Riguardo agli integrali di funzioni razionali.

- **Nel caso il polinomio al numeratore, ha grado maggiore o uguale** del polinomio al denominatore, si procede con la divisione tra i polinomi:

$$\int \frac{2x^2+x-5}{3x-1}dx=\int\left(\frac{2}{3}x+\frac{5}{9}-\frac{\frac{40}{9}}{3x-1}\right)dx=\frac{2}{3}\int xdx+\frac{5}{9}\int dx-\frac{40}{9\cdot 3}\int\frac{1\cdot 3}{3x-1}dx=$$

$$=\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{9}x-\frac{40}{27}\log|3x-1|+c$$

- **Nel caso in cui il polinomio al denominate ha** $\Delta<0$, del tipo:

$$\int\frac{1}{2x^2-x+1}dx$$

Si ricorda che tale polinomio può essere scritto:

$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$ e conseguentemente ridurlo al tipo

$a\frac{\left(\left(\frac{2ax+b}{2a}\right)^2-\frac{-\Delta}{4a^2}\right)}{\frac{\Delta}{4a^2}}\frac{\Delta}{4a^2}=\Delta\frac{\left(\left(\frac{2ax+b}{2a}\sqrt{\frac{4a^2}{\Delta}}\right)^2+1\right)}{4a}$ e quindi

$\frac{1}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{\Delta\frac{\left(\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2+1\right)}{4a}}=\frac{4a}{\Delta}\frac{1}{1+\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2}$ che è del tipo $\frac{4a}{\Delta}\frac{1}{1+(f(x))^2}$ per cui

$\frac{4a}{\Delta}\frac{1}{1+(f(x))^2}\frac{f'(x)}{f'(x)}=\frac{4a}{\Delta f'(x)}\frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$, quindi

$$\int\frac{4a}{\Delta f'(x)}\frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}dx=\frac{4a}{\Delta f'(x)}\int\frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}dx=\frac{4a}{\Delta f'(x)}arctgf(x)$$

Pertanto l'integrale assegnato, diventa:

$$\int \frac{1}{2x^2 - x + 1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\left(\frac{4x-1}{4}\frac{4}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1\right)\frac{7}{16}}dx = \frac{8}{7}\frac{\sqrt{7}}{4}\int \frac{\frac{4}{\sqrt{7}}}{1 + \left(\frac{4x-1}{\sqrt{7}}\right)^2}dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}}arctg\left(\frac{4x-1}{\sqrt{7}}\right) + c$$

- **Nel caso in cui il polinomio al denominate ha** $\Delta > 0$, del tipo:

$$\int \frac{1}{2x^2 + x - 1}dx$$

Trovate le soluzioni, possiamo scrivere $ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ e quindi si ha

$$\frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a}\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{1}{a}\frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\beta)} = \frac{1}{a}\frac{A(x-\beta) + B(x-\alpha)}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{1}{a}\frac{(A+B)x - A\beta - B\alpha}{(x-\alpha)(x-\beta)}$$

Per cui per l'identità dei polinomi, basta risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A\beta - B\alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} A = -B \\ B(\beta - \alpha) = 1 \end{cases} = \begin{cases} A = -\frac{1}{(\beta-\alpha)} \\ B = \frac{1}{(\beta-\alpha)} \end{cases}$$

Pertanto $\frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a}\frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\beta)} = \frac{1}{a}\frac{\frac{-1}{(\beta-\alpha)}}{(x-\alpha)} + \frac{\frac{1}{(\beta-\alpha)}}{(x-\beta)}$

Quindi $\int \frac{1}{ax^2 + bx + c}dx = -\frac{1}{a(\beta-\alpha)}\int \frac{1}{(x-\alpha)}dx + \frac{1}{a(\beta-\alpha)}\int \frac{1}{(x-\beta)}dx =$

$$= -\frac{1}{a(\beta-\alpha)}\log|x-\alpha| + \frac{1}{a(\beta-\alpha)}\log|x-\beta|$$

Pertanto l'integrale assegnato, diventa:

$$\int \frac{1}{2x^2 + x - 1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1)}dx$$

Per cui $\frac{1}{2}\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)}=\frac{1}{2}\frac{A}{\left(x-\frac{1}{2}\right)}+\frac{B}{(x+1)}=\frac{1}{2}\frac{A(x+1)+B\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)}=\frac{1}{2}\frac{x(A+B)+A-\frac{1}{2}B}{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)}$

Da cui

$$\begin{cases}A+B=0\\A-B\frac{1}{2}=1\end{cases}=\begin{cases}A=-B\\-B-B\frac{1}{2}=1\end{cases}=\begin{cases}A=-B\\-B\left(1+\frac{1}{2}\right)=1\end{cases}=\begin{cases}A=\frac{2}{3}\\B=-\frac{2}{3}\end{cases}$$

Pertanto

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+1)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\frac{2}{3}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)}dx+\int\frac{-\frac{2}{3}}{(x+1)}dx=\frac{1}{3}\log\left|x-\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{3}\log|x+1|+c=\frac{1}{3}\log\left|\frac{2x-1}{2x+2}\right|+c$$

- **Nel caso in cui il polinomio al denominate ha** $\Delta=0$ del tipo:

$$\int\frac{1}{x^2+2x+1}dx$$

Trovata la soluzione doppia del polinomio, si ha:

$$\int\frac{1}{x^2+2x+1}dx=\int\frac{1}{(x+1)^2}dx=\int(x+1)^{-2}dx=-(x+1)^{-2+1}+c=-\frac{1}{(x+1)}+c.$$

- **Nel caso in cui il polinomio al denominate, scomposto**, è del tipo:

$$\int\frac{x+1}{(x-1)(x^2-x+1)}dx$$

con il polinomio di secondo grado, con $\Delta<0$

possiamo $\frac{A}{(x-1)}+\frac{Bx+C}{(x^2-x+1)}=\frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2-x+1)}=\frac{Ax^2-Ax+A+Bx^2-Bx+Cx-C}{(x-1)(x^2-x+1)}$

Da cui per l’identità dei polinomi si ha:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A-B+C=1 \\ A-C=1 \end{cases} = \begin{cases} A=-B \\ B-B+C=1 \\ A-C=1 \end{cases} = \begin{cases} A=-B \\ C=1 \\ A-1=1 \end{cases} = \begin{cases} B=-2 \\ C=1 \\ A=2 \end{cases}$$

Pertanto

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2-x+1)}dx = \int \frac{2}{x-1}dx + \int \frac{-2x+1}{x^2-x+1}dx = 2\log|x-1| + \int \frac{-2x+1}{x^2-x+1}dx$$

Mentre il secondo integrale, osservando che la derivata del polinomio al denominatore è $2x-1$, possiamo scriverlo:

$$\int \frac{-2x+1}{x^2-x+1}dx = -\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx = -\log|x^2-x+1|,$$

quindi $\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2-x+1)}dx = 2\log|x-1| - \log|x^2-x+1| + c$

- **Nel caso in cui il polinomio al denominate, scomposto**, è del tipo:

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+1)^2}dx$$

con il polinomio di secondo grado, con $\Delta = 0$

possiamo

$$\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} + D\frac{C}{(x+1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} - \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) - C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} =$$

$$= \frac{Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 - B - Cx + C}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (2A-C)x + A - B + C}{(x-1)(x+1)^2}$$

Da cui per l'identità dei polinomi si ha:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A-C=0 \\ A-B+C=1 \end{cases} = \begin{cases} A=-B \\ -2B-C=0 \\ -2B+C=1 \end{cases} = \begin{cases} A=-B \\ -2B-C=0 \\ -2B+C=1 \end{cases} = \begin{cases} A=\frac{1}{4} \\ C=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

Pertanto

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+1)^2}\,dx = \frac{\frac{1}{4}}{(x-1)} + \frac{-\frac{1}{4}}{(x+1)} - \frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log|x+1| + \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)} + c$$