Sul valore assoluto

Parlare di **valore assoluto** di un numero reale $x \in R$ equivale a scrivere $|x|$ e tale valore risulta:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

quindi possiamo subito affermare che $|x| \geq 0$ risulta vero $\forall x \in R$.

Ad esempio

$|3| = 3$ e $|-3| = -(-3) = 3$;

oppure, data la funzione $2x+1$, parlare del suo valore assoluto, equivale a scrivere

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } 2x+1 \geq 0 \\ -(2x+1) & \text{se } 2x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } 2x+1 \geq 0 \\ -2x-1 & \text{se } 2x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x-1 & \text{se } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

quindi considerare la funzione data, $2x+1$ in valore assoluto, equivale a scriver $|2x+1|$ oppure a riportare $2x+1$ per quei valore della variabile indipendente $x \geq -\frac{1}{2}$, e $-2x-1$ per quei valore della variabile indipendente $x < -\frac{1}{2}$

Alcune **proprietà** del valore assoluto.

Se consideriamo un qualsiasi numero $a \in R$, e poniamo il caso che sia negativo, $a < 0$, possiamo subito affermare che

$|x| \geq a$ risulta sempre vera, $\forall x \in R$;

se $a = 0$,

$|x| \geq a$ risulta ancora sempre vera, $\forall x \in R$.

Nel caso in cui il numero reale sia positivo, $a > 0$, allora

$$|x| \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a & \text{se } x \geq 0 \\ -x \geq a & \text{se } x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a & \text{se } x \geq 0 \\ x \leq -a & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

quindi $|x| \geq a \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\infty, -a\right] \cup \left[a, +\infty\right[$.

Come si può osservare dal grafico della fig. 1, nel caso consideriamo $a = 3$, la funzione valore assoluto assume valori maggiori di 3, solo se consideriamo valori della variabile indipendenti a destra di 3 ed a sinistra di -3.

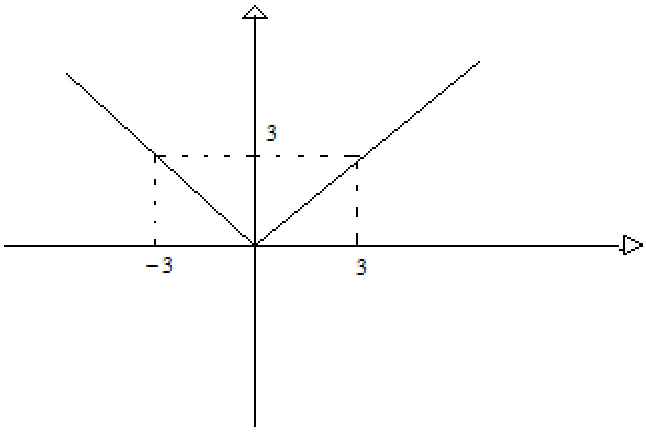

Fig. 1

Seguendo lo stesso ragionamento, possiamo affermare, sempre nel caso in cui il numero reale sia positivo, $a > 0$, che

$$|x| \leq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq a & \text{se } x \geq 0 \\ -x \leq a & \text{se } x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq a & \text{se } x \geq 0 \\ x \geq -a & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Quindi $|x| \leq a \Leftrightarrow \forall x \in [-a, a]$.

Se si osservare la fig. 1, sempre nell'ipotesi di $a = 3$, si nota come il grafico della funzione valore assoluto assume valori minori di 3, solo se consideriamo valori della variabile indipendenti compresi tra -3 e 3.

Naturalmente nel caso si volessero considerare le seguenti disuguaglianze:

$|x| > a$ e $|x| < a$,

vanno fatti gli stessi ragionamenti di cui sopra, nel rispetto della stretta disuguaglianza.

Infine, con $x, y \in R$ risultano interessanti le seguenti relazioni:

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$