Teoremi sulle funzioni continue (con dimostrazione)

Teorema di Bolzano

Sia $f : X \to R$,

se

X è un intervallo

se

f è continua

allora

$f(X)$ è un intervallo e conseguentemente f assume tutti i valori compresi tra due suoi valori.

Dimostrazione

Se f è costante, assume sempre lo stesso valore, quindi è dimostrato. In caso contrario, se consideriamo due elementi $x_1, x_2 \in X$ che risulti $f(x_1) < f(x_2)$, essendo $f(X)$ un intervallo di *R*, si ha:

$$[f(x_1), f(x_2)] \subseteq f(X) \text{ e pertanto se } y \in [f(x_1), f(x_2)] \Leftrightarrow y \in f(X)$$

$$\text{e quindi } \exists x \in X \text{ tale che } f(x) = y.$$

Teorema degli Zeri

Sia $f : [a,b] \to R$,

se

$$f \text{ è continua}$$

se

$$f(a)\cdot f(b) < 0$$

allora

$$\exists x_0 \in \left]a,b\right[\text{ tale che } f(x_0) = 0 .$$

Dimostrazione

In tale Teorema ricorrono tutte le ipotesi del teorema di Bolzano, pertanto $f([a,b])$ è un intervallo, e considerando i due valori $\{f(a), f(b)\} \in f([a,b])$, si ha:

$$[f(a), f(b)] \subseteq f([a,b]) \text{ e ricordando che } f(a)\cdot f(b) < 0 \text{, pertanto } 0 \in [f(a), f(b)] \Leftrightarrow 0 \in f([a,b])$$

$$\text{quindi } \exists x_0 \in \left]a,b\right[\text{ tale che } f(x_0) = 0 .$$