

Esercitazione n. 09

1) Date le seguenti funzioni, studiare la loro convessità:

a) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4}}$

b) $f(x) = \log_{1/2} \log_2 x$

c) $f(x) = 2^{x^2-1} - 3$

d) $f(x) = \arcsen(2x-1)$

e) $f(x) = \log_{1/2}(2\text{sen}x - 1)$

2) Date le seguenti funzioni, verificare se soddisfano le ipotesi dei teoremi di Weierstrass e/o di Bolzano:

a) $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \forall x \leq 1 \\ \log_2 2^{\frac{e}{x}} & \forall x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} e^{\log(x-1)} & \forall x > 1 \\ \arccos x & \forall x \leq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \text{sen}2x - e^x \text{arctg}^2 x, \forall x \in \{1,2,3\} \cup [0,1[$

d) $f(x) = \text{arctg} \frac{1}{x}, \forall x \in [-1,0[\cup]0,1] \cup \{2,3,5\}$

e) $f(x) = \begin{cases} -h \frac{\pi}{2} & \text{se } x > -1 \\ \pi & \text{se } x = -1 \\ \text{arc cot } g \frac{1}{x+1} & \text{se } x < -1 \end{cases}$

3) Date le seguenti funzioni, verificare se soddisfano le ipotesi del teorema di Rolle:

a) $f(x) = kx^2 - 2x + \frac{1}{2}, \forall x \in [0,1]$

b) $f(x) = \begin{cases} 1+h & x=0 \\ e^x \frac{\arcsen \log(x+1)}{x} - hx & \forall x \in]0,1] \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} h & \forall x = \{-1,1\} \\ (1-x^2) \arcsen x & \forall x \in]-1,1[\end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 2x+h & \forall x \in [-2,1[\\ 2^x - h & \forall x \in [1,2] \end{cases}$

e) $f(x) = k2x^2 - 2kx - \frac{1}{3}, \forall x \in [-1,1]$

4) Date le seguenti funzioni, verificare se soddisfano le ipotesi del teorema del Punto Fisso:

a) $f(x) = hx^2 - 2h, \forall x \in [0,1]$

b) $f(x) = \begin{cases} h & \forall x = \{-1,1\} \\ (1-x^2) \sen(1-x^2) & \forall x \in]-1,1[\end{cases}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 1}, \forall x \in \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2 \right]$

d) $f(x) = |x^2 - h|, \forall x \in [-1,2]$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \forall x \in [-1,0[\\ 3x - 1 & \forall x \in [0,1] \end{cases}$

5) Date le seguenti funzioni, dire se sono limitate ed individuare gli eventuali punti di minimo e/o di massimo relativi ed assoluti:

a) $f(x) = \text{sen}(x^2), \forall x \in \left[0, \sqrt{\frac{5}{2}\pi}\right]$

b) $f(x) = |x^2 - x|, \forall x \in [-1, 2]$

c) $f(x) = e^{-x^2} \sqrt{x}, \forall x \in [0, 2]$

d) $f(x) = \arccos(\log x)^2$

e) $f(x) = \arcsen(e^x - 1)$

6) Calcolare i limiti significativi delle seguenti funzioni:

a) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$

b) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4}}$

c) $f(x) = \log_{1/2}(\log_2(x))$

d) $f(x) = \log_2(x+2)$

e) $f(x) = 2^{x^2-1} - 3$

f) $f(x) = \log_{1/5}(1-2^x)$

g) $f(x) = \log_2 \frac{x-1}{x+1}$

h) $f(x) = \log \arccos \log_{1/4}(2^x - 1)$

i) $f(x) = \text{arctg} \log_{3/2}(3^x - 9)$

j) $f(x) = \operatorname{arcsen}(2x - 1)$

k) $f(x) = \operatorname{arcsen}(2^x - 1)$

l) $f(x) = \operatorname{arccos}(2 - \log_{1/2}(2x + 1))$

m) $f(x) = \sqrt{\frac{x^4 - 16}{3 + 2x - x^2}}$

n) $f(x) = \log_{1/2}(2\operatorname{sen}x - 1)$

o) $f(x) = \frac{x \cdot |x|}{1 + x}$

p) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + x$