing$ e se *n* è il numero degli elementi di $\bigcup_{r=1}^{s} U_r$ sia $\{I_1, I_2, ..., I_n\}$ l'insieme dei valori di una funzione biunivoca di $\{1,2,....,n\}$ su $\bigcup_{r=1}^{s} U_r$.

È immediato rendersi conto che $\{I_1, I_2, ..., I_n\}$ è una partizione di P' costituita da *n* intervalli di *R*.

È ora evidente che posto $\overline{P'} = \bigcup_{r=1}^{n} I_r \times [0, \inf f(I_r)]$ e $\overline{P''} = \left(\bigcup_{r=1}^{n} I_r \times [0, \sup f(I_r)]\right) \cup ((P'' - P') \times [0, \sup f(X)])$, $\overline{P'}$ e $\overline{P''}$ sono due plurintervalli di R^2 per i quali risulta: $\overline{P'} \subseteq C_{X,f} \subseteq \overline{P''}$, d'altra parte con semplici calcoli si vede che è: $p_2(\overline{P''}) - p_2(\overline{P'}) = \sum_{r=1}^{n} i_1(I_r)(\sup f(I_r) - \inf f(I_r)) + p_1(P'' - P') \sup f(X) \leq$ $\leq (\varepsilon/2i_1(I)) \sum_{r=1}^{n} i_1(I_r) + (\varepsilon/2 \sup f(X)) \sup f(X) \leq \varepsilon$ e di qui, in virtù della proposizione 7.2.8, consegue quanto asserito.

5°). Siano: *X* una parte non vuota di *R* ed *f* una funzione definita in *X* ed a valori in $[0,+\infty[$.

Si può far vedere che se *X* è una parte di *R* limitata e misurabile e se la funzione *f* è limitata e continua, allora l'insieme $C_{X,f} = \{(x,y) \in R \times R, x \in X$ e $y \in [0, f(x)]\}$ è una parte limitata e misurabile di R^2.

6°). Se *X* è un intervallo limitato di *R* avente interno non vuoto e se *D* è una parte di *X* localmente finita in *X*, allora *D* è una parte limitata e misurabile di *R* e risulta: $m_1(D)=0$.

Se ε è un elemento di $]0, i_1(X)/2[$, posto: $P =]\inf X - \varepsilon/8, \inf X + \varepsilon/8[\cup]\sup X - \varepsilon/8, \sup X + \varepsilon/8[\cup$ $\cup ([\inf X + \varepsilon/8, \sup X - \varepsilon/8] \cap D)$, *P* è un plurintervallo di *R* includente *D* e tale che risulti: $p_1(P) =$ $= \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2 < \varepsilon$ e ciò, in virtù della proposizione 7.2.9, dimostra quanto asserito.

7°). Si può far vedere in fine che se k è un numero intero positivo allora l'insieme $[0,1]^k \cap Q^k$ è una parte di R^k limitata e non misurabile.

Si può infatti dimostrare che è: $A_{[0,1]^k \cap Q^k} = \{0\}$ e $\inf B_{[0,1]^k \cap Q^k} = 1$.

§.7.3. DEFINIZIONE DI INTEGRALE. Prima di dare la definizione di integrale conviene porre alcune definizioni:

DEF.7.3.1. Siano: X una parte non vuota di R^k ed f una funzione reale definita in X.

Si dice cilindroide di base X relativo, alla funzione f e si denota col simbolo $C_{X,f}$ il sottoinsieme di R^{k+1} : $\{(x,y) \in R^k \times R, x \in X \ \ ed \ \ y \in [\min\{0, f(x)\}, \max\{0, f(x)\}]\}$.

DEF.7.3.2. Siano: X una parte non vuota di R^k ed f una funzione reale definita in X.

Si dice parte positiva di f e si denota col simbolo f^+ la funzione $x \in X \to \max\{0, f(x)\} =$
$= \begin{cases} f(x) & se\ è\ \ f(x) \geq 0 \\ 0 & se\ è\ \ f(x) < 0 \end{cases}$.

Si dice parte negativa di f e si denota col simbolo f^- la funzione $x \in X \to -\min\{0, f(x)\} =$
$= \begin{cases} 0 & se\ è\ \ f(x) \geq 0 \\ -f(x) & se\ è\ \ f(x) < 0 \end{cases}$.

È immediato rendersi conto che sussistono le seguenti due proposizioni:

7.3.3. Se X è una parte non vuota di R^k ed f è una funzione reale definita in X allora è: $|f| = f^+ + f^-$ ed $f = f^+ - f^-$.

7.3.4. Siano: X una parte non vuota di R^k ed f una funzione reale definita in X.

Condizione necessaria e sufficiente affinché $C_{X,f}$ sia una parte limitata di R^{k+1} è che X sia una parte limitata di R^k ed f sia una funzione limitata.

Dimostriamo ora la seguente proposizione:

7.3.5. Siano: X una parte non vuota e limitata di R^k ed f una funzione reale limitata definita in X.

Condizione necessaria e sufficiente affinché $C_{X,f}$ sia una parte misurabile di R^{k+1} è che C_{X,f^+} e C_{X,f^-} siano due parti misurabili di R^{k+1}.

Se $C_{X,f}$ è misurabile allora è $m_{k+1}(C_{X,f}) = m_{k+1}(C_{X,f^+}) + m_{k+1}(C_{X,f^-})$.

DIM. È immediato rendersi conto che: condizione necessaria e sufficiente affinché C_{X,f^-} sia una parte misurabile di R^{k+1} è che $C_{X,-f^-}$ sia una parte misurabile di R^{k+1} e se C_{X,f^-} è una parte misurabile di R^{k+1} allora risulta: $m_{k+1}(C_{X,f^-}) = m_{k+1}(C_{X,-f^-})$.

Ciò premesso, l'asserto consegue quando si osservi che, se I è un intervallo limitato di R^k includente X, è: $C_{X,f^+} = C_{X,f} \cap (I \times [0, \max\{0, \sup f(X)\}])$, $C_{X,-f^-} = C_{X,f} \cap (I \times [\min\{0, \inf\ f(X)\}, 0])$ e $C_{X,f^+} \cap$ $\cap C_{X,-f^-} \subseteq I \times [0,0]$.

Poniamo ora la seguente definizione:

DEF.7.3.6. Siano: X una parte non vuota e limitata di R^k ed f una funzione reale limitata definita in X.
Si dice che f è <u>integrabile</u> secondo RIEMANN o, più semplicemente, che f è <u>integrabile</u> se $C_{X,f}$ è una parte misurabile di R^{k+1} o, equivalentemente, se C_{X,f^+} e C_{X,f^-} sono due parti misurabili di R^{k+1}.
Se f è integrabile si dice <u>integrale secondo</u> RIEMANN <u>di</u> f o, più semplicemente, <u>integrale di</u> f e si denota col simbolo $\int fdm_k$ il numero reale $m_{k+1}\left(C_{X,f^+}\right)-m_{k+1}\left(C_{X,f^-}\right)$.

ESEMPI.7.3.7.

1°). Siano: X una parte non vuota, limitata e misurabile di R^k ed a un numero reale.
Far vedere che la funzione $\gamma_a : x \in X \rightarrow a$ è integrabile e risulta: $\int \gamma_a dm_k = m_k(X)a$.

Infatti se è $a > 0$ allora è: $\gamma_a^+ = \gamma_a$ e $\gamma_a^- = \gamma_0$, conseguentemente è: $C_{X,\gamma_a^+} = X \times [0,a]$ e $C_{X,\gamma_a^-} = X \times [0,0]$ e pertanto, in virtù di quanto affermato nell'esempio 7.2.12 1°), si ha: $m_{k+1}\left(C_{X,\gamma_a^+}\right) = m_k(X)a$ ed $m_{k+1}\left(C_{X,\gamma_a^-}\right) = 0$ e di qui consegue quanto affermato.
Se è $a < 0$ allora è: $\gamma_a^+ = \gamma_0$ e $\gamma_a^- = \gamma_{-a}$, conseguentemente è: $C_{X,\gamma_a^+} = X \times [0,0]$ e $C_{X,\gamma_a^-} = X \times [0,-a]$ e quindi con un ragionamento analogo a quello fatto nel caso precedente si dimostra che è vero quanto asserito.
In fine se è $a = 0$ allora è: $\gamma_0^+ = \gamma_0^- = \gamma_0$ e quindi, come volevasi, l'integrale di γ_0 è uguale a zero.

2°). Siano: X una parte non vuota e limitata di R^k ed f una funzione reale definita in X.
Se è $m_k(X) = 0$ e se la funzione f è limitata allora f è integrabile e risulta: $\int fdm_k = 0$.

Al Lettore il non difficile compito di dimostrare quanto asserito nell'esempio 2°) servendosi di quanto affermato nell'esempio 7.2.12 3°).

3°). Siano: X una parte non vuota e limitata di R ed f una funzione reale definita in X.
Se X è una parte misurabile di R e se la funzione f è limitata e monotona allora f è integrabile.

Infatti è immediato convincersi che se f è crescente allora f^+ è crescente ed f^- è decrescente, mentre se f è decrescente allora f^+ è decrescente ed f^- è crescente e quindi l'asserto consegue immediatamente da quanto affermato nell'esempio 7.2.12 4°).

4°). Siano: X una parte non vuota e limitata di R ed f una funzione reale definita in X.
Se X è una parte misurabile di R e se la funzione f è limitata e continua allora f è integrabile.

Infatti essendo: $|f| = f^+ + f^-$ ed $f = f^+ - f^-$ è facile rendersi conto che è: $f^+ = (|f| + f)/2$ ed $f^- = (|f| - f)/2$ e pertanto se f è continua continue sono pure le funzioni f^+ ed f^- e quindi l'asserto consegue immediatamente da quanto affermato nell'esempio 7.2.12 5°).

Anche se di semplice dimostrazione noi qui di seguito ci limiteremo ad enunciare i teoremi che esprimono le principali proprietà dell'integrale:

7.3.8. <u>Siano</u>: X <u>una parte non vuota e limitata di</u> R^k <u>ed</u> f <u>e</u> g <u>due funzioni reali limitate definite in</u> X.
<u>Se</u> f <u>e</u> g <u>sono integrabili e se per ogni elemento</u> x <u>di</u> X <u>è</u>: $f(x) \geq g(x)$, <u>allora è</u>: $\int fdm_k \geq \int gdm_k$.

Conseguentemente, se f è integrabile e per ogni elemento x di X è: $f(x) \geq 0$ allora è: $\int fdm_k \geq 0$.

7.3.9. Siano: X una parte non vuota e limitata di R^k ed f una funzione reale limitata definita in X.

Se f è integrabile allora anche $|f|$ è integrabile e risulta: $\int |f| dm_k = m_{k+1}(C_{X,f^+}) + m_{k+1}(C_{X,f^-}) = m_{k+1}(C_{X,f})$.

Conseguentemente se f è integrabile è: $\left|\int fdm_k\right| \leq \int |f| dm_k$.

7.3.10. (**TEOREMA DELLA MEDIA**). Siano: X una parte, non vuota e limitata di R^k ed f una funzione reale limitata definita in X.

Se X è misurabile ed f è integrabile, allora risulta: $m_k(X)\inf f(X) \leq \int fdm_k \leq m_k(X)\sup f(X)$.

7.3.11. Siano: X una parte non vuota e limitata di R^k, Y una parte non vuota di X ed f una funzione reale limitata definita in X.

Se f è integrabile e se esiste una parte Y^* di R^k limitata e misurabile tale che risulti: $Y = X \cap Y^*$, allora anche la restrizione di f ad Y è integrabile.

La proposizione 7.3.11 legittima la seguente definizione:

DEF.7.3.l2. Siano: X una parte non vuota e limitata di R^k, Y una parte non vuota di X tale che esista una parte Y^* di R^k limitata e misurabile per cui risulti $Y = X \cap Y^*$ ed f una funzione integrabile definita in X.

Si chiama integrale di f esteso ad Y e si denota col simbolo $\int_Y fdm_k$ l'integrale della restrizione della funzione f ad Y.

È ora possibile dimostrare la seguente proposizione:

7.3.13. Siano: X una parte non vuota e limitata di R^k, Y' ed Y'' due parti di X ed f una funzione reale limitata definita in X.

Se f è integrabile e se esistono due parti di R^k, Y'^* ed Y''^*, entrambe limitate e misurabili e tali che risulti: $Y' = X \cap Y'^*$ ed $Y'' = X \cap Y''^*$, allora si ha:

$$\int_{Y' \cup Y''} fdm_k = \int_{Y'} fdm_k + \int_{Y''} fdm_k - \int_{Y' \cap Y''} fdm_k \ \text{ e } \ \int_{Y' - Y''} fdm_k = \int_{Y'} fdm_k - \int_{Y' \cap Y''} fdm_k$$

Conseguentemente se è $m_k(Y' \cap Y'') = 0$ risulta $\int_{Y' \cup Y''} fdm_k = \int_{Y'} fdm_k + \int_{Y''} fdm_k$ e se è $Y'' \subseteq Y'$ risulta $\int_{Y' - Y''} fdm_k = \int_{Y'} fdm_k - \int_{Y''} fdm_k$.

7.3.14. Siano: X una parte non vuota e limitata di R^k, f e g due funzioni reali limitate definite in X e a e b due numeri reali.

Se f e g sono integrabili allora anche $af + bg$ è integrabile e risulta: $\int (af + bg) dm_k = a\int fdm_k + b\int gdm_k$.

In particolare quindi è: $\int (f+g) dm_k = \int fdm_k + \int gdm_k$, $\int (f-g) dm_k = \int fdm_k - \int gdm_k$ e $\int afdm_k = a\int fdm_k$.

§.7.4. MISURABILITÀ DELL'INSIEME NORMALE. Uno dei problemi che può essere risolto col calcolo degli integrali è la determinazione della misura di un insieme misurabile.

A questo proposito osserviamo che già il teorema 7.3.9 ci dice in che modo, col calcolo degli integrali, può determinarsi la misura del cilindroide relativo ad una funzione integrabile, infatti è immediato convincersi che il teorema 7.3.9 può essere enunciato equivalentemente nel seguente altro modo:

7.4.1. Siano: X una parte non vuota e limitata di R^k ed f una funzione reale limitata definita in X.
Se f è integrabile allora si ha: $= m_{k+1}\left(C_{X,f}\right) = \int |f| dm_k$.

Noi ora qui di seguito enunceremo un teorema che permetterà di calcolare la misura di un insieme misurabile che è di tipo più generale del cilindroide.

Per questo cominciamo col porre la seguente definizione:

DEF.7.4.2. Siano: X una parte non vuota di R^k ed f e g due funzioni reali definite in X.
Si dice insieme normale di base X relativo alle funzioni f e g e si denota col simbolo $N_{X,f,g}$ il sottoinsieme di R^{k+1}: $\{(x,y) \in R^k \times R, x \in X \text{ ed } y \in [\min\{f(x), g(x)\}, \max\{f(x), g(x)\}]\}$.

Nella figura 1 è rappresentato un cilindroide e nella figura 2 è rappresentato un insieme normale.

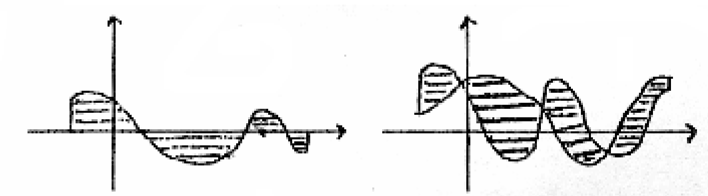

figura 1 figura 2

Si osservi che il cilindroide di base X relativo alla funzione f è l'insieme normale di base X relativo alla funzione f ed alla funzione identicamente nulla in X.

Chiudiamo questo paragrafo enunciando la seguente proposizione:

7.4.3. Siano: X una parte non vuota e limitata di R^k ed f e g due funzioni reali definite in X.
Se f e g sono integrabili allora l'insieme normale $N_{X,f,g}$ è una parte limitata e misurabile di R^{k+1} e risulta: $= m_{k+1}\left(N_{X,f,g}\right) = \int |f - g| dm_k$.

§.7.5. IL CASO DELLE FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE. In questo paragrafo studieremo un pò più approfonditamente il caso delle funzioni reali definite in una parte di R.

A questo proposito cominciamo col dimostrare la seguente proposizione:

7.5.1. Siano: X una parte non vuota di R limitata e misurabile ed f una funzione reale limitata definita in X.
Se esiste una parte Y di X avente misura nulla tale che f sia continua in $X - Y$, allora f è integrabile.

DIM. Se, per comodità, denotiamo con f_1 la restrizione di f ad $X - Y$ e con f_2 la restrizione di f ad Y si ha: $C_{X,f^+} = C_{X-Y,f_1^+} \cup C_{Y,f_2^+}$ e $C_{X,f^-} = C_{X-Y,f_1^-} \cup C_{Y,f_2^-}$, osserviamo ora che C_{X-Y,f_1^+} e C_{X-Y,f_1^-} sono, in virtù di quanto affermato nell'esempio 7.2.12 5°), due parti misurabili di R^2 e C_{Y,f_2^+} e C_{Y,f_2^-} sono, in virtù di quanto affermato nell'esempio 7.2.12 3°), due parti misurabili di R^2 ed aventi misura nulla in R^2, pertanto l'asserto è conseguenza della proposizione 7.2.10.

Dalla proposizione 7.5.1 ora dimostrata consegue la seguente altra:

7.5.2. Siano: X un intervallo limitato di R avente interno non vuoto ed f una funzione reale limitata definita in X.

Se esiste una parte Y di X localmente finita in X tale che f sia continua in $X-Y$, allora f è integrabile.

DIM. In virtù di quanto affermato nell'esempio 7.2.12 6°) risulta: $m_1(Y)=0$ e quindi l'asserto è conseguenza della proposizione 7.5.1.

Poniamo ora la seguente definizione:

DEF.7.5.3. Siano: X un intervallo di R avente interno non vuoto ed f una funzione reale definita in X e tale che, per ogni intervallo I chiuso e limitato incluso in X, la restrizione di f ad I è integrabile.

Se per ogni coppia ordinata (a,b) di elementi di X si pone:

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{cases} \int_{[a,b]} fdm_1 & se\ è\ a \le b \\ -\int_{[b,a]} fdm_1 & se\ è\ a > b \end{cases}$$

al numero reale $\int_a^b f(x)dx$ si da il nome di integrale definito di f da a a b.

È facile rendersi conto che sussiste la seguente proposizione:

7.5.4. Siano: X un intervallo di R avente interno non vuoto ed f una funzione reale definita in X e tale che, per ogni intervallo I chiuso e limitato incluso in X, la restrizione di f ad I è integrabile.

Se a, b e c sono tre elementi di X allora si ha $\int_a^a f(x)dx = 0$ e $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Poniamo quindi la seguente altra definizione:

DEF.7.5.5. Siano: X un intervallo di R avente interno non vuoto ed f una funzione reale definita in X e tale che, per ogni intervallo I chiuso e limitato incluso in X, la restrizione di f ad I è integrabile.

Se a è un elemento di X alla funzione reale:

$$F_a : x \in X \to \int_a^x f(t)dt$$

si da il nome di funzione integrale di f di origine a.

È possibile ora dimostrare la seguente proposizione:

7.5.6. (**TEOREMA DI TORRICELLI-BARROW**). Siano: X un intervallo di R avente interno non vuoto, f una funzione reale definita in X e tale che, per ogni intervallo I chiuso e limitato incluso in X, la restrizione di f ad I è integrabile ed a un elemento di X.

La funzione integrale di f di origine a, F_a è continua e se x è un elemento di X in cui la funzione f è continua allora F_a è derivabile in x e risulta: $F_a'(x)= f(x)$.

Dal teorema 7.5.6 consegue facilmente il seguente altro:

7.5.7. (**TEOREMA DI ESISTENZA DELLE PRIMITIVE**). Siano: X un intervallo di R avente interno non vuoto ed f una funzione reale definita in X e tale che, per ogni intervallo I chiuso e limitato incluso in X, la restrizione di f ad I è integrabile.

Se esiste una parte Y di X localmente finita in X e tale che la restrizione di f ad $X-Y$ sia continua, allora la funzione f è dotata di primitive.

DIM. Sia a un elemento di X e consideriamo la funzione integrale di f di origine a, $F_a : x \in X \to \to \int_a^x f(t)dt$ per il teorema 7.5.6 la funzione F_a è continua e, per ogni elemento x di $X-Y$, è derivabile in x e risulta $F_a'(x)= f(x)$ e ciò dimostra, come volevasi, che la funzione F_a è una primitiva di f ed anzi possiamo precisare che F_a è l'unica primitiva della funzione f che nel punto a assume il valore zero.

Siamo ora in grado di dimostrare la seguente altra proposizione:

7.5.8. (**TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE**). Siano: X un intervallo di R avente interno non vuoto ed f una funzione reale definita in X e tale che, per ogni intervallo I chiuso e limitato incluso in X, la restrizione di f ad I è integrabile.

Se esiste una parte Y di X localmente finita in X tale che la restrizione di f ad $X-Y$ sia continua allora f è dotata di primitive e, per ogni elemento (a,b) di X^2, se G è una primitiva di f, è $\int_a^b f(t)dt = G(b)-G(a)$.

DIM. Sia (a,b) una coppia ordinata di elementi di X, in virtù della proposizione 7.5.7, la funzione integrale di f di origine a, F_a è una primitiva di f, conseguentemente, se G è un'altra primitiva di f, la funzione $F_a - G$ è, in virtù della proposizione 6.1.3, costante e pertanto risulta: $(F_a - G)(a)=(F_a - G)(b) \Leftrightarrow \Leftrightarrow F_a(a)-G(a)=F_a(b)-G(b) \Leftrightarrow F_a(b)-F_a(a)=G(b)-G(a)$ e da quest'ultima uguaglianza, quando si ricordi che è: $F_a(b)=\int_a^b f(t)dt$ e $F_a(a)=0$, consegue, come volevasi, che è: $\int_a^b f(t)dt = G(b)-G(a)$.

Al Lettore in fine il facile compito di dimostrare quanto affermato nell'esempio 7.3.7 4°), servendosi della proposizione 3.3.1, e dimostrare la seguente altra proposizione, servendosi della proposizione 7.5.7.

7.5.9. Se X è un intervallo di R avente interno non vuoto ed f è una funzione reale continua definita in X allora f è dotata di primitive e se x è un elemento di X ed F è una primitiva di f risulta: $F'(x)= f(x)$.

OSSERVAZIONE.7.5.10. Si noti che la circostanza che una funzione f sia dotata di primitive non vuole dire che può scriversi una primitiva di f servendosi delle funzioni elementari così come è stato fatto nei casi considerati nei paragrafi 6.2 e 6.3.

Per confermare quanto sopra affermato si consideri la funzione $f : x \in R \to e^{-x^2}$ ed osserviamo che essendo f continua, in virtù della proposizione 7.5.9, f è dotata di primitive, però può dimostrarsi che nessuna primitiva di f può essere scritta servendosi delle funzioni elementari e quindi se si vuole scrivere una primitiva di f non ci resta altro da fare che fissare un numero reale a e scrivere la funzione $x \in R \to \int_a^x e^{-t^2} dt$.

Per meglio capire quello che è stato fin qui detto si osservi che se non fossero state definite le funzioni arcotangente, arcocotangente e logaritmica allora, sempre in virtù della proposizione 7.5.9, le funzioni

$x \in R \to 1/(1+x^2)$ e $x \in]0,+\infty[\to 1/x$ sono dotate di primitive però una loro primitiva non potrebbe essere scritta se non nel seguente modo: $x \in R \to \int_a^x 1/(1+t^2)dt$ e $x \in]0,+\infty[\to \int_a^x 1/t dt$ a essendo per la prima funzione un numero reale e per la seconda funzione un numero reale positivo.

ESERCIZI.7.5.11.

1°). Data la funzione $f : x \in [-2,5] \to (x^2-1)e^{-x}$ calcolare $\int fdm_1$ ed $m_2(C_{[-2,5],f})$.

Per risolvere il problema proposto è sufficiente calcolare $m_2(C_{[-2,5],f^+})$ ed $m_2(C_{[-2,5],f^-})$.

Per questo osserviamo che essendo: $f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2-1>0 \Leftrightarrow x \in [-2,-1[\cup]1,5]$, risulta:

$$f^+ : x \in [-2,5] \to \begin{cases} (x^2-1)e^{-x} & se\, x \in [-2,-1] \cup [1,5] \\ 0 & se\, x \in]-1,1[\end{cases} \text{ ed } f^- : x \in [-2,5] \to \begin{cases} 0 & se\, x \in [-2,-1[\cup]1,5] \\ (1-x^2)e^{-x} & se\, x \in [-1,1] \end{cases}$$

e quindi è: $m_2(C_{[-2,5],f^+}) = \int_{[-2,-1]} fdm_1 + \int_{[1,5]} fdm_1 = \int_{-2}^{-1}(x^2-1)e^{-x}dx + \int_1^5 (x^2-1)e^{-x}dx$ ed $m_2(C_{[-2,5],f^-}) = \int_{[-1,1]} - fdm_1 = -\int_{-1}^{1}(x^2-1)e^{-x}dx$ ed essendo $\int (x^2-1)e^{-x}dx = -(x^2-1)e^{-x} + 2\int (xe^{-x})dx = -(x^2-1)e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x}dx = -(x+1)^2 e^{-x}$ è: $m_2(C_{[-2,5],f^+}) = e^2 - 36e^{-5} + 4e^{-1}$ ed $m_2(C_{[-2,5],f^-}) = 4e^{-1}$ e pertanto è $\int fdm_1 = e^2 - 36e^{-5}$ ed $m_2(C_{[-2,5],f}) = e^2 - 36e^{-5} + 8e^{-1}$.

2°). Al Lettore il compito di far vedere che, date le funzioni $f_1 : x \in [0,3] \to (x-1)/(x^2+1)$, $f_2 : x \in [-5,0] \to 2(x+1)arctgx$ ed $f_3 : x \in [-4,4] \to x/(3x^2+2)$ risulta: $\int f_1 dm_1 = \log\sqrt{10} - arctg3$ ed $m_2(C_{[0,3],f_1}) = \log\sqrt{5/2} - arctg3 + \pi/2$, $\int f_2 dm_1 = 16arctg5 - 5 + \log 26$ ed $m_2(C_{[-5,0],f_2}) = 16arctg5 - 3 + \log(13/2)$, $\int f_3 dm_1 = 0$ ed $m_2(C_{[-4,4],f_3}) = \log\sqrt[3]{25}$.

3°). Data la funzione $f : x \in [-1,3] \to (e^{2x}-1)/(5e^{2x}-2e^x+1)$ calcolare $\int fdm_1$ e $m_2(C_{[-1,3],f})$.

Per risolvere il problema proposto è sufficiente calcolare $m_2(C_{[-1,3],f^+})$ ed $m_2(C_{[-1,3],f^-})$.

Per questo osserviamo che essendo: $f(x) > 0 \Leftrightarrow e^{2x}-1>0 \Leftrightarrow x \in [0,3]$ è: $m_2(C_{[-1,3],f^+}) = \int_{[0,3]} fdm_1 = \int_0^3 ((e^{2x}-1)/(5e^{2x}-2e^x+1))dx$ ed $m_2(C_{[-1,3],f^-}) = \int_{[-1,0]} - fdm_1 = -\int_{-1}^{0} ((e^{2x}-1)/(5e^{2x}-2e^x+1))dx$.

Per il calcolo di $\int ((e^{2x}-1)/(5e^{2x}-2e^x+1))dx$ conviene effettuare la sostituzione $y = e^x \Leftrightarrow \log y = x$ e pertanto calcoliamo $\int f(\log y) D\log y dy = \int ((y^2-1)/(5y^2-2y+1)y)dy$ e per il calcolo di quest'ultimo integrale indefinito poniamo $(y^2-1)/(5y^2-2y+1)y = (Ay+B)/(5y^2-2y+1) + C/y$ e di qui, con semplici calcoli, si ricava che deve essere: $A=6$, $B=-2$ e $C=-1$, quindi si ha:

$$\int ((y^2-1)/(5y^2-2y+1)y)dy = \int ((6y-2)/(5y^2-2y+1))dy - \int (1/y)dy =$$
$$= (3/5)\log(5y^2-2y+1) - (2/5)arctg((5y-1)/2) - \log y$$

e quindi è: $\int \left(\left(e^{2x}-1\right)/\left(5e^{2x}-2e^{x}+1\right)\right)dx=(3/5)\log\left(5e^{2x}-2e^{x}+1\right)-(2/5)arctg\left(\left(5e^{x}-1\right)/2\right)-x$ e pertanto risulta:

$$m_2\left(C_{[-1,3],f^+}\right)=(3/5)\log\left(5e^{6}-2e^{3}+1\right)-(2/5)arctg\left(\left(5e^{3}-1\right)/2\right)-3-(3/5)\log 4+(2/5)arctg\,2$$

ed

$$m_2\left(C_{[-1,3],f^-}\right)=(3/5)\log\left(5e^{-2}-2e^{-1}+1\right)-(2/5)arctg\left(\left(5e^{-1}-1\right)/2\right)+1-(3/5)\log 4+(2/5)arctg\,2$$

e quindi è:

$$\int fdm_1=(3/5)\log\left(5e^{6}-2e^{3}+1\right)-(2/5)arctg\left(\left(5e^{3}-1\right)/2\right)-4-(3/5)\log\left(5e^{-2}-2e^{-1}+1\right)+(2/5)arctg\left(\left(5e^{-1}-1\right)/2\right)$$

ed

$$m_2\left(C_{[-1,3],f}\right)=(3/5)\log\left(5e^{6}-2e^{3}+1\right)-(2/5)arctg\left(\left(5e^{3}-1\right)/2\right)-2+(3/5)\log\left(5e^{-2}-2e^{-1}+1\right)-$$
$$-(2/5)arctg\left(\left(5e^{-1}-1\right)/2\right)-(6/5)\log 4+(4/5)arctg\,2\,.$$

4°). Al Lettore il compito di far vedere che, date le funzioni $f_1:x\in[-2,7]\to(x+1)/\left(\sqrt{x+2}+3\right)$, $f_2:x\in[-\pi/4,\pi/4]\to tgx\left(1+tg^2x\right)arctg(3+tgx)$ ed $f_3:x\in[0,\pi]\to e^{\cos x}\cos^2 x\,senx$ si ha: $\int f_1dm_1=$ $=39-48\log 2$ ed $m_2\left(C_{[-2,7],f_1}\right)=35/3+48\log(8/9)$, $\int f_2dm_1=(7/2)(arctg\,2-arctg\,4)-1+(3/2)\log(17/5)$ ed $m_2\left(C_{[-\pi/4,\pi/4],f_2}\right)=-(7/2)(arctg\,4+arctg\,2)+8arctg\,3+(3/2)\log(17/20)$, $\int f_3dm_1=m_2\left(C_{[0,\pi],f_3}\right)=\left(e^2-5\right)/e$.

(Suggerimento: per calcolare $\int f_1(x)dx$ conviene effettuare la sostituzione $y=\sqrt{x+2}\Leftrightarrow x=y^2-2$, per calcolare $\int f_2(x)dx$ conviene effettuare la sostituzione $y=tgx\Leftrightarrow x=arctgy$ e per calcolare $\int f_3(x)dx$ conviene effettuare la sostituzione $y=\cos x\Leftrightarrow x=\arccos y$).

5°). Detto E un esagono inscritto nella circonferenza di centro il punto $(3,0)$ e raggio 1 e considerate le funzioni $f_1:x\in[0,1]\to x^2$ ed $f_2:x\in[0,1]\to x^4$ calcolare $m_2\left(E\cup N_{[0,1],f_1,f_2}\cup(\{-2,2.5\}\times[-1,3])\right)$.

Essendo $m_2(\{-2,2.5\}\times[-1,3])=0$ ed $E\cap N_{[0,1],f_1,f_2}=\varnothing$ risulta: $m_2\left(E\cup N_{[0,1],f_1,f_2}\cup(\{-2,2.5\}\times\right.$ $\left.\times[-1,3])\right)=m_2\left(E\cup N_{[0,1],f_1,f_2}\right)=m_2(E)+m_2\left(N_{[0,1],f_1,f_2}\right)=3\sqrt{3}/2+\int_0^1\left(x^2-x^4\right)dx=3\sqrt{3}/2+1/3-1/5.$

6°). Al Lettore il compito di far vedere che, date le funzioni $f_1:x\in[0,1]\to e^x$, $f_2:x\in[1,3]\to x^2+x$ ed $f_3:x\in[1,3]\to\cos(\pi x/2)$ è $m_2\left(C_{[0,1],f_1,}\cup N_{[1,3],f_2,f_3}\right)=35/3+e+4/\pi$.

7°). Detto E il cerchio di centro il punto $(1,8)$ e raggio 3 e considerata la funzione $f:x\in[5,7]\to\log x$ al Lettore il compito di far vedere che è: $m_2\left(E\cup C_{[5,7],f}\cup\left(\left(\bigcup_{n\in N}\{1/n\}\right)\times[0,2]\right)\right)=9\pi-2+7\log 7-5\log 5$.

(Suggerimento: osservare che l'insieme $\bigcup_{n\in N}\{1/n\}$ è localmente finito in $[0,1]$ e conseguente è di misura nulla).

8°). Trovare l'insieme di definizione della funzione $F:x\to\int_{-1}^{x}\sqrt{t\left(t^2-4\right)}dt$ e dire in quali interva

lli è strettamente crescente o strettamente decrescente, in quali intervalli è strettamente convessa o strettamente concava e se ha punti di flesso.

Essendo $t\left(t^2-4\right)\geq 0 \Leftrightarrow t\in\left[-2,0\right]\cup\left[2,+\infty\right[$ e $-1\in\left[-2,0\right]$, l'insieme di definizione di F è $\left[-2,0\right]$.

Osserviamo ora che in virtù della proposizione 7.5.6 per ogni elemento x di $\left[-2,0\right]$ è $F'(x)=\sqrt{x\left(x^2-4\right)}$, conseguentemente la funzione F è strettamente crescente.

Per ogni elemento x di $\left]-2,0\right[$ è $F''(x)=D\sqrt{x\left(x^2-4\right)}=\left(3x^2-4\right)/2\sqrt{x\left(x^2-4\right)}$ e conseguentemente è $F''(x)>0\Leftrightarrow 3x^2-4>0\Leftrightarrow x\in\ \left]-2,-2/\sqrt{3}\right[$ e pertanto la restrizione della funzione F a $\left[-2,-2/\sqrt{3}\right]$ è strettamente convessa, la restrizione della funzione F a $\left[-2/\sqrt{3},0\right]$ è strettamente concava e $-2/\sqrt{3}$ è un punto di flesso proprio per F.

9°). Al Lettore il compito di far vedere che:

a). La funzione $F_1 : x\rightarrow\int_0^x 3^{tarctgt}dt$ è definita in R, è strettamente crescente, la restrizione di F_1 a $\left]-\infty,0\right]$ è strettamente concava, la restrizione di F_1 a $\left[0,+\infty\right[$ è strettamente convessa e 0 è un punto di flesso proprio per F_1.

b) La funzione $F_2 : x\rightarrow\int_0^x\left(e^{2t^2-t}-e\right)dt$ è definita in R, la restrizione di F_2 a $\left]-\infty,-1/2\right]$ e la restrizione di F_2 a $\left[1,+\infty\right[$ sono strettamente crescenti, la restrizione di F_2 a $\left[-1/2,1\right]$ è strettamente decrescente, la restrizione di F_2 a $\left]-\infty,1/4\right]$ è strettamente concava, la restrizione di F_2 a $\left[1/4,+\infty\right[$ è strettamente convessa, $-1/2$ è un punto di massimo relativo proprio per F_2, 1 è un punto di minimo relativo proprio per F_2 e $1/4$ è un punto di flesso proprio per F_2.

c). La funzione $F_3 : x\rightarrow\int_0^x arctg\left(e^{\sqrt{t}}-e\right)dt$ è definita in $\left[0,+\infty\right[$, la restrizione di F_3 a $\left[0,1\right]$ è strettamente decrescente, la restrizione di F_3 a $\left[1,+\infty\right[$ è strettamente crescente, F_3 è strettamente convessa ed 1 è un punto di minimo relativo proprio per F_3.

10°). Al Lettore il compito di far vedere che è:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left(2^{tsen^2t}-1\right)dt}{x^2+2\cos x-2}=3\log 2,\ \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x arctg\left(t-sent\right)dt}{2^{x^4}-1}=1/24\log 2\ \text{ e }\ \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x arcsen\left(2^t-1\right)dt}{1-\cos x}=\log 2.$$

Chiudiamo questi appunti dimostrando la seguente proposizione:

7.5.12. (**TEOREMA DEL VALOR MEDIO**). <u>Siano</u>: $\left[a,b\right]$ <u>un intervallo chiuso e limitato di</u> R <u>avente interno non vuoto ed</u> f <u>una funzione reale definita in</u> $\left[a,b\right]$.

<u>Se</u> f <u>è limitata in</u> $\left[a,b\right]$ <u>e continua in</u> $\left]a,b\right[$ <u>allora</u> f <u>è integrabile ed esiste almeno un elemento</u> c <u>di</u> $\left]a,b\right[$ <u>tale che risulti</u>: $\int fdm_1=\int_a^b f(t)dt=f(c)(b-a)$.

DIM. Se I è un intervallo chiuso incluso in $\left[a,b\right]$, in virtù della proposizione 7.5.2, la restrizione di f ad I è integrabile e quindi, come volevasi, f è integrabile e la funzione $F : x\in\left[a,b\right]\rightarrow\int_a^b f(t)dt$ è, in virtù della proposizione 7.5.6, continua in $\left[a,b\right]$ e derivabile in $\left]a,b\right[$ e pertanto, in virtù della proposizione 5.3.3, esiste un elemento c di $]a,b[$ tale che risulti: $F(b)-F(a)=F'(c)(b-a)$ e di qui consegue quanto asserito quando si osservi che evidentemente è: $F(b)=\int_a^b f(t)dt$ ed $F(a)=0$ e che inoltre, in virtù della proposizione 7.5.6, risulta: $F'(c)=f(c)$.

A fatica ultimata non mi resta altro da fare se non ringraziare Mauro Bisceglia per il suo prezioso aiuto, senza del quale a me sarebbe stato impossibile porre gli appunti in questa nuova veste e quindi non avrei potuto correggere alcuni errori e colmare qualche omissione esistenti nella precedente stesura e da Mauro Bisceglia puntualmente individuati.

Luigi Albano

Bari, 16 luglio 2007

INDICE ANALITICO
(i numeri in parentesi indicano le pagine)