Teoremi su limiti (con dimostrazione)

Teorema dell'unicità del limite

Sia $f : X \to R$,

sia $x_0 \in \hat{R}$ in cui è possibile effettuare il limite su X

sia $L \in \hat{R}$

se

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

allora

è unico.

Dimostrazione

Si procede per assurdo, quindi poniamo che esistono due limiti diversi, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ ed $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_2$, conseguentemente esisteranno due intorni tali che $I_{L_1} \cap I_{L_2} = \emptyset$.

Per la definizione di limite, in corrispondenza di I_{L_1}

$$\exists I'_{x_0} \text{ t.c. } \forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I'_{x_0} \text{ risulta } f(x) \in I_{L_1}.$$

ed in corrispondenza di I_{L_2}

$$\exists I''_{x_0} \text{ t.c. } \forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I''_{x_0} \text{ risulta } f(x) \in I_{L_2}.$$

Quindi se consideriamo l'intorno $I_{x_0} = I'_{x_0} \cap I''_{x_0}$ risulterà:

$$\forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I_{x_0} \text{ risulta } f(x) \in I_{L_1} \cap I_{L_2} \Leftrightarrow f(x) \in \emptyset$$

e questo è assurdo, pertanto la tesi è confermata.

III Teorema del confronto o, dei Carabinieri

Sia $f : X \to R$, *sia* $g : X \to R$ e *sia* $h : X \to R$

sia $x_0 \in \hat{R}$ in cui è possibile effettuare il limite su X

sia $L \in \hat{R}$

se

$$\exists I_{x_0} \text{ t.c. } \forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I_{x_0} \text{ risulta } h(x) \leq f(x) \leq g(x).$$

e se

$$\exists \lim_{x \to x_0} h(x) = L \text{ ed } \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

allora

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L .$$

Dimostrazione

Per la definizione di limite, in riferimento alla funzione *h*, si ha

$$\forall I_L,\ \exists I'_{x_0} \text{ t.c. } \forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I'_{x_0} \text{ risulta } h(x) \in I_L .$$

in riferimento alla funzione *g*, si ha

$$\forall I_L,\ \exists I''_{x_0} \text{ t.c. } \forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I''_{x_0} \text{ risulta } g(x) \in I_L .$$

Quindi se consideriamo l'intorno $J_{x_0} = I_{x_0} \cap I'_{x_0} \cap I''_{x_0}$ si ha:

$$\forall x \in (X - \{x_0\}) \cap J_{x_0} \text{ risulta } f(x) \in [h(x), g(x)] \text{ ed anche } h(x) \in I_L \text{ e } g(x) \in I_L$$

per cui per il teorema sulla caratterizzazione degli intervalli si ha:

$$[h(x), g(x)] \subseteq I_L$$

e conseguentemente $f(x) \in I_L$,

quindi si è costruita la definizione di limite anche per la funzione *f*, ovvero:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$