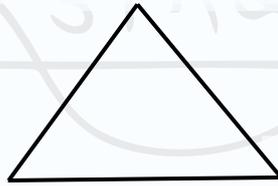


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI "ALDO MORO"  
"DIPARTIMENTO DI ECONOMIA E FINANZA"

Mauro G. Bisceglia

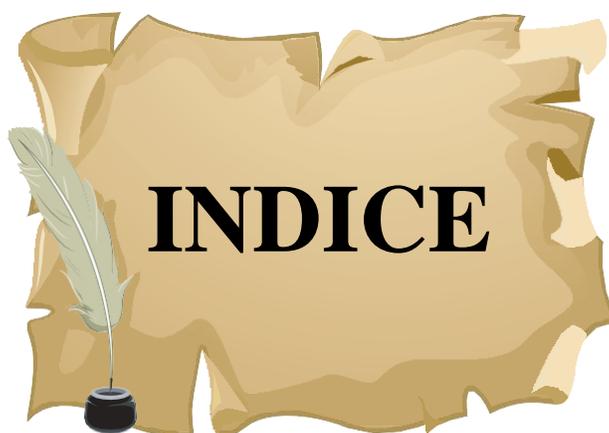
Anisa Bakiu



Kamela Dedaj

# Appunti di Matematica per l'Economia





## Sommario

Capitolo 1: Gli insiemi.....	3
1.1 Definizione di insieme.....	3
1.2 Gli insiemi numerici.....	5
1.3 Minimo e massimo di un insieme .....	6
1.4 Minorante e maggiorante di un insieme.....	7
1.5 Estremo inferiore e superiore di un insieme .....	7
1.6 Partizione di un insieme .....	8
1.7 Gli intervalli.....	8
Capitolo 2: Le funzioni.....	9
2.1 Definizione di funzione .....	9
2.2 Caratteristiche delle funzioni.....	11
2.3 Funzione composta.....	17
Capitolo 3: Alcune proprietà delle funzioni.....	18
3.1 Minimo e massimo di una funzione .....	18
3.2 Minorante e maggiorante di una funzione.....	18
3.3 Estremo inferiore e superiore di una funzione .....	19
3.4 Monotonia di una funzione .....	20
3.5 Funzione convessa e concava.....	23
3.6 Funzione periodica.....	25
Capitolo 4: Alcune funzione elementari.....	27
4.1 Grafici e proprietà .....	27
4.2 L'equazione della retta .....	36
4.3 Valore assoluto.....	43
Capitolo 5: I limiti.....	46

5.1 Concetti preliminari.....	46
5.2 Definizione di limite.....	48
5.3 Teoremi sui limiti.....	53
5.4 Il numero di Nepero.....	59
Capitolo 6: Le funzioni continue.....	60
6.1 Definizione di funzione continua.....	60
6.2 Teoremi sulle funzioni continue.....	63
6.3 Gli asintoti.....	68
Capitolo 7: Derivate.....	73
7.1 Definizione di derivata.....	73
7.2 Derivabilità di una funzione.....	75
7.3 Alcune derivate di funzioni elementari.....	78
7.4 Alcune regole fondamentali di derivazione.....	79
7.5 Deviazione di secondo ordine.....	80
7.6 Minimo e massimo assoluto/relativo.....	82
7.7 Teoremi sulla derivazione.....	83
Capitolo 8: Integrazione.....	86
8.1 Definizione di integrale.....	86
8.2 Alcuni integrali indefiniti immediati.....	89
8.3 Alcuni integrali definiti quasi immediati.....	90
8.4 Alcuni integrali di funzioni razionali.....	92
8.5 Integrazione per parte.....	95
8.6 Teoremi sugli integrali.....	99
Capitolo 9: Algebra lineare.....	101
9.1 Definizione di matrice.....	101
9.2 Proprietà delle matrici.....	103
9.3 Determinante di una matrice.....	107
9.4 Sistemi lineari.....	108
Capitolo 10: Funzioni di due variabili.....	119
10.1 Definizioni preliminari.....	119
10.2 Alcuni utili teoremi.....	123
10.3 Metodo dei moltiplicatori di Lagrange.....	129

# Capitolo 1

## Gli insiemi

### 1.1 – Definizione di insieme

Quali sono i pezzi che compongono il puzzle degli insiemi?



Gli insiemi possono essere rappresentati in 3 modi:

Rappresentazione grafica:

$$A = \left( \begin{array}{c} \sqrt{2} \\ 1 \quad \text{Anisa} \\ 3 \end{array} \right)$$

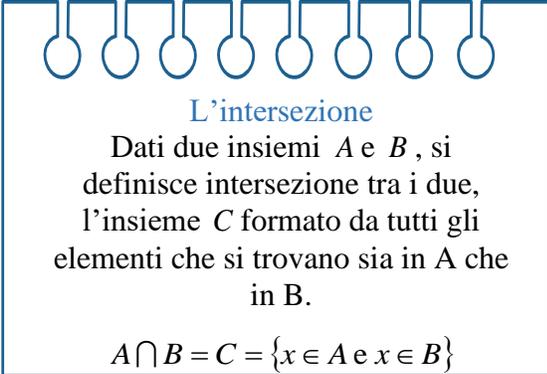
Rappresentazione per elencazione:

$$A = \{1, \sqrt{2}, \text{Anisa}, 4, 5\}$$

### Rappresentazione per caratteristica:

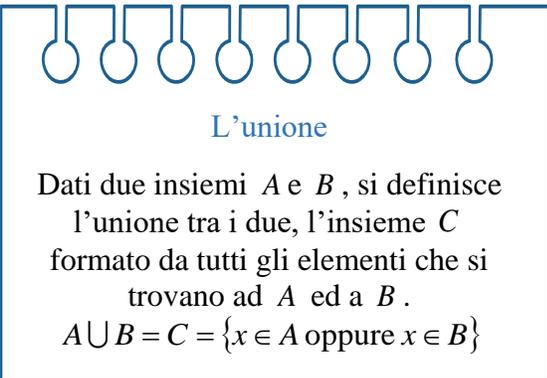
$$A = \{x : x \in N \text{ e } x \leq 5\}$$

### Operazioni tra insiemi:



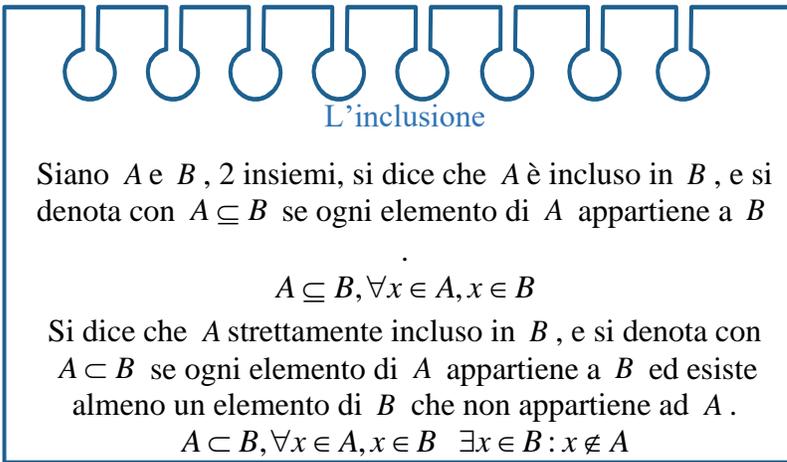
L'intersezione

Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , si definisce intersezione tra i due, l'insieme  $C$  formato da tutti gli elementi che si trovano sia in  $A$  che in  $B$ .

$$A \cap B = C = \{x \in A \text{ e } x \in B\}$$


L'unione

Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , si definisce l'unione tra i due, l'insieme  $C$  formato da tutti gli elementi che si trovano ad  $A$  ed a  $B$ .

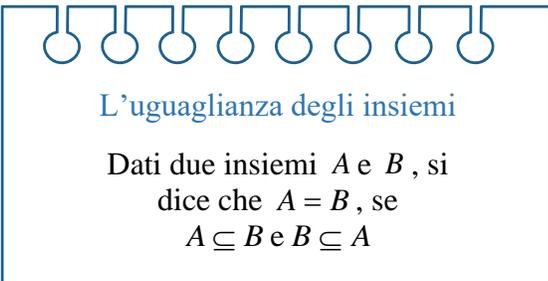
$$A \cup B = C = \{x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$


L'inclusione

Siano  $A$  e  $B$ , 2 insiemi, si dice che  $A$  è incluso in  $B$ , e si denota con  $A \subseteq B$  se ogni elemento di  $A$  appartiene a  $B$ .

$$A \subseteq B, \forall x \in A, x \in B$$

Si dice che  $A$  strettamente incluso in  $B$ , e si denota con  $A \subset B$  se ogni elemento di  $A$  appartiene a  $B$  ed esiste almeno un elemento di  $B$  che non appartiene ad  $A$ .

$$A \subset B, \forall x \in A, x \in B \quad \exists x \in B : x \notin A$$


L'uguaglianza degli insiemi

Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , si dice che  $A = B$ , se

$$A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A$$

Alcune proprietà sugli insiemi:

Dati  $A$ ,  $B$  e  $C$  tre insiemi numerici, si osservano le seguenti proprietà:

**Proprietà commutativa:**  
 $A \cup B = B \cup A$  e  $A \cap B = B \cap A$

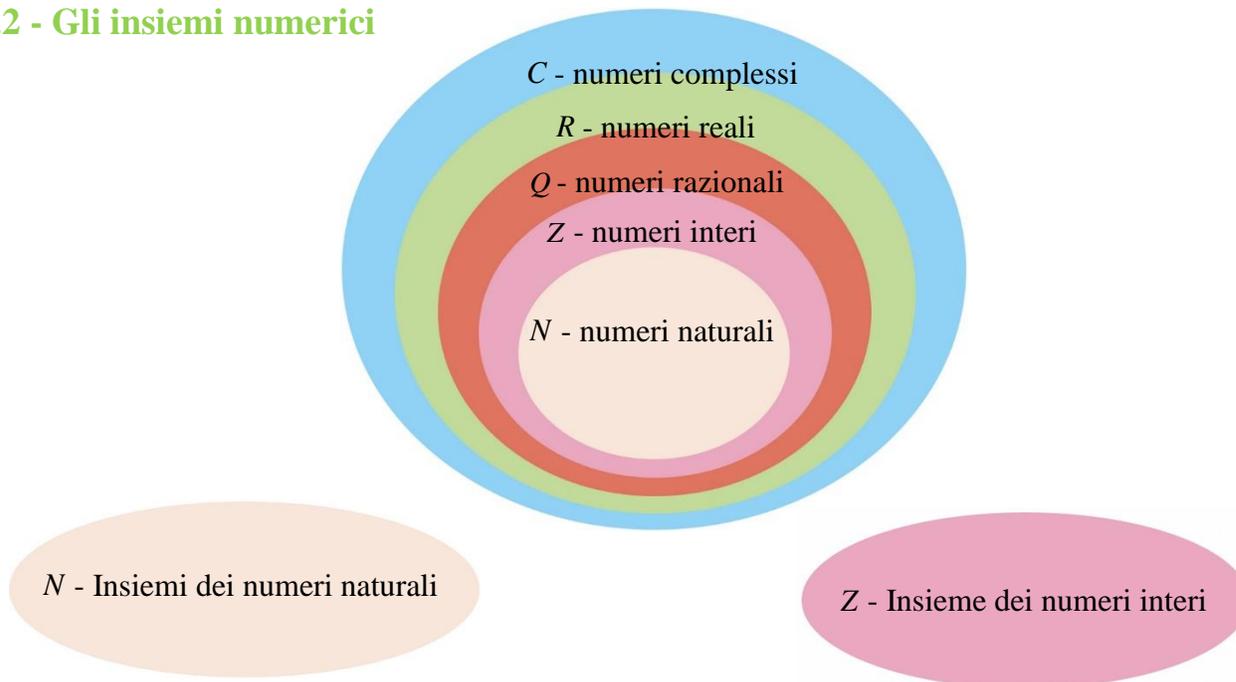
**Proprietà associativa:**  
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$   
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

**Proprietà distributiva dell'unione  
rispetto intersezione:**  
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

**Proprietà distributiva dell'intersezione  
rispetto all'unione:**  
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Siano  $A$  e  $B$  due insiemi:  
 $A$  e  $B$  sono disgiunti se:  $A \cap B = \emptyset$   
 $A$  e  $B$  sono separati se:  $A \cap B = \emptyset$  e  $\forall a \in A$  e  $b \in B : a < b$   
 $A$  e  $B$  sono contigui quando:  $\sup A = \inf B$  o  $\sup B = \inf A$

## 1.2 - Gli insiemi numerici



$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

$$Z = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

$Q$  - Insieme dei numeri razionali

$$Q = \left\{ x \in R, x = \frac{m}{n}, \text{ con } m \in Z \text{ e } n \in N \right\}$$

$$(R - Q) = \{\text{numeri irrazionali}\}$$

$R$  - Insieme dei numeri reali

$$(Q \subset R) \Leftrightarrow \{\forall x \in Q, x \in R\}$$

$$(R - Q) = \{x \in R, x \notin Q\}$$

$C$  - Insieme dei numeri complessi

$$(R \subseteq C) \Leftrightarrow \{\forall a \in R : a \in C\}$$

### 1.3 – Minimo e massimo di un insieme

Sia  $A \subseteq R$ , si dice **minimo** di  $A$ , se esiste, quel numero  $m \in R$ , tale che è il più piccolo elemento dell'insieme  $A$ .

$$\min A = m \Leftrightarrow \begin{cases} m \in A \\ \forall x \in A : x \geq m \end{cases}$$

Sia  $A \subseteq R$ , si dice **massimo** di  $A$ , se esiste, quel numero  $M \in R$ , tale che è il più grande elemento dell'insieme  $A$ .

$$\max A = M \Leftrightarrow \begin{cases} M \in A \\ \forall x \in A : x \leq M \end{cases}$$

## 1.4 – Minorante e maggiorante di un insieme

Sia  $X \subseteq R$ , si dice **minorante** di  $X$ , se esiste, quel numero reale  $h$  che è minore o uguale di tutti gli elementi dell'insieme  $X$ .

$$\text{minorante: } \exists h \in R / \forall x \in X : x \geq h$$

Sia  $X \subseteq R$ , si dice **maggiorante** di  $X$ , se esiste, quel numero reale  $k$  che è maggiore o uguale di tutti gli elementi dell'insieme  $X$ .

$$\text{maggiorante: } \exists k \in R / \forall x \in X : x \leq k$$

Se esiste un minorante  $h$  dell'insieme  $C$ , esistono infiniti minoranti (per esempio  $h-1$  è un altro minorante,  $h-2$   $h-3$ , ect.)

Se esiste un maggiorante  $k$  dell'insieme  $C$ , esistono infiniti maggioranti (per esempio  $k+1$  è un altro maggiorante,  $k+2$   $k+3$ , ect.)

## 1.5 – Estremo inferiore e superiore di un insieme

Sia  $X$  un sottoinsieme di  $R$

Si dice estremo **inferiore** dell'insieme  $X$  il più grande dei minoranti.

$$\inf X = h \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in X : x \geq h \\ \forall \varepsilon > 0 \exists x \in X < h + \varepsilon \end{cases}$$

Si dice estremo **superiore** dell'insieme  $X$  il più piccolo dei maggioranti.

$$\sup X = k \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in X : x \leq k \\ \forall \varepsilon > 0 \exists x \in X > k - \varepsilon \end{cases}$$

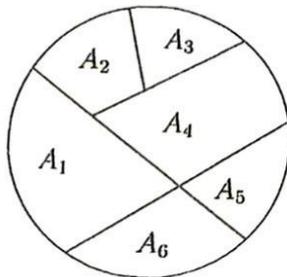
## 1.6 – Partizione di un insieme

Sia  $A$  un insieme, e siano  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ,  $n$  suoi sottoinsiemi.

Si dice che gli  $n$  sottoinsiemi formano una partizione di  $A$  se, sono a due a due disgiunti e se, la loro unione è uguale all'insieme  $A$ . In simboli si ha:

dire che

$\{A_1, \dots, A_n\}$  è una partizione di  $A \Leftrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j$  e  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A$



## 1.7 – Gli intervalli



*Teorema sulla caratterizzazione degli intervalli*

Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$ , con  $I \neq \emptyset$

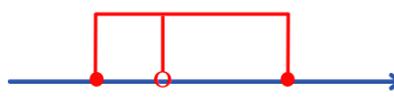
Condizione necessaria e sufficiente affinché  $I$  sia un intervallo di  $\mathbb{R}$ , è:

$(\forall a, b \in I, \text{ con } a < b, \text{ risulta } [a, b] \subseteq I \text{ o } ]a, b[ \subseteq I)$  e quindi  $I$  è un intervallo



questo è un intervallo

*fig. 1.7.1*



questo non è un intervallo

*fig. 1.7.2*

## Capitolo 2

### Le funzioni

#### 2.1 – Definizione di funzione



Cos'è una funzione?

Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , la funzione è quella legge che ad ogni elemento dell'insieme di partenza  $A$ , associa uno ed un solo elemento dell'insieme di arrivo  $B$ :

$$f : \forall x \in A \rightarrow f(x) = y \in B$$


*Attenzione:*

Quando parliamo dell'insieme di partenza è la stessa cosa di parlare del dominio, mentre l'insieme di arrivo non sempre coincide con il codominio.

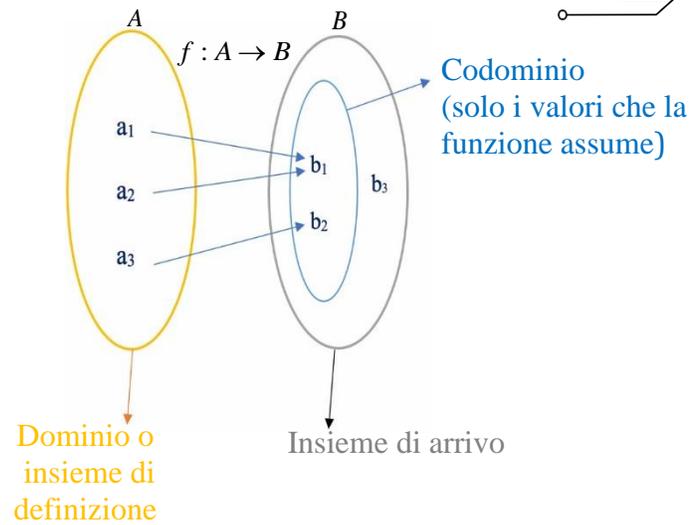
**L'immagine**

Data una funzione  $f : X \rightarrow Y$ , si denota con  $f(X)$  l'immagine di  $X$  tramite la funzione  $f$ .

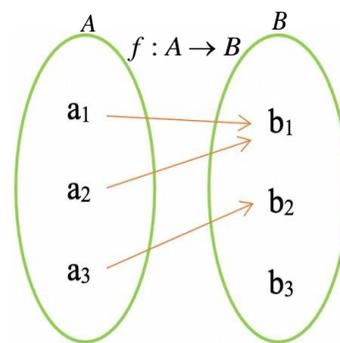
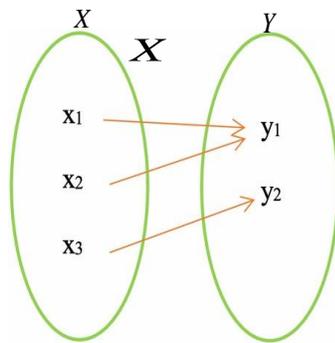
L'immagine contiene tutti i valori della funzione e coincide con il codominio.

Se  $f : X \rightarrow Y$ , allora insieme di arrivo e codominio coincidano.

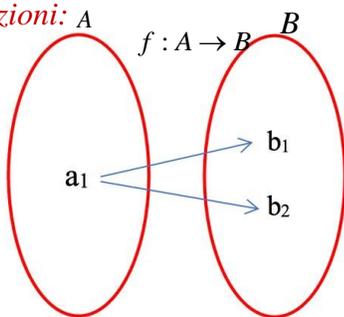
## Esempi



Sono funzioni:

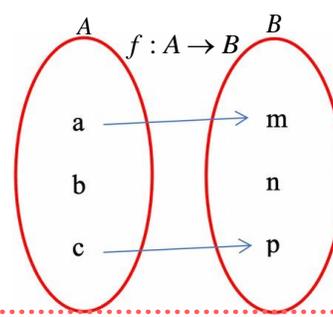


Non sono funzioni:



Questa non è una funzione in quanto ad un elemento di  $A$  corrispondono due elementi di  $B$ .

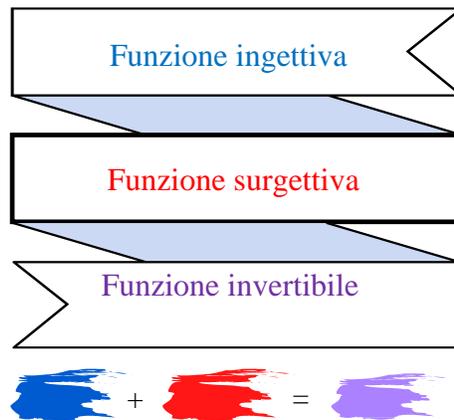
Perché non è funzione?



Questa non è una funzione in quanto un elemento di  $A$  non ha il corrispondente in  $B$ .

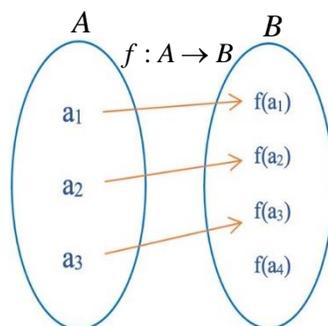
Perché non è funzione?

## 2.2 – Caratteristiche delle funzioni

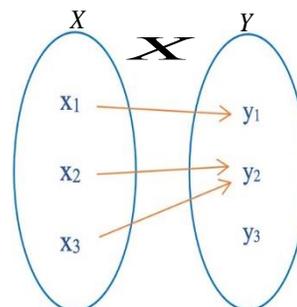


**Funzione iniettiva**  
Una funzione  $f : A \rightarrow B$  si dice iniettiva se ad elementi distinti del dominio associa valori distinti.  
Ovvero:  
 $\forall a_1, a_2$  con  $a_1 \neq a_2 : f(a_1) \neq f(a_2)$

### Esempi



Questa è una  
funzione iniettiva

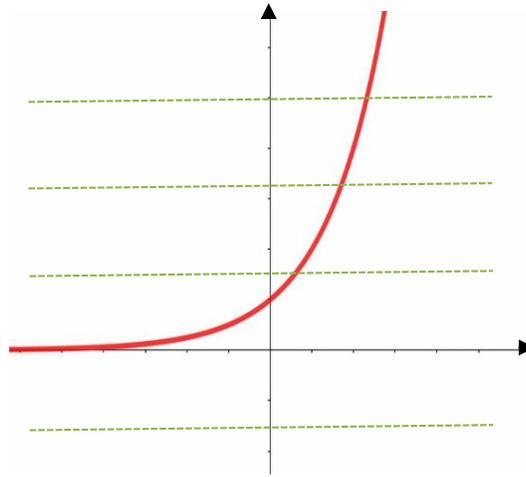


Questa non è una  
funzione iniettiva



Come possiamo conoscere una funzione iniettiva dal grafico?

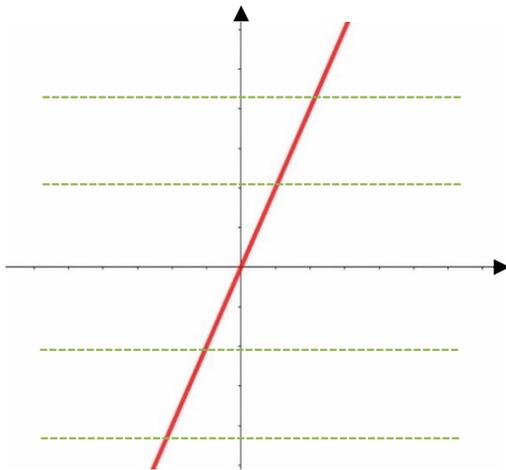
Facciamo il **test della retta orizzontale**



*fig.2.2.1*

La funzione è iniettiva se comunque si traccia una retta orizzontale, interseca il grafico al più in un solo punto.

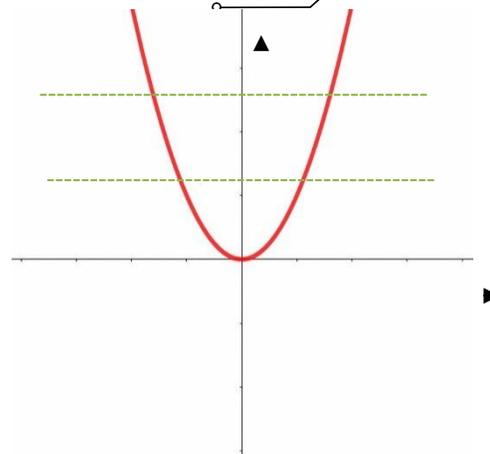
Esempi



*fig.2.2.2*

La funzione è iniettiva perché la retta interseca il grafico al più in un solo punto.

$y=mx$



*fig.2.2.3*

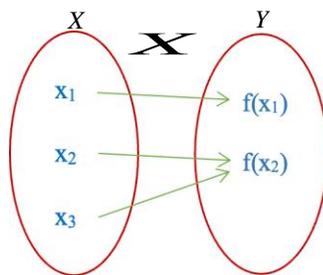
La funzione non è iniettiva perché la retta interseca il grafico in 2 punti.

Potenza con "n" pari

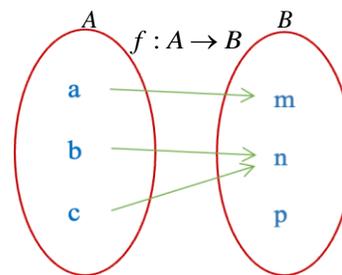
### Funzione surgettiva

Una funzione  $f : A \rightarrow B$  si dice surgettiva se ogni elemento del codominio è valore di almeno un elemento dell'insieme del partenza. Ovvero:  
 $\forall y \in B, \exists x \in A$  tale che  $f(x) = y$

### Esempi



Questa è una funzione surgettiva

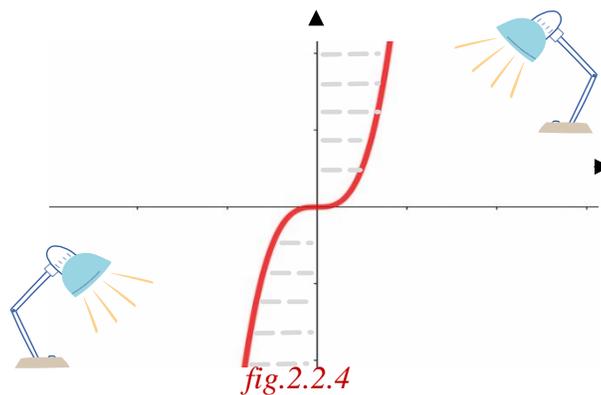


Questa non è una funzione surgettiva



Come possiamo conoscere una funzione surgettiva dal grafico?

Facciamo la prova dell'ombra:



La funzione è surgettiva quando l'ombra del grafico della funzione copre pienamente l'asse delle  $y$ .

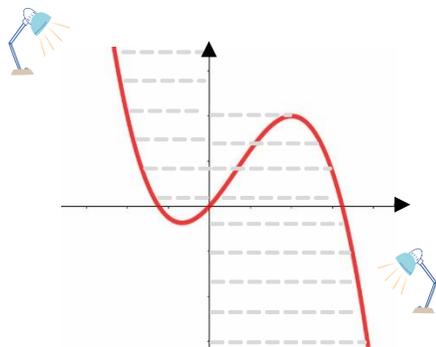


fig.2.2.5

Tale funzione  $f(x) = ax^3 + bx^2$  che va da  $]-\infty, +\infty[$ , con insieme di arrivo  $R$ , è surgettiva perché l'ombra copre tutti i valori di  $R$ .

*Perché è surgettiva?*

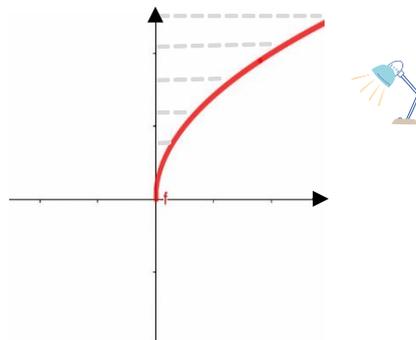


fig.2.2.6

Tale funzione  $f(x) = \sqrt{x}$  che va da  $[0, +\infty[$ , con insieme di arrivo  $R$  non è surgettiva perché l'ombra non copre tutti i valori di  $R$ .

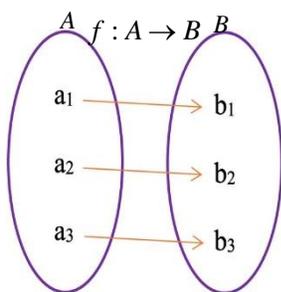
*Perché non è surgettiva?*

### Funzione invertibile

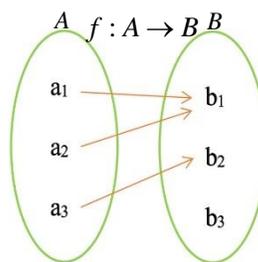
Una funzione  $f : A \rightarrow B$  si dice biiettiva o invertibile se è sia iniettiva che surgettiva.

$\forall b \in B, \exists$  uno ed un solo elemento  $a \in A$  tale che  $f(a) = b$

### Esempi



Questa è una funzione invertibile

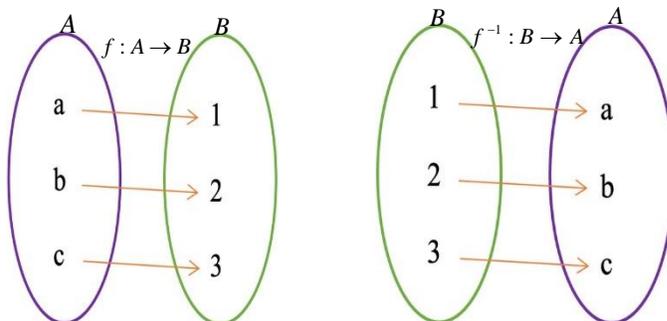


Questa non è una funzione invertibile

**Se una funzione è invertibile, la sua inversa si denota:  $f^{-1}$**

Graficamente possiamo dire che la funzione è invertibile se soddisfa 2 condizioni:

1. Comunque si traccia una retta orizzontale, deve intersecare il grafico al più in un solo punto. (per essere **ingettiva**)
2. L'ombra della funzione deve coprire pienamente l'asse delle  $y$  (Per essere **surgettiva**)



Come possiamo rendere una funzione invertibile?

Se prendiamo in considerazione la funzione  $f(x) = x^n$ , con " $n$ " pari

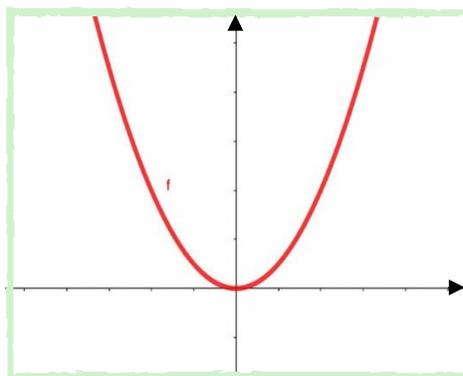


fig.2.2.7

Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

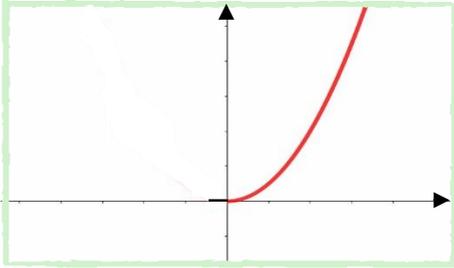
Per poter rendere invertibile tale funzione, che non è ne surgettiva ne iniettiva, operiamo:

1. restrizione (del dominio)
2. riduzione (del codominio)

quindi otteniamo:

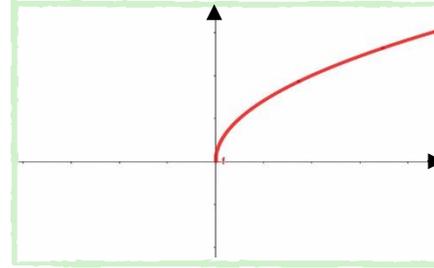
↓

$$f_1: [0; +\infty[ \rightarrow x^n \in [0; +\infty[$$



Quindi  $f_1 : [0; +\infty[ \rightarrow x^n \in [0; +\infty[$

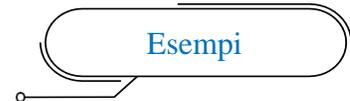
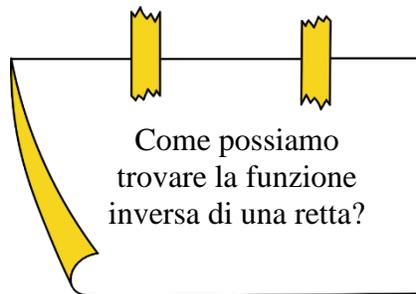
*fig. 2.2.8*



La sua inversa risulta:

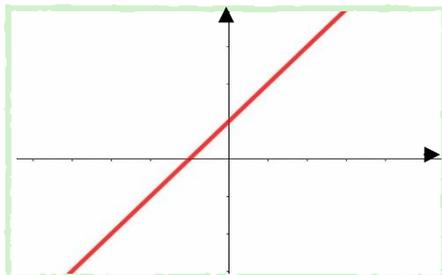
$f_1^{-1} : [0; +\infty[ \rightarrow \sqrt[n]{x} \in [0; +\infty[, \text{ con "n" pari}$

*fig. 2.2.9*



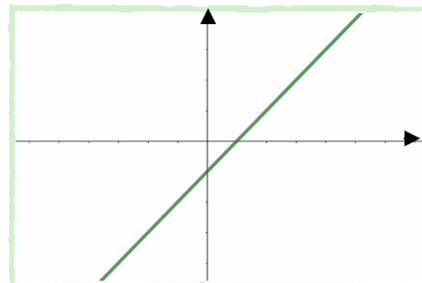
Data la funzione  $f : X \rightarrow Y$  tale che  $f(x) = y$  del tipo  $y = x + 1$  la sua inversa è tale che  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  e  $f^{-1}(y) = x$  del tipo  $x = y - 1$

I relativi grafici:



$y = x + 1$

*fig.2.2.10*



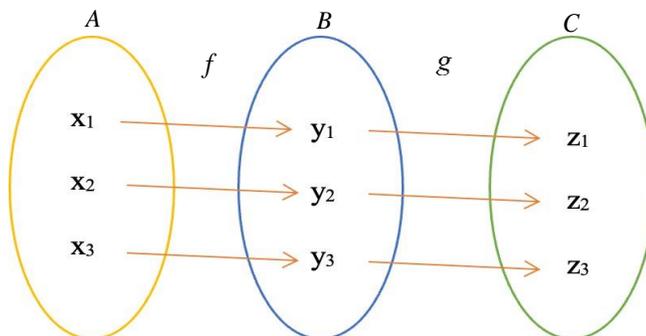
$x = y - 1$

(variabile indipendente è  $y$ )

*fig.2.2.11*

## 2.3 – Funzione composta

La funzione composta è una funzione che si ottiene mediante l'operazione di composizione tra due o più funzioni.



Sia  $f : A \rightarrow B$

Sia  $g : B \rightarrow C$

La funzione composta  $g \circ f : A \rightarrow C$  ovvero nel dominio della funzione  $g$

Si osserva che  $g$  si nutre dei valori di  $f$ .

$g \circ f \neq f \circ g$ , in quanto  $f \circ g = f(g(x))$ , mentre  $g \circ f = g(f(x))$

$f \circ g$  non è possibile attuarla in quanto  $g(B) \not\subset A$

### FUNZIONE COMPOSTA CON LA PROPRIA INVERSA

data la funzione:  $f : X \rightarrow Y$  e data la sua inversa:  $f^{-1} : Y \rightarrow X$

si ha la funzione composta  $f \circ f^{-1} : Y \rightarrow Y$  ovvero  $f(f^{-1}(y)) = y$

o anche la funzione composta  $f^{-1} \circ f : X \rightarrow X$  ovvero  $f^{-1}(f(x)) = x$

### FUNZIONE INVERSA DELLA FUNZIONE COMPOSTA

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

**Operazioni tra funzioni:**

Date le funzioni  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow R$ , la funzione  $h$ , data da una delle seguenti operazioni:

$f + g$ ,  $f \cdot g$ , oppure  $\frac{f}{g}$ , con  $g \neq 0$ , risulta definita nell'intersezione tra gli insiemi di definizione di  $f$  e  $g$ .

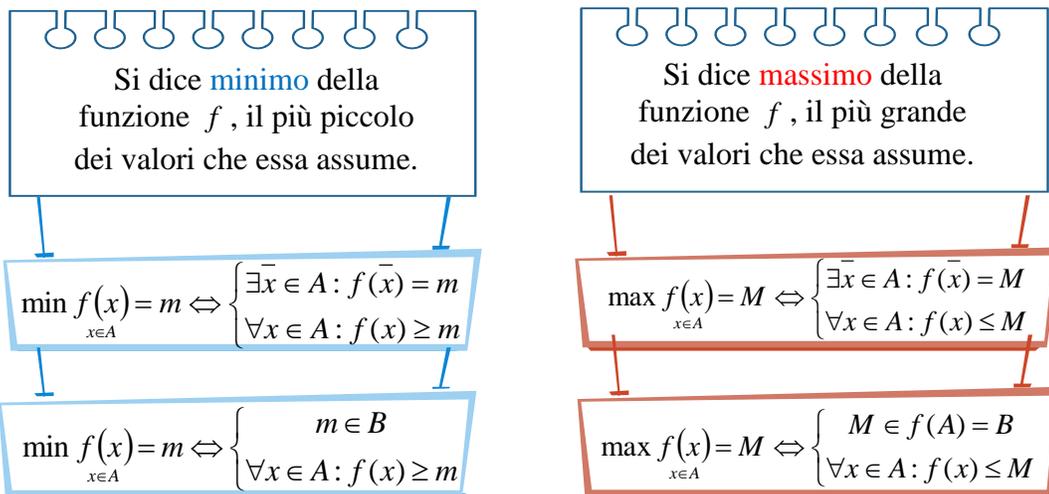
Per esempio  $h = f + g : (X \cap Y) \rightarrow (f(x) + g(x)) \in R$

## Capitolo 3

### Alcune proprietà delle funzioni

#### 3.1 – Minimo e massimo di una funzione

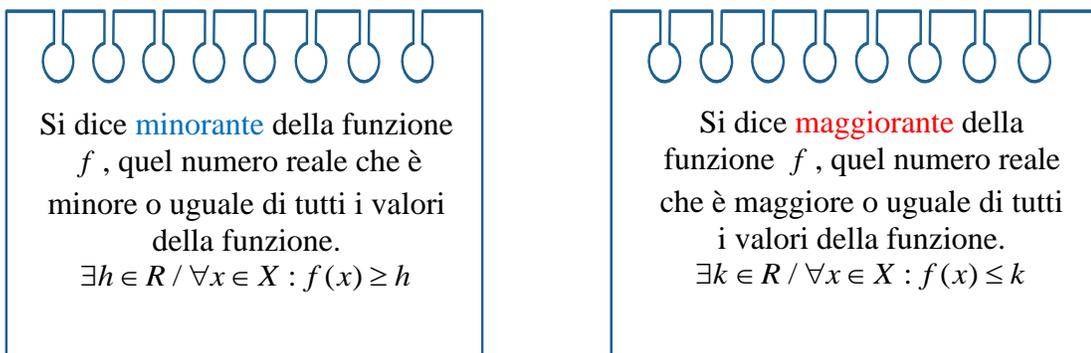
Sia  $f : A \rightarrow B$



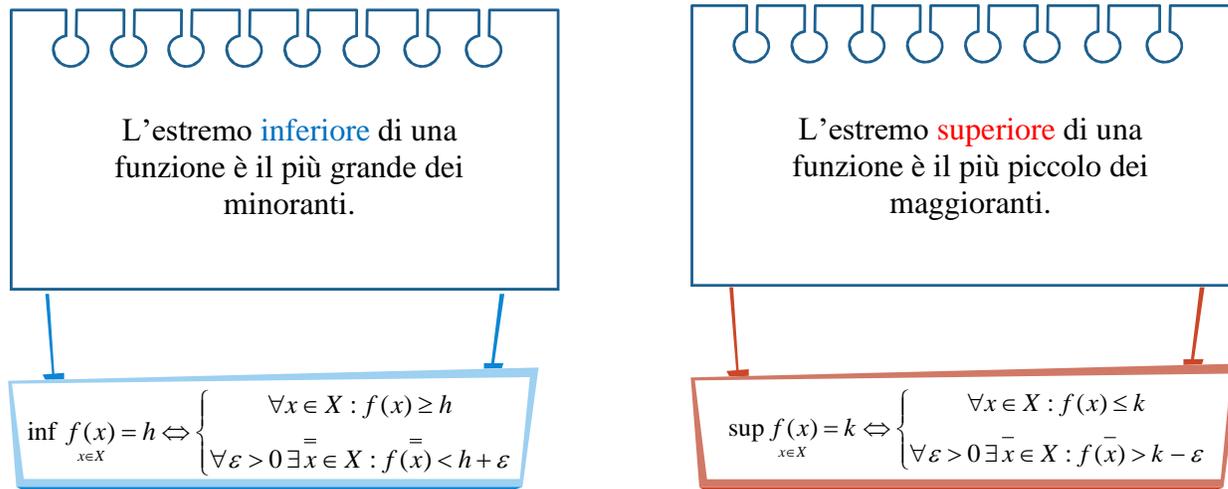
Si nota che le definizioni possono essere espresse nei due modi diversi.

#### 3.2 – Minorante e maggiorante di una funzione

Sia  $f : X \rightarrow Y$



### 3.3 – L'estremo inferiore e superiore di una funzione



Una funzione è **limitata** se è dotata sia di estremo inferiore, sia di estremo superiore, numeri reali.

Una funzione è **illimitata** se sia l'estremo inferiore, sia l'estremo superiore sono illimitati.

#### Esempi

1. Se l'estremo superiore di una funzione è  $+\infty$ , allora la funzione non è limitata superiormente.
2. Se l'estremo inferiore di una funzione è  $-\infty$ , allora la funzione non è limitata inferiormente.
3. Se l'estremo superiore di una funzione è un numero reale, allora la funzione è limitata superiormente.
4. Se l'estremo inferiore di una funzione è un numero reale, allora la funzione è limitata inferiormente.

### 3.4 – Monotonia di una funzione



Cosa si intende per monotonia di una funzione?

La monotonia di una funzione è una proprietà che riguarda l'andamento della crescita o decrescenza della funzione.  
Una funzione è monotona se risulta sempre crescente o decrescente



Quando una funzione è strettamente monotona?

Una funzione si dice strettamente monotona se risulta sempre strettamente crescente o strettamente decrescente.

Funzione (strettamente) crescente:

Una funzione  $f : X \rightarrow R$  si dice:  
**crescente nel suo dominio** se:  
 $\forall x_1, x_2 \in X / x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$   
**strettamente crescente nel suo dominio** se:  
 $\forall x_1, x_2 \in X / x_1 < x_2 : f(x_1) < f(x_2)$

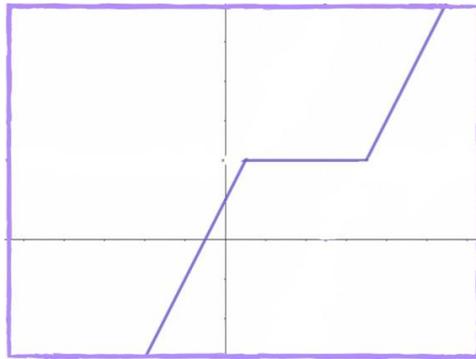


fig.3.4.1



Il grafico della figura 3.4.1 rappresenta una funzione **crescente** perché comunque si prendono 2 punti tali che  $x_1 < x_2$  danno valori:  $f(x_1) \leq f(x_2)$

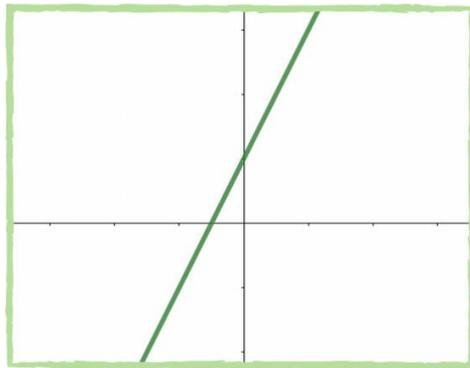
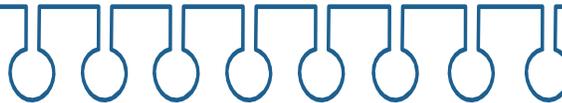


fig.3.4.2



Il grafico della figura 3.4.2 rappresenta una funzione **strettamente crescente** perché comunque si prendono 2 punti tali che  $x_1 < x_2$  danno valori:  $f(x_1) < f(x_2)$

Funzione (strettamente) decrescente:



Una funzione  $f : X \rightarrow R$  si dice:

**decrescente nel suo dominio se:**

$$\forall x_1, x_2 \in X / x_1 < x_2 : f(x_1) \geq f(x_2)$$

**strettamente decrescente nel suo dominio se:**

$$\forall x_1, x_2 \in X / x_1 < x_2 : f(x_1) > f(x_2)$$

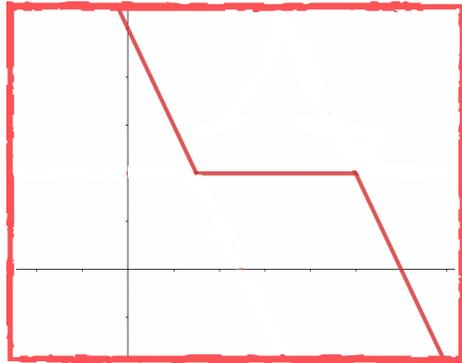


fig.3.4.3



Il grafico della figura 3.4.3 rappresenta una funzione **decescente** perché comunque si prendono 2 punti tali che  $x_1 < x_2$  danno valori:  $f(x_1) \geq f(x_2)$

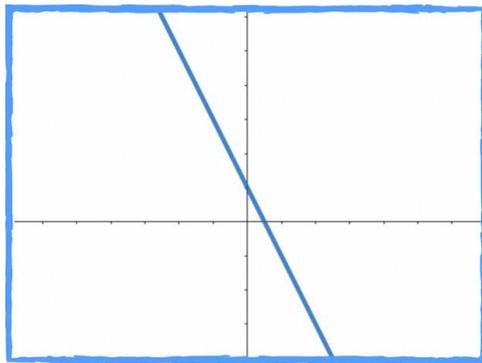


fig.3.4.4



Il grafico della figura 3.4.4 rappresenta una funzione **strettamente decrescente** perché comunque si prendono 2 punti tali che  $x_1 < x_2$  danno valori:  $f(x_1) > f(x_2)$



**T** Teorema sulla invertibilità di una funzione strettamente monotona.

**Ipotesi**

Sia  $f : X \rightarrow f(X)$   
Sia  $f$  strettamente  
monotona



**Tesi**

$f$  è invertibile

*Nota:*

La tesi è vera perché se la funzione è strettamente monotona  $\Leftrightarrow$  è iniettiva  
ed essendo  $f(X)$  l'insieme di arrivo  $\Leftrightarrow$  è surgettiva

In tal caso la funzione inversa  $f^{-1}$  mantiene la stretta monotonia della funzione  $f$ . Se ad esempio  $f$  è strettamente crescente,  $f^{-1}$  sarà strettamente crescente.

### 3.5 – Funzione convessa e concava

**La funzione (strettamente) convessa**

Una funzione è convessa in un intervallo, se comunque scelti due punti sul grafico e tracciato un segmento che li congiunge, il segmento sta sempre al di **sopra** della funzione.

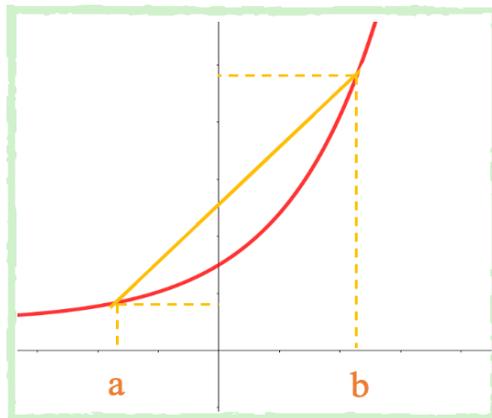


fig.3.5.1

Sia  $f : X \rightarrow R$

Sia  $X$  intervallo,

se  $\forall a, b \in X$  e  $\forall x \in ]a; b[$

$$f(x) \leq \frac{f(a) - f(b)}{a - b} (x - b) + f(b)$$

$\Leftrightarrow f$  è **convessa**;

$$f(x) < \frac{f(a) - f(b)}{a - b} (x - b) + f(b)$$

$\Leftrightarrow f$  è **strettamente convessa**.



**La funzione (strettamente) concava**

Una funzione è concava in un intervallo, se comunque scelti due punti sul grafico e tracciato un segmento che li congiunge, il segmento sta sempre al di sotto della funzione.

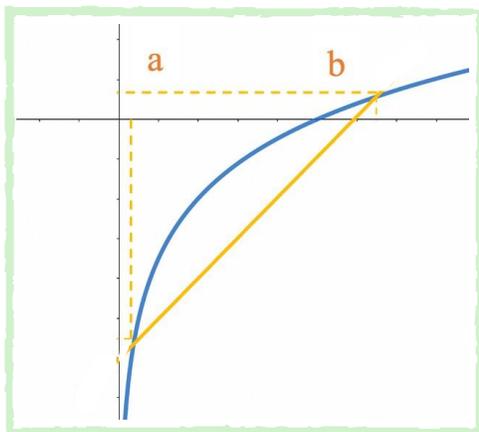


fig.3.5.2

Sia  $f : X \rightarrow R$

Sia  $X$  intervallo,

se  $\forall a, b \in X$  e  $\forall x \in ]a; b[$

$$f(x) \geq \frac{f(a) - f(b)}{a - b} (x - b) + f(b)$$

$\Leftrightarrow f$  è concava

$$f(x) > \frac{f(a) - f(b)}{a - b} (x - b) + f(b)$$

$\Leftrightarrow f$  è strettamente concava

I rispettivi teoremi:



*Teorema sulla convessità*

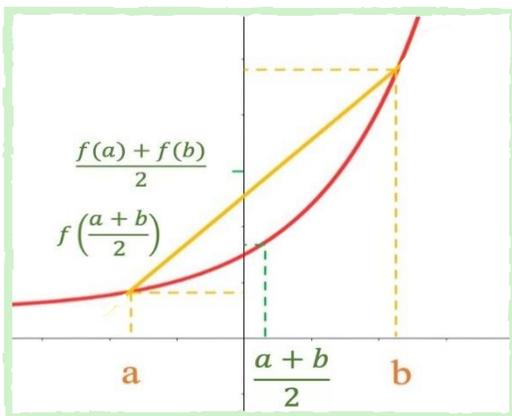


fig.3.5.3

Sia  $f : X \rightarrow R$

Sia  $X$  intervallo e sia  $f(X)$  intervallo,

Sia  $f$  monotona

La funzione risulta **convessa**  $\Leftrightarrow$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

$\forall a, b \in X$

La funzione risulta **strettamente convessa**  $\Leftrightarrow$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

$\forall a, b \in X$



### Teorema sulla concavità

Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

Sia  $X$  intervallo e sia  $f(X)$  intervallo,

Sia  $f$  monotona

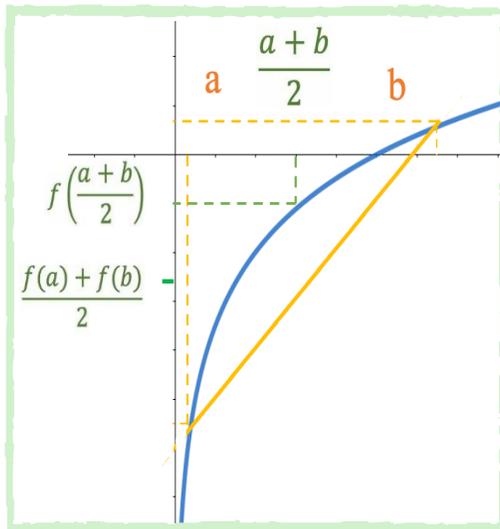


fig.3.5.4

La funzione risulta **concava**  $\Leftrightarrow$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2} \\ \forall a, b \in X$$

La funzione risulta **strettamente concava**  $\Leftrightarrow$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{f(a)+f(b)}{2} \\ \forall a, b \in X$$

## 3.6 – Funzione periodica

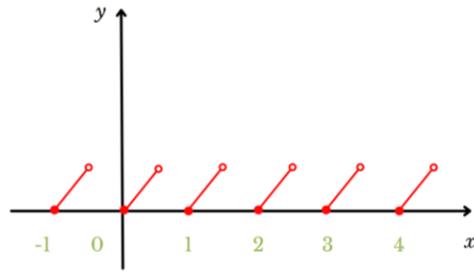
Le funzioni periodiche sono funzioni che hanno la caratteristica di ripetersi in maniera esatta in intervalli regolari del dominio.

Una funzione periodica è definita in tutto  $\mathbb{R}$ .

Una funzione si dice periodica se esiste un  $w \in \mathbb{R}^+$  e si dice  $w$ -periodica se

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x + kw), \forall k \in \mathbb{Z}$$

Data la funzione  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x - k, \forall x \in [k, k + 1]$

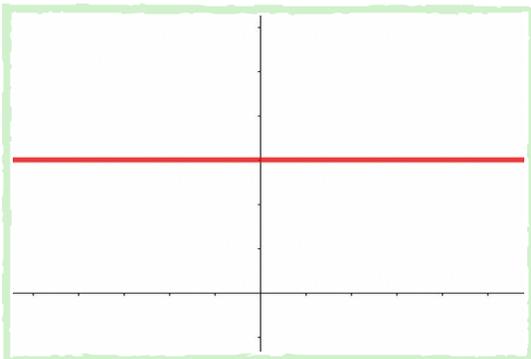


*fig.3.6.1*

## Capitolo 4

### Alcune funzioni elementari

#### 4.1 – Grafici e proprietà



*fig. 4.1.1*

#### **Funzione costante**

$$f : \forall x \in R \rightarrow f(x) = y = c \in R$$

#### **Proprietà:**

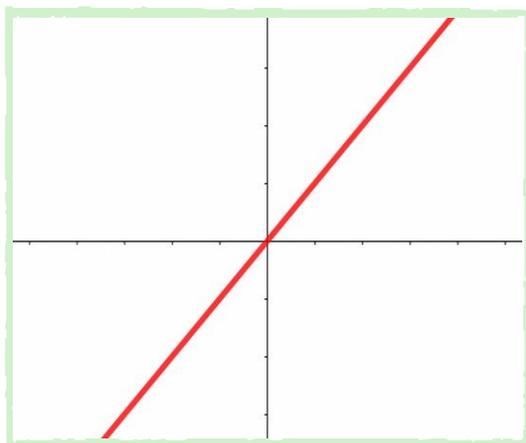
**Dominio:**  $R$

**Codominio:**  $c$

**Invertibilità:** funzione né iniettiva né surgettiva

**Monotonia:** né crescente, né decrescente

Funzione limitata



*fig. 4.1.2*

#### **Funzione identica**

$$f : \forall x \in R \rightarrow f(x) = y = x \in R$$

#### **Proprietà:**

**Dominio:**  $R$

**Codominio:**  $R$

**Invertibilità:** funzione sia iniettiva che surgettiva

$\Leftrightarrow$  funzione invertibile

**(Funzione inversa:**  $f^{-1}(y) = x$ )

**Monotonia:** strettamente crescente

Funzione illimitata

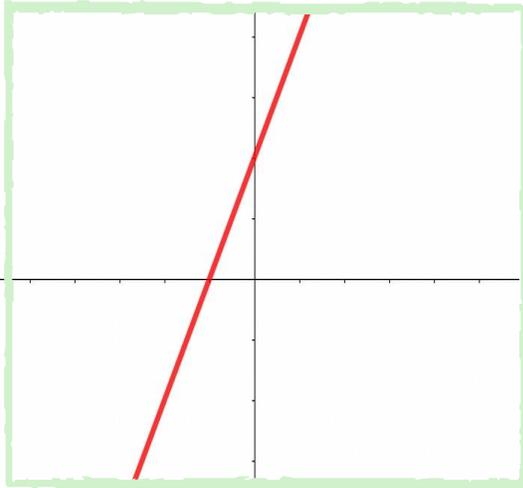


fig. 4.1.3

### Funzione retta

$$f : \forall x \in R \rightarrow f(x) = y = (mx + c) \in R$$

#### Proprietà:

**Dominio:**  $R$

**Codominio:**  $R$

**Invertibilità:** funzione sia iniettiva che surgettiva  
 $\Leftrightarrow$  funzione invertibile

(**Funzione inversa:**  $f^{-1}(y) = \frac{y - c}{m}$ )

**Monotonia:** in base al coefficiente, può essere sia strettamente crescente che strettamente decrescente  
 Funzione illimitata

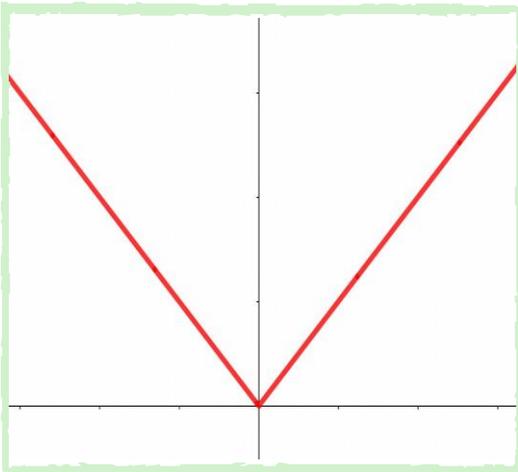


fig. 4.1.4

### Funzione valore assoluto

$$f : \forall x \in R \rightarrow f(x) = y = |x| \in [0; +\infty[$$

#### Proprietà:

**Dominio:**  $R$

**Codominio:**  $[0; +\infty[$

**Invertibilità:** funzione surgettiva, ma non iniettiva

**Monotonia:** strettamente crescente:  $]0, +\infty[$   
 strettamente decrescente:  $] -\infty, 0[$

Per tanto 0 è un punto di minimo.

Funzione limitata inferiormente

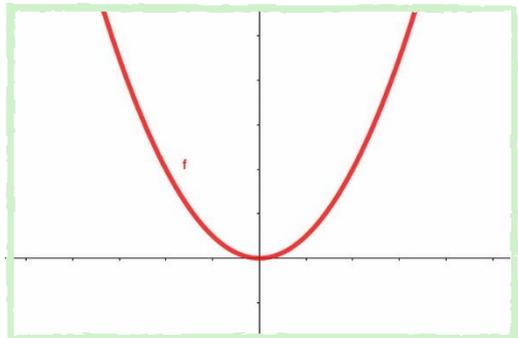


fig. 4.1.5

### Funzione potenza con "n" pari

$$f : \forall x \in R \rightarrow f(x) = y = x^n \in [0; +\infty[$$

#### Proprietà:

**Dominio:**  $R$

**Codominio:**  $[0; +\infty[$

**Invertibilità:** funzione surgettiva, ma non iniettiva

Pertanto per renderla invertibile consideriamo la restrizione del dominio:  $[0; +\infty[$

(Funzione inversa:  $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$ )

**Monotonia:** strettamente crescente:  $]0, +\infty[$   
strettamente decrescente:  $] -\infty, 0[$

Per tanto 0 è un punto di minimo.

**Concavità/concavità:** funzione strettamente  
convessa

Funzione illimitata superiormente

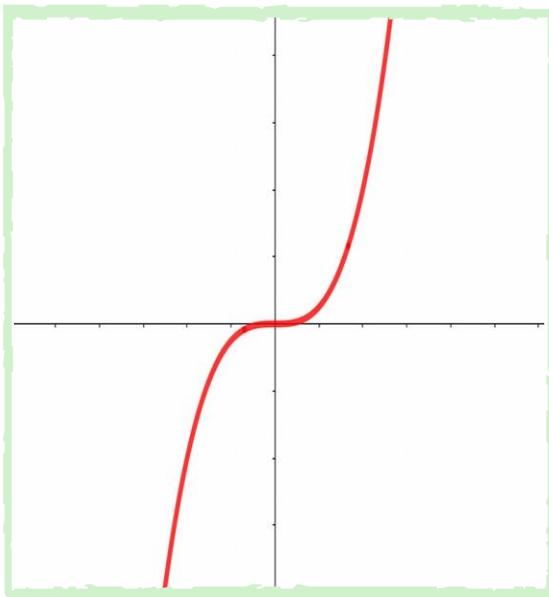


fig. 4.1.6

### Funzione potenza con “n” dispari

$$f : \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) = y = x^n \in \mathbb{R}$$

**Proprietà:**

**Dominio:**  $\mathbb{R}$

**Codominio:**  $\mathbb{R}$

**Invertibilità:** funzione sia iniettiva che surgettiva  
 $\Leftrightarrow$  funzione invertibile

(Funzione inversa:  $f^{-1}(y) = x = \sqrt[n]{y}$ )

**Monotonia:** strettamente crescente

**Concavità/concavità:**

strettamente concava:  $] -\infty, 0[$

strettamente convessa:  $]0, +\infty[$

Per tanto 0 è un punto di flesso proprio.

Funzione illimitata

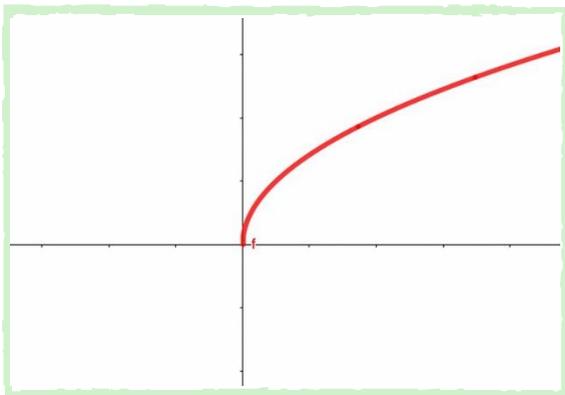


fig. 4.1.7

### Funzione radice con “n” pari

$$f : \forall x \in [0; +\infty[ \rightarrow f(x) = y = \sqrt[n]{x} \in [0; +\infty[$$

**Proprietà:**

**Dominio:**  $[0; +\infty[$

**Codominio:**  $[0; +\infty[$

**Invertibilità:** funzione sia iniettiva che surgettiva  
 $\Leftrightarrow$  funzione invertibile

(Funzione inversa:  $f^{-1}(y) = x = y^n$ )

**Monotonia:** strettamente crescente:

**Concavità/convessità:** funzione strettamente concava

Funzione limitata inferiormente

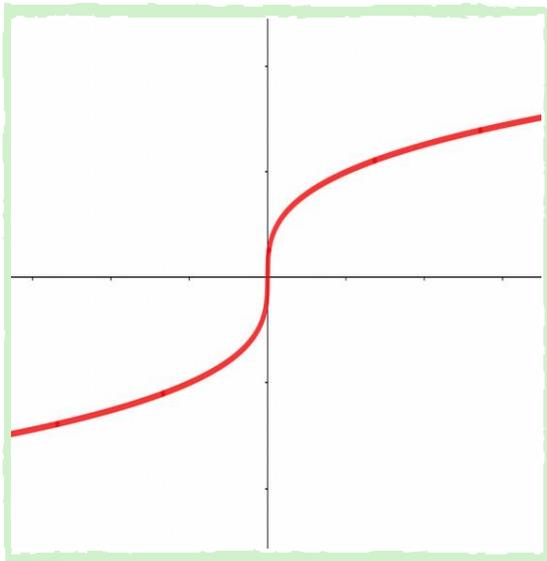


fig. 4.1.8

### Funzione radice con “n” dispari

$$f : \forall x \in R \rightarrow f(x) = y = \sqrt[n]{x} \in R$$

**Proprietà:**

**Dominio:**  $R$

**Codominio:**  $R$

**Invertibilità:** funzione sia iniettiva che surgettiva  
 $\Leftrightarrow$  funzione invertibile

(Funzione inversa:  $f^{-1}(y) = x = y^n$ )

**Monotonia:** strettamente crescente

**Concavità/convessità:**

strettamente concava:  $]0, +\infty[$

strettamente convessa:  $] -\infty, 0[$

Per tanto 0 è un punto di flesso proprio.

Funzione illimitata

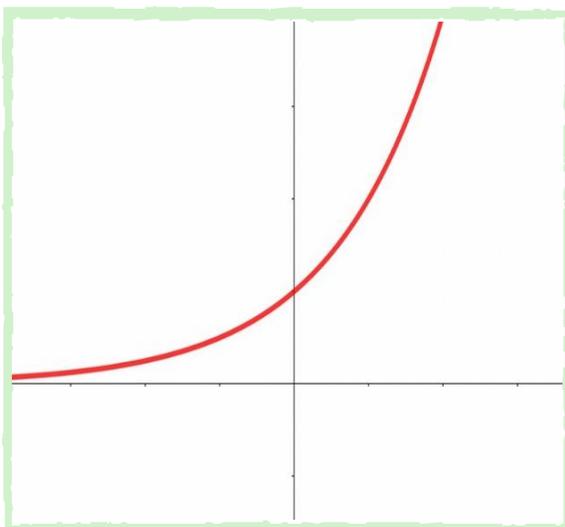


fig. 4.1.9

### Funzione esponenziale con $a > 1$

$$f : \forall x \in R \rightarrow f(x) = y = a^x \in ]0, +\infty[$$

**Proprietà:**

**Dominio:**  $R$

**Codominio:**  $]0, +\infty[$

**Invertibilità:** funzione sia iniettiva che surgettiva  
 $\Leftrightarrow$  funzione invertibile

(Funzione inversa:  $f^{-1}(y) = \log_a y$ )

**Monotonia:** strettamente crescente:

**Concavità/convessità:** funzione strettamente convessa

Funzione limitata inferiormente

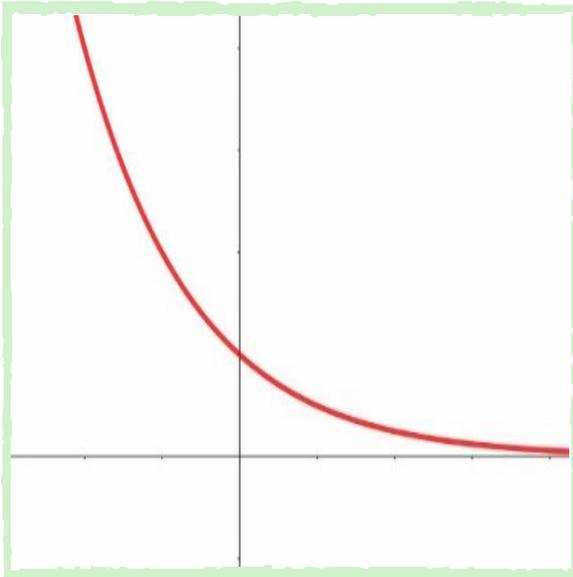


fig. 4.1.10

**Funzione esponenziale con  $0 < a < 1$**

$$f : \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) = y = a^x \in ]0, +\infty[$$

**Proprietà:**

**Dominio:**  $\mathbb{R}$

**Codominio:**  $]0, +\infty[$

**Invertibilità:** funzione sia iniettiva che surgettiva  
 $\Leftrightarrow$

funzione invertibile

(**Funzione inversa:**  $f^{-1}(y) = \log_a y$ )

**Monotonia:** strettamente decrescente:

**Concavità/concavità:** funzione strettamente concava

Funzione illimitata superiormente

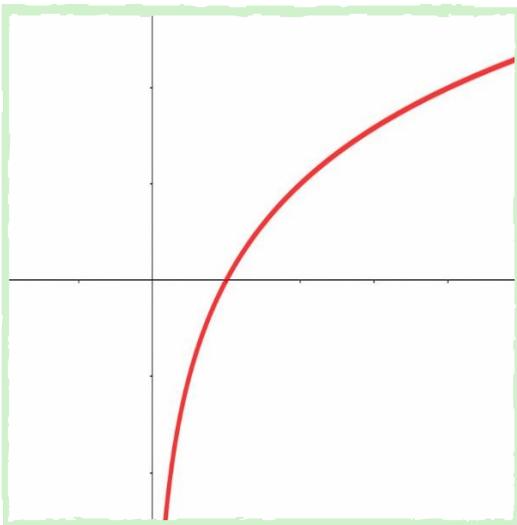


fig. 4.1.11

**Funzione logaritmico con  $a > 1$**

$$f : \forall x \in ]0, +\infty[ \rightarrow f(x) = y = \log_a x \in \mathbb{R}$$

**Proprietà:**

**Dominio:**  $]0, +\infty[$

**Codominio:**  $\mathbb{R}$

**Invertibilità:** funzione sia iniettiva che surgettiva  
 $\Leftrightarrow$  funzione invertibile

(**Funzione inversa:**  $f^{-1}(y) = a^y$ )

**Monotonia:** strettamente crescente:

**Concavità/concavità:** funzione strettamente concava

Funzione illimitata

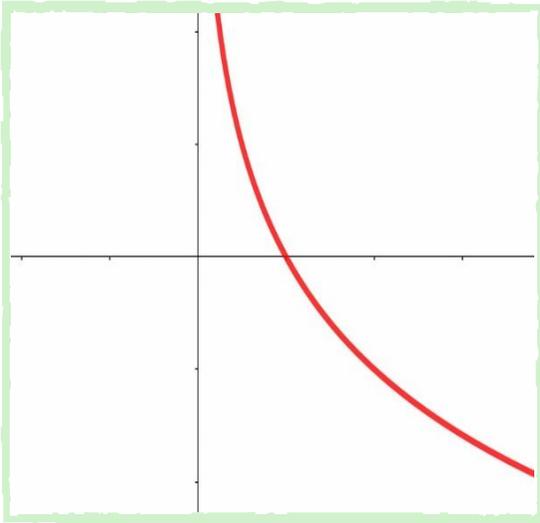


fig. 4.1.12

**Funzione logaritmico con  $0 < a < 1$**

$$f : \forall x \in ]0, +\infty[ \rightarrow f(x) = y = \log_a x \in \mathbb{R}$$

**Proprietà:**

**Dominio:**  $]0, +\infty[$

**Codominio:**  $\mathbb{R}$

**Invertibilità:** funzione sia iniettiva che surgettiva  
 $\Leftrightarrow$  funzione invertibile

**(Funzione inversa:**  $f^{-1}(y) = a^y$ )

**Monotonia:** strettamente decrescente:

**Concavità/convessità:** funzione strettamente  
 concava

Funzione illimitata

Funzioni trigonometriche

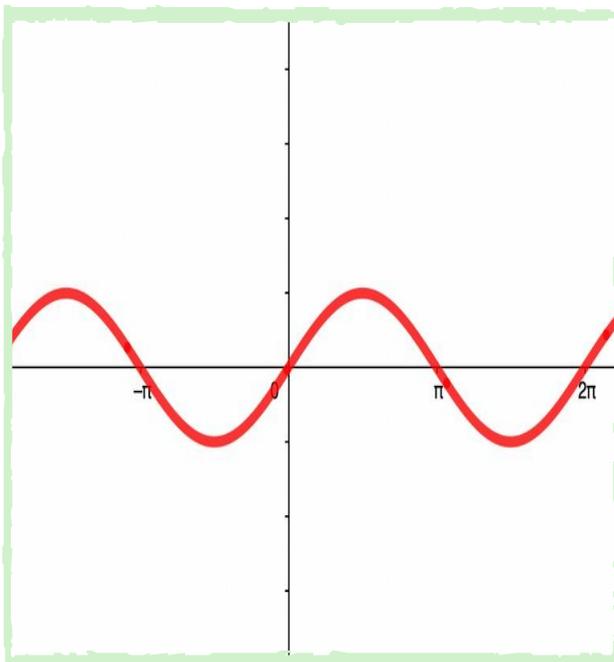


fig. 4.1.13

**Funzione seno**

$$f : \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) = y = \text{sen}(x) \in [-1, 1]$$

**Proprietà:**

**Dominio:**  $\mathbb{R}$

**Codominio:**  $[-1, 1]$

**Invertibilità:** funzione surgettiva, ma non  
 iniettiva

Pertanto per renderla invertibile  
 consideriamo la restrizione del dominio:

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

**(Funzione inversa:**  $f^{-1}(y) = \text{arcsen}(y)$ )

**Funzione periodica:**

$$f(x) = f(x + k2\pi), \forall k \in \mathbb{Z}$$

Funzione limitata

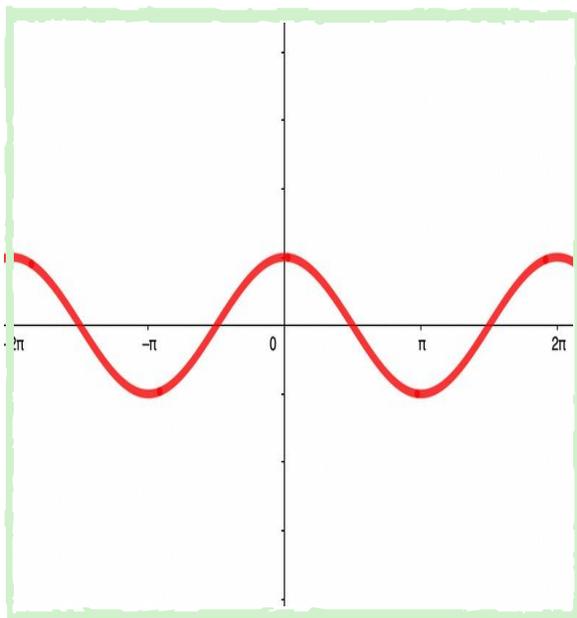


fig. 4.1.14

### Funzione coseno

$$f : \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) = y = \cos(x) \in [-1, 1]$$

**Proprietà:**

**Dominio:**  $\mathbb{R}$

**Codominio:**  $[-1, 1]$

**Invertibilità:** funzione surgettiva, ma non iniettiva

Pertanto per renderla invertibile consideriamo la restrizione del dominio:  $[0, \pi]$

(**Funzione inversa:**  $f^{-1}(y) = \arccos(y)$ )

**Funzione periodica:**

$$f(x) = f(x + k2\pi), \forall k \in \mathbb{Z}$$

Funzione limitata

### Funzione tangente

$$f : \forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \rightarrow f(x) = y = \operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \in \mathbb{R}$$

**Proprietà:**

**Dominio:**  $\mathbb{R} - \left\{ \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, \forall k \in \mathbb{Z}$

**Codominio:**  $\mathbb{R}$

**Invertibilità:** funzione surgettiva, ma non iniettiva

Pertanto per renderla invertibile consideriamo la restrizione del dominio:  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

(**Funzione inversa:**  $f^{-1}(y) = \operatorname{arctg}(y)$ )

**Monotonia:** strettamente crescente

Funzione illimitata

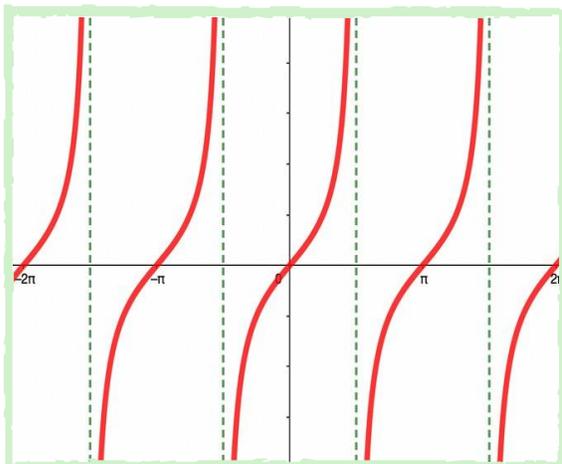


fig. 4.1.15

## Funzione cotangente

$$f : \forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} k\pi \right\} \rightarrow f(x) = y = \operatorname{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \in \mathbb{R}$$

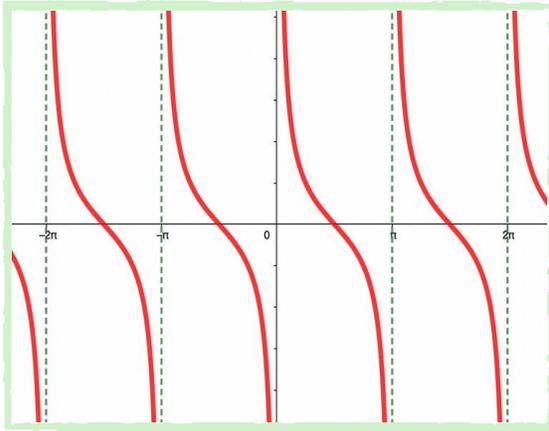


fig. 4.1.16

### Proprietà:

**Dominio:**  $\mathbb{R} - \left\{ \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} k\pi \right\}, \forall k \in \mathbb{Z}$

**Codomio:**  $\mathbb{R}$

**Invertibilità:** funzione surgettiva, ma non iniettiva

Pertanto per renderla invertibile consideriamo la restrizione del dominio:  $]0, \pi[$

**(Funzione inversa:**  $f^{-1}(y) = \operatorname{arccotg}(y)$ )

**Monotonia:** strettamente decrescente

Funzione illimitata

## Funzione arcoseno

(funzione inversa di una restrizione della funzione seno)

$$f : \forall x \in [-1, 1] \rightarrow f(x) = y = \operatorname{arcsen}(x) \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

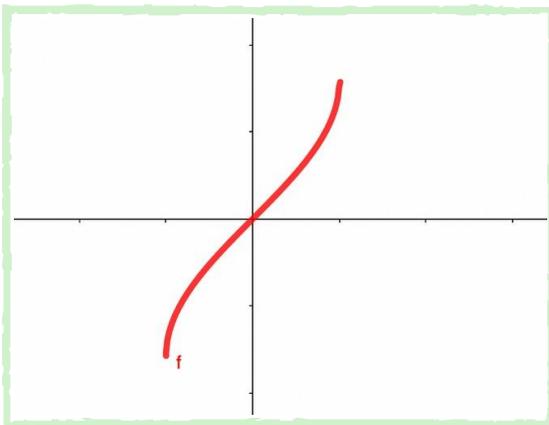


fig. 4.1.17

### Proprietà:

**Dominio:**  $[-1, 1]$

**Codomio:**  $\mathbb{R}$

**Invertibilità:** funzione sia iniettiva che surgettiva  
 $\Leftrightarrow$  funzione invertibile

**(Funzione inversa:**  $f^{-1}(y) = \operatorname{sen}(y)$ )

**Monotonia:** strettamente crescente

**Concavità/convessità:** strettamente convessa:  
 $] -1, 0[$

strettamente concava:  $] 0, 1[$

Pertanto  $0$  è un punto di flesso proprio.

Funzione limitata

**Funzione arcocoseno**  
(funzione inversa di una restrizione della funzione coseno)

$$f : \forall x \in [-1,1] \rightarrow f(x) = y = \arcsen(x) \in [0, \pi]$$

**Proprietà:**

**Dominio:**  $[-1,1]$

**Codominio:**  $[0, \pi]$

**Invertibilità:** funzione sia iniettiva che surgettiva  
 $\Leftrightarrow$  funzione invertibile

(**Funzione inversa:**  $f^{-1}(y) = \cos(y)$ )

**Monotonia:** strettamente decrescente

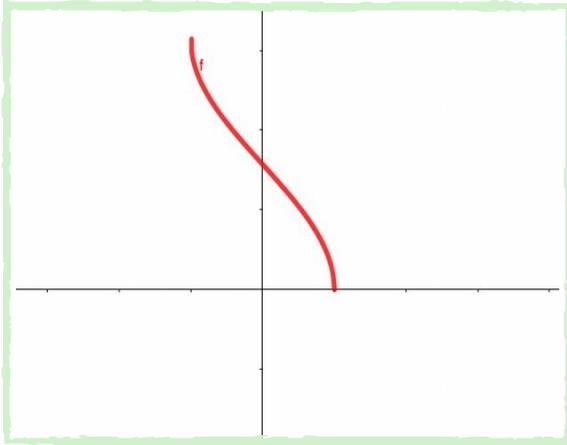


fig. 4.1.18

**Concavità/convessità:**

strettamente convessa:  $] -1, 0[$

strettamente concava:  $] 0, 1[$

Pertanto 0 è un punto di flesso proprio.

Funzione limitata

**Funzione arcotangente**

(funzione inversa di una restrizione della funzione tangente)

$$f : \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) = y = \operatorname{arctg}(x) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

**Proprietà:**

**Dominio:**  $\mathbb{R}$

**Codominio:**  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

**Invertibilità:** funzione sia iniettiva che surgettiva  
 $\Leftrightarrow$  funzione invertibile

(**Funzione inversa:**  $f^{-1}(y) = \operatorname{tg}(y)$ )

**Monotonia:** strettamente decrescente

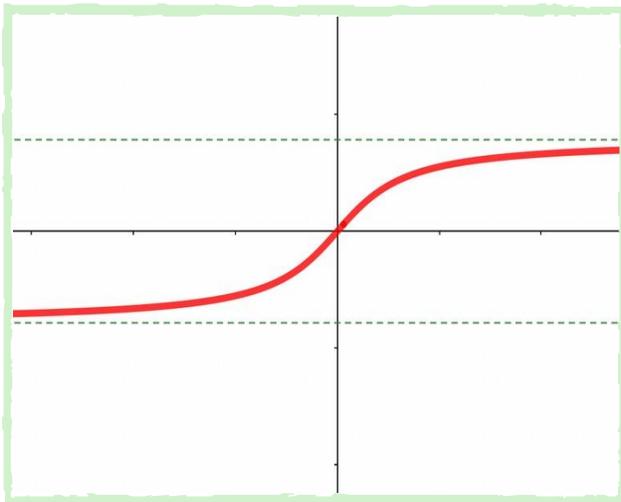


fig. 4.1.19

**Concavità/convessità:**

strettamente convessa:  $] - \infty, 0[$

strettamente concava:  $] 0, + \infty[$

*Pertanto 0 è un punto di flesso proprio.*

Funzione limitata

**Funzione arcocotangente**

**(funzione inversa di una restrizione della funzione cotangente)**

$$f : \forall x \in R \rightarrow f(x) = y = \operatorname{arccotg}(x) \in ]0, \pi[$$

**Proprietà:**

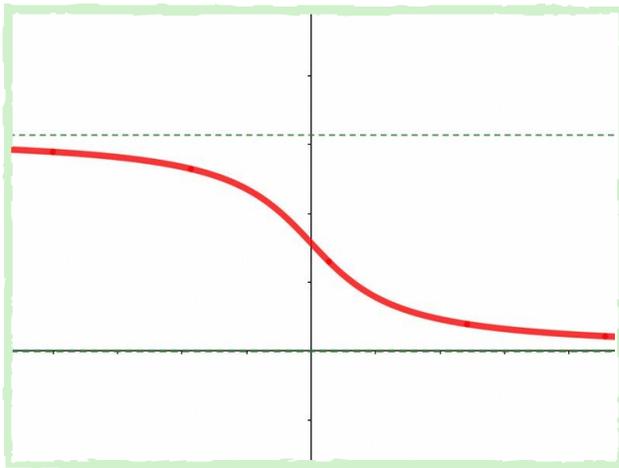
**Dominio:**  $R$

**Codominio:**  $]0, \pi[$

**Invertibilità:** funzione sia iniettiva che surgettiva  $\Leftrightarrow$  funzione invertibile

**(Funzione inversa:**  $f^{-1}(y) = \cotg(y)$ )

**Monotonia:** strettamente decrescente



*fig. 4.1.20*

**Concavità/convessità:**

strettamente convessa:  $] 0, + \infty[$

strettamente concava:  $] - \infty, 0[$

*Pertanto 0 è un punto di flesso proprio.*

Funzione limitata

**4.2 – L’equazione della retta**

  
**Definizione**

L’equazione di una retta è quell’equazione di primo grado che individua tutti i valori passanti per 2 punti di un piano cartesiano.

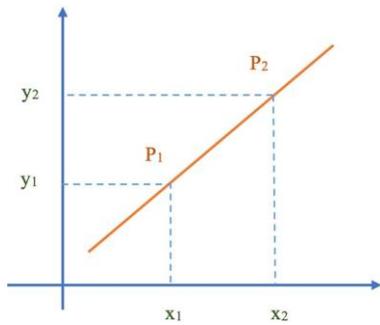


fig. 4.2.1

Dati 2 punti:

$$P_1 = (x_1, y_1)$$

$$P_2 = (x_2, y_2)$$

L'equazione della retta risulta espressione della seguente uguaglianza:

$$\frac{y_2 - y_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{x - x_1}$$

che esplicitata in termine di funzione si ha:

$$\frac{y_2 - y_1}{y - y_1} (x - x_1) = \frac{x_2 - x_1}{x - x_1} (x - x_1)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{y - y_1} (x - x_1) = (x_2 - x_1)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{y - y_1} (y - y_1)(x - x_1) = (x_2 - x_1)(y - y_1)$$

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) = (x_2 - x_1)(y - y_1)$$

$$\frac{(y_2 - y_1)(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(x_2 - x_1)(y - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

$$\frac{(y_2 - y_1)(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} = y - y_1$$

quindi l'equazione della retta  $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1) + y_1 = y$

con  $\frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = m$  che rappresenta il coefficiente angolare della retta.

e con  $y - x_1 \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = c$  che rappresenta il punto in cui la funzione interseca l'asse delle  $y$

(detto anche intercetta). Si osservi inoltre che la retta passa per il punto

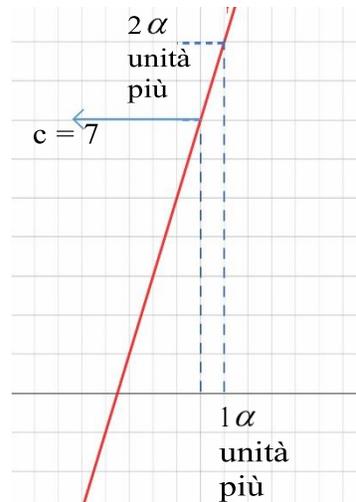
Per cui in questo caso la retta passante per il punto  $x_1, y_1$  risulta:  $y = m(x - x_1) + y_1$

Pertanto l'equazione della retta in forma esplicita risulta:  $y = mx + c$

Data la retta  $y = 2x + 7$ , il coefficiente angolare è  $m = 2$ , e come vediamo nel grafico, per una

unità della variabile indipendente  $\alpha = \textit{alfa}$  , la funzione fornisce 2 unità della variabile indipendente  $y$  , oltre l'intercetta.

Il termine  $c$  in questo caso è uguale a 7, quindi il grafico interseca l'asse delle  $y$  nel punto (0,7)



Se consideriamo 2 rette  $y_1 = m_1x + c_1$  e  $y_2 = m_2x + c_2$  con  $m_1 = m_2$  le due rette sono parallele tra di loro.

$$\text{Se } m_1 = m_2 \Leftrightarrow r_1 \parallel r_2$$

ovvero  $r_1$  parallela con  $r_2$ .

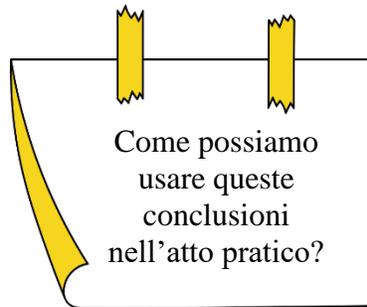
La condizione necessaria e sufficiente per la perpendicolarità tra due rette di equazione rispettivamente:

$y_1 = m_1x + c_1$  e  $y_2 = m_2x + c_2$  con  $m_1 \neq 0$  risulta:

$$m_1 \cdot m_2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \Leftrightarrow r_1 \perp r_2$$

$r_1$  risulta perpendicolare con  $r_2$ .



Esempi



Date le due rette  $2x - y - 3$  e  $x - y = -1$  si determini l'eventuale intersezione.

Soluzione

1. Si noti che le due rette non sono parallele, pertanto la loro intersezione sarà la soluzione del seguente sistema.

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = y \\ 2x - (x + 1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = y \\ 2x - x - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = y \\ x - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = y \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 1 = y \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 4 \end{cases}$$

Quindi, le due rette si intersecano nel punto (4,5)



- a) Scrivere l'equazione della  $r_1$  passante per il punto (0,1) e avente lo stesso coefficiente angolare della retta  $r_2$  passante per i punti (2,1) e (3,3).

b) Calcolare il punto di intersezione tra la retta  $r_1$  e la retta di equazione:  $y = 3 - x$



a.1. Calcoliamo il coefficiente angolare della rete  $r_2$ .

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 1}{3 - 2} = \frac{2}{1} = 2$$

Siccome la retta  $r_1$  ha lo stesso coefficiente angolare della retta  $r_2$ , quindi il coefficiente della retta  $r_1 = 2$ .

a.2. Troviamo l'equazione della retta  $r_1$ .

Ricordiamo l'equazione della retta passante per il punto  $(x_1, y_1)$ :  $y = m(x - x_1) + y_1$

Sapendo che la retta  $r_1$  ha un coefficiente angolare pari a 2, e passa per il punto  $P_1 = (0,1)$  sostituiamo i valori di  $m$ , e  $P_1 = (0,1)$  nell'equazione della retta.

$$y = 2(x - 0) + 1$$

$$y = 2x + 1$$

b. Calcoliamo il punto di intersezione tra le due rette osservata

Si noti che le due rette non sono parallele in quanto i coefficienti angolari non sono uguali, pertanto la loro intersezione sarà la soluzione di questo sistema.

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x = 2x + 1 \\ y = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 3x \\ y = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = 3 - \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Di conseguenza, il punto di intersezione tra le due rette risulta  $\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$



a) Scrivere l'equazione della retta  $r_1$  passante per i punti  $(2,1)$  e  $(-1,2)$ .

b) Stabilire se la retta  $r_1$  interseca la retta  $r_2: 2x - 3y + 4 = 0$ .

## Soluzione

**a.1. Calcoliamo il coefficiente angolare della retta passante per i punti  $P_1 = (2,1)$   $P_2 = (-1,2)$**

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 1}{-1 - 2} = -\frac{1}{3}$$

**a.2. Troviamo l'equazione della retta  $r_1$ .**

Sapendo l'equazione di una retta:  $y = m(x - x_1) + y_1$ .

La retta  $r_1$  ha il coefficiente angolare  $m = -\frac{1}{3}$  e passa per il punto  $P_1 = (2,1)$  e quindi per trovare l'equazione della retta è necessario sostituire i valori  $x$  e  $y$  di  $P_1 = (2,1)$

$$y = -\frac{1}{3}(x - 2) + 1 = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} + 1 = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$-\frac{1}{3}x + y - \frac{5}{3} = 0$$

**b. Stabiliamo se la retta  $r_1$  interseca la retta  $r_2: 2x - 3y + 4 = 0$ .**

Siccome  $r_1$  e  $r_2$  hanno coefficienti angolari diversi, il punto di intersezione tra di loro, sarà punto di soluzione del sistema.

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4 = 0 \\ \frac{1}{3}x + y - \frac{5}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ \frac{1}{3}x + y = \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3\left(-\frac{1}{3}x - \frac{59}{33}\right) = -4 \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + x + 5 = -4 \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -9 \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{9}{3} \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -\frac{1}{3}(-3) + \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 + \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Di conseguenza, il punto di intersezione risulta  $\left(-3, \frac{8}{3}\right)$

### Distanza tra punti e rette

Iniziamo con l'osservare la distanza tra due punti:

Dati due punti  $P_1 = (x_1, y_1)$   $P_2 = (x_2, y_2)$

Per il Teorema di Pitagora, possiamo scrivere che la distanza fra questi punti è:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

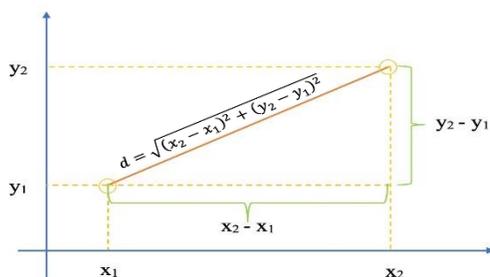


fig. 4.2.3

### Distanza tra una retta e un punto:

Sia data una generica retta:  $r : ax + by + c = 0$  ed un punto  $A = (x_0, y_0)$ .

La distanza tra il punto  $A$  e la retta  $r$  risulta:  $d(A, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Esempio

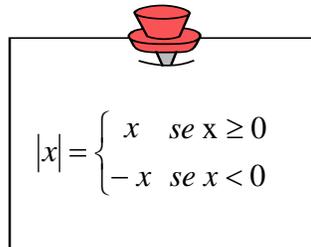
Calcolare la distanza del punto  $A = (1, 4)$ , dalla retta di equazione  $2x - 3y + 5 = 0$

Soluzione

$$d(A,r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(2 \cdot 1) - (3 \cdot 4) + 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|2 - 12 + 5|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{|-5|}{\sqrt{13}} = \frac{5}{\sqrt{13}}$$

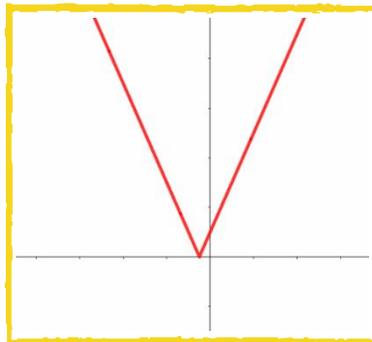
### 4.3 – Valore assoluto

Parlare della funzione valore assoluto di un numero reale  $x \in \mathbb{R}$ , equivale a scrivere  $|x|$  e tale valore risulta:



$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Quindi possiamo subito affermare che  $|x| \geq 0$  risulta vero  $\forall x \in \mathbb{R}$ .



*fig. 4.3.1*

**Esempi**

$$|3| = 3 \text{ e } |-3| = -(-3) = 3;$$

oppure, parlare della funzione  $2x+1$ , in valore assoluto, equivale a scrivere:

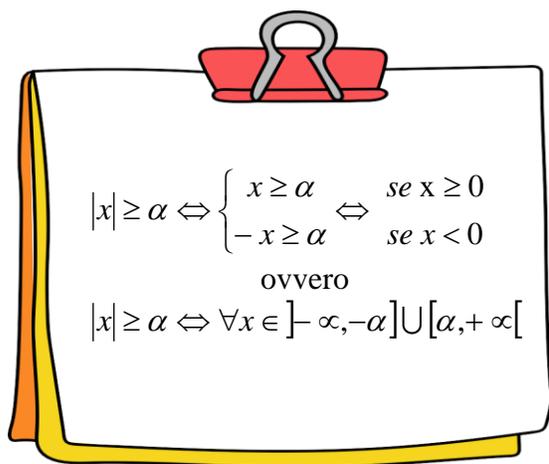
$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } 2x+1 \geq 0 \text{ (se } x \geq -\frac{1}{2}) \\ -2x-1 & \text{se } 2x+1 < 0 \text{ (se } x < -\frac{1}{2}) \end{cases}$$

## Alcune sue proprietà

Se consideriamo qualsiasi numero  $\alpha \in \mathbb{R}$  e poniamo il caso che sia negativo,  $\alpha \leq 0$ , possiamo subito affermare che:

$|x| \geq \alpha$  risulta sempre vera,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ;

Nel caso in cui il numero reale sia positivo,  $\alpha > 0$  allora:


$$|x| \geq \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \alpha & \text{se } x \geq 0 \\ -x \geq \alpha & \text{se } x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

ovvero

$$|x| \geq \alpha \Leftrightarrow \forall x \in ]-\infty, -\alpha] \cup [\alpha, +\infty[$$

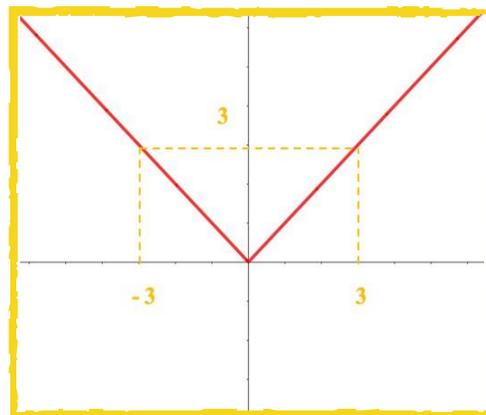
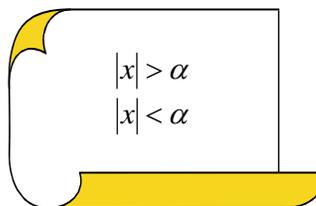


fig. 4.3.2

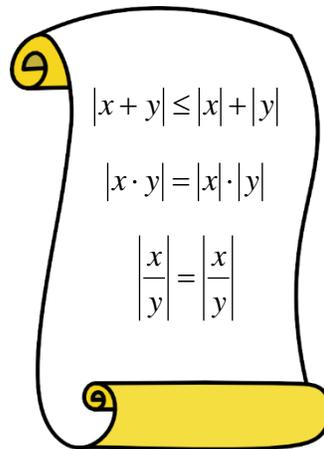
Come si può osservare dal grafico della fig. 4.3.2, nel caso consideriamo  $\alpha = 3$ , la funzione valore assoluto assume valori maggiori di 3, solo se consideriamo valori della variabile indipendenti a destra di 3 ed a sinistra di -3.

Naturalmente nel caso si volessero considerare le seguenti disuguaglianze:


$$\begin{aligned} |x| &> \alpha \\ |x| &< \alpha \end{aligned}$$

Vanno fatti gli stessi ragionamenti di cui sopra, nel rispetto della stretta disuguaglianza.

Infine, con  $x, y \in \mathbb{R}$  e con  $y \neq 0$  risultano interessanti le seguenti relazioni:



The image shows a yellow scroll with a black outline, unrolled to reveal three mathematical properties of absolute values. The scroll is tied at the top and bottom with yellow bands. The properties are:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$
$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$
$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

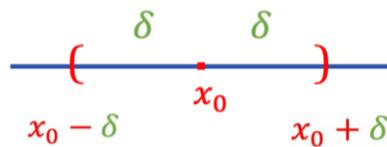
## Capitolo 5

### I limiti

#### 5.1 – Concetti preliminari

##### Intorno di un punto

Si definisce intorno di un punto  $x_0 \in \mathbb{R}$  un intervallo aperto con centro in  $x_0$  e si denota con  $I_{x_0}$ , ovvero  $\forall \delta > 0, I_{x_0} = ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$



*fig. 5.1.1*

##### Punto di accumulazione

Si definisce  $x_0 \in \mathbb{R}$  punto di accumulazione per/di  $X \subseteq \mathbb{R}$  se comunque preso  $I_{x_0}$  risulta:

$$I_{x_0} \cap X - \{x_0\} \neq \emptyset$$

Se consideriamo l'intervallo  $X = ]0,1[$  con  $x_0 = 0$



fig. 5.1.2

Come si evince dal grafico, risulta che per ogni intorno di 0, l'intersezione con l'intervallo  $]0,1[$  è sempre diversa dal vuoto. Pertanto 0 è un punto di accumulazione per  $]0,1[$ .

Definito in simboli si ha:  $\forall I_0, I_0 \cap ]0,1[ - \{0\} \neq \emptyset$

Punto isolato

Si definisce  $x_0 \in X$  punto isolato  
 per/di  $X \subseteq R$  se  $\exists I_{x_0}$  tale che  

$$I_{x_0} \cap X - \{x_0\} = \emptyset$$

Se consideriamo l'insieme  $Z$  ed  $x_0 = -1$

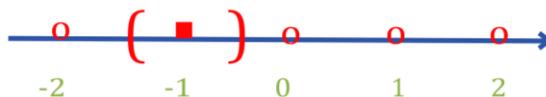


fig. 5.1.3

Si osserva che esiste un intorno di  $-1$ , la cui intersezione con  $Z$  tranne il punto  $-1$  è vuota.

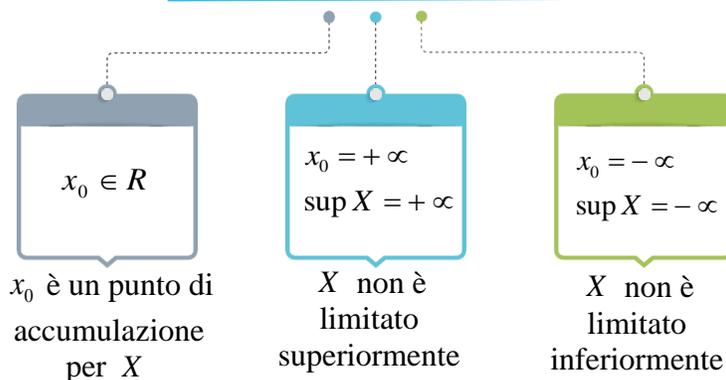
Pertanto  $-1$  è un punto isolato di  $Z$ .

Definito in simboli:  $\exists I_{-1}, I_{-1} \cap Z - \{-1\} = \emptyset$

## 5.2 – Definizione di limite

Sia  $f : X \rightarrow R$

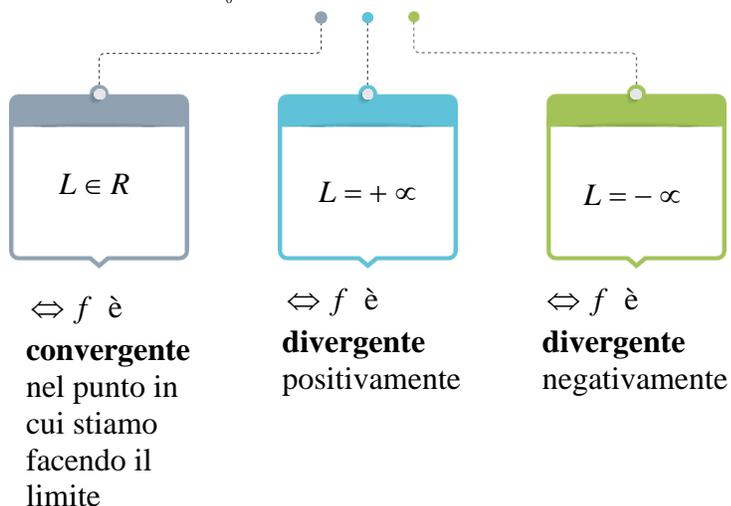
Sia  $x_0 \in \widehat{R}$  in cui è possibile effettuare il limite su  $X$



$\widehat{R}$  ( $R$  ampliato)  
significa  $R \cup \pm \infty$

$\Leftrightarrow f$  è regolare nel punto  $x_0$

Pertanto se  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \widehat{R}$



Il limite esiste se, sia il  
limite a sinistra, sia il limite  
a destra sono uguali.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

Sia  $f : X \rightarrow R$

Sia  $x_0 \in \widehat{R}$  in cui è possibile effettuare il limite su  $X$

Sia  $L \in \widehat{R}$

Per definizione di limite se  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \widehat{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall I_L \exists I_{x_0}$  tale che se prendo  $x \in X \cap I_{x_0} - \{x_0\} : f(x) \in I_L$

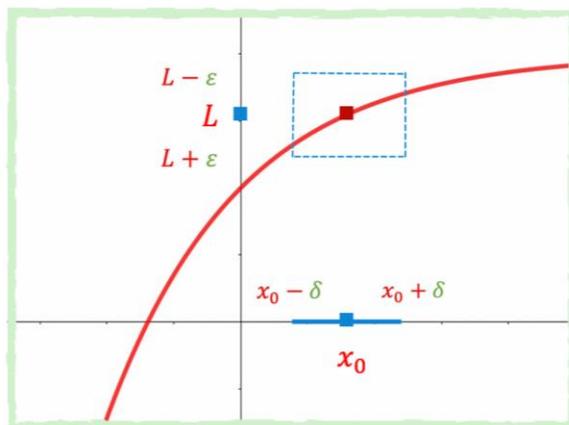


fig. 5.2.1

Si noti che la grandezza dell'intorno di  $x_0$  dipende dalla grandezza dell'intorno di  $L$

**Tale definizione di limite può essere espressa nei seguenti altri modi:**

Sia  $f : X \rightarrow R$

Sia  $x_0 \in \widehat{R}$  in cui è possibile effettuare il limite su  $X$

Sia  $L \in \widehat{R}$

Se  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \widehat{R}$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  t.c se  $x \in X \cap \underbrace{]x_0 - \delta, x_0 + \delta[}_{I_{x_0}} : f(x) \in \underbrace{]L - \varepsilon, L + \varepsilon[}_{I_L}$

Si osserva:

$f(x) \in I_L$	$x \in I_{x_0}$	
$\Leftrightarrow f(x) \in ]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$	$\Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$	$ x - x_0  > 0 \quad x \neq x_0$
$\Leftrightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$	$\Leftrightarrow -\delta < x - x_0 < \delta$	$ x - x_0  > 0$
$\Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$	$\Leftrightarrow  x - x_0  < \delta$	
$\Leftrightarrow  f(x) - L  < \varepsilon$		

Quindi riportiamo la definizione di limite alla luce delle osservazioni fatte:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  t.c se  $x \in X$  e se  $0 < |x - x_0| < \delta : |f(x) - L| < \varepsilon$

Da tale ultima definizione risulta semplice articolare la stessa in base al valore assunto da  $x_0$  e da  $L$ .

$$\text{Pertanto se } x_0 \in \widehat{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \in R \\ x_0 = +\infty \\ x_0 = -\infty \end{cases} \quad \text{e} \quad \text{se} \quad L \in \widehat{R} \Leftrightarrow \begin{cases} L \in R \\ L = +\infty \\ L = -\infty \end{cases}$$

possono combinarsi i seguenti 9 casi di definizione di limite

### I CASO

Sia  $f : X \rightarrow R$

**Siano**  $x_0 \in R$  **ed**  $L \in R$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.c se } x \in X \text{ e se } 0 < |x - x_0| < \delta : |f(x) - L| < \varepsilon$$

### II CASO

Sia  $f : X \rightarrow R$

**Siano**  $x_0 \in R$  **ed**  $L \in +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.c se } x \in X \text{ e se } 0 < |x - x_0| < \delta : f(x) > \varepsilon$$

in quanto  $I_L = ]\varepsilon, +\infty[$ ,  $I_{+\infty}$  con  $\varepsilon > 0$  si ha  $f(x) \in I_L \Rightarrow f(x) > \varepsilon$

### III CASO

Sia  $f : X \rightarrow R$

**Siano**  $x_0 \in R$  **ed**  $L \in -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  t.c se  $x \in X$  e se  $0 < |x - x_0| < \delta : f(x) < -\varepsilon$

in quanto  $I_L = ]-\infty, -\varepsilon[$ ,  $I_{-\infty} : \text{allora } f(x) \in I_L \Rightarrow f(x) < -\varepsilon$

IV CASO

Sia  $f : X \rightarrow R$

Siano  $x_0 \in +\infty$  ed  $L \in R$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  t.c se  $x \in X$  e se  $x > \delta : |f(x) - L| < \varepsilon$

In quanto  $I_{x_0} = ]\delta, +\infty[$

V CASO

Sia  $f : X \rightarrow R$

Siano  $x_0 \in -\infty$  ed  $L \in R$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  t.c se  $x \in X$  e se  $x < -\delta : |f(x) - L| < \varepsilon$

In quanto  $I_{x_0} = ]-\infty, -\delta[$

VI CASO

Sia  $f : X \rightarrow R$

Siano  $x_0 \in +\infty$  ed  $L \in +\infty$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  t.c se  $x \in X$  e se  $x > \delta : f(x) > \varepsilon$

### VII CASO

Sia  $f : X \rightarrow R$

**Siano**  $x_0 \in +\infty$  **ed**  $L \in -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.c se } x \in X \text{ e se } x > \delta : f(x) < -\varepsilon$$

### VIII CASO

Sia  $f : X \rightarrow R$

**Siano**  $x_0 \in -\infty$  **ed**  $L \in -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.c se } x \in X \text{ e se } x < -\delta : f(x) < -\varepsilon$$

### IX CASO

Sia  $f : X \rightarrow R$

**Siano**  $x_0 \in -\infty$  **ed**  $L \in +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ t.c se } x \in X \text{ e se } x < -\delta : f(x) > \varepsilon$$

### Limiti di operazioni tra funzioni

Sia  $f : X \rightarrow R$

Sia  $g : X \rightarrow R$

Sia  $x_0 \in \widehat{R}$  in cui è possibile effettuare il limite su  $X$

Sia  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

Sia  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$

allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$

allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ , con  $g(x) \neq 0$  e  $M \neq 0$

### 5.3 – Teoremi sui limiti



*Teorema dell'unicità del limite*

#### Ipotesi

Sia  $f : X \rightarrow R$

Sia  $x_0 \in \widehat{R}$  in cui è possibile effettuare il limite su  $X$

Sia  $L \in \widehat{R}$

Se  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

allora

#### Tesi

Il limite è unico.

#### Dimostrazione

Si procede per assurdo, quindi poniamo che esistono due limiti diversi,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$  ed

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_2$ , con  $L_1 \neq L_2$ . Conseguentemente esisteranno due intorni  $I_{L_1}$  e  $I_{L_2}$ , tali che

$I_{L_1} \cap I_{L_2} = \emptyset$ .

Richiamando la definizione di limite si ha per il primo limite, in corrispondenza di  $I_{L_1} : \exists I'x_0$  t.c.  $\forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I'x_0$  risulta  $f(x) \in I_{L_1}$

Per il secondo limite

$I_{L_2} : \exists I''x_0$  t.c.  $\forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I''x_0$  risulta  $f(x) \in I_{L_2}$ . Se ora consideriamo l'intorno  $I_{x_0} : I'x_0 \cap I''x_0, \forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I_{x_0}$  risulta  $f(x) \in I_{L_1}$  ed  $f(x) \in I_{L_2}$  Quindi  $f(x) \in (I_{L_1} \cap I_{L_2}) \Leftrightarrow f(x) \in \emptyset$  e questo, per l'ipotesi del teorema, è assurdo, pertanto la tesi è confermata.

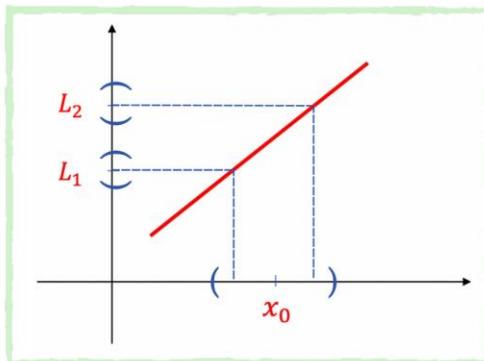


fig. 5.3.1



### I Teorema del confronto

#### Ipotesi

Sia  $f : X \rightarrow R$ , sia  $g : X \rightarrow R$

Sia  $x_0 \in \widehat{R}$  in cui è possibile effettuare il limite su  $X$

Siano  $L, M \in \widehat{R}$

se  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  ed  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$

e risulta che  $L < M$

allora

#### Tesi

$\exists I_{x_0}$  t.c.  $\forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I_{x_0}$  risulta  $f(x) < g(x)$

**T**

## II Teorema del confronto

### Ipotesi

Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , sia  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$

Sia  $x_0 \in \widehat{R}$  in cui è possibile effettuare il limite su  $X$

Siano  $L, M \in \widehat{R}$

se  $\exists I_{x_0}$  t.c.  $\forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I_{x_0}$  risulta  $f(x) \leq g(x)$

 allora

### Tesi

$$L \leq M$$

**T**

## Teorema della permanenza del segno

### Ipotesi

Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

Sia  $x_0 \in \widehat{R}$  in cui è possibile effettuare il limite su  $X$

Sia  $L \in \widehat{R}$

Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L < 0$

 allora

### Tesi

$\exists I_{x_0}$  t.c.  $\forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I_{x_0}$  risulta  $f(x) < 0$

### Dimostrazione I:

Servendosi del I Teorema del Confronto, ponendo la funzione  $g(x) = 0, \forall x \in X$  e replicando il Teorema della permanenza del segno si ha:

Se  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  ed  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  e risulta che  $L < 0$

Allora  $\exists I_{x_0}$  t.c.  $\forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I_{x_0}$  risulta  $f(x) < 0$

### Dimostrazione II:

Si osservi che se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L < 0$ , esistono due intorni  $I_L$  e  $I_0$ , tale che  $I_L \cap I_0 = \emptyset$ , quindi  $\forall \alpha \in I_L, \alpha \notin I_0$  e quindi  $a < 0$ .

Pertanto richiamando la definizione di limite:

$\forall I_L, \exists I_{x_0}$  t.c.  $\forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I_{x_0}$  risulta  $f(x) \in I_L$  quindi  $f(x) < 0$ .



### III Teorema del confronto

#### Ipotesi

Sia  $f : X \rightarrow R$ , sia  $g : X \rightarrow R$  e sia  $h : X \rightarrow R$

Sia  $x_0 \in \widehat{R}$  in cui è possibile effettuare il limite su  $X$

Sia  $L \in \widehat{R}$

se  $\exists I_{x_0}$  t.c.  $\forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I_{x_0} : h(x) \leq f(x) \leq g(x)$

e se  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$  ed  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$

allora

#### Tesi

$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

### Dimostrazione:

Per la definizione di limite, in riferimento al limite della funzione  $h$  si ha,

$$\forall I_L, \exists I'_{x_0} \text{ t.c. } \forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I'_{x_0} : h(x) \in I_L$$

In riferimento alla funzione  $g$ , si ha

$$\forall I_L, \exists I''_{x_0} \text{ t.c. } \forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I''_{x_0} : g(x) \in I_L$$

Quindi se consideriamo l'intorno  $J_{x_0} = I_{x_0} \cap I'_{x_0} \cap I''_{x_0}$  si ha:

$$\forall x \in (X - \{x_0\}) \cap J_{x_0} \text{ risulta } f(x) \in [h(x), g(x)] \text{ ed } h(x) \in I_L \text{ e } g(x) \in I_L$$

per cui il teorema sulla caratterizzazione degli intervalli essendo  $h(x)$  e  $g(x)$  due elementi dell'intervallo  $I_L$  si ha:  $[h(x), g(x)] \subseteq I_L$  e siccome  $f(x) \in [h(x), g(x)]$  allora  $f(x) \in I_L$ .

Quindi si è costruita la definizione di limite anche per la funzione  $f$ , ovvero:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$



### Teorema sul limite delle funzioni composte

#### Ipotesi

Sia  $f : X \rightarrow R$ , sia  $g : Y \rightarrow R$

Sia  $x_0 \in \widehat{R}$  in cui è possibile effettuare il limite su  $X$

Sia  $y_0 \in \widehat{R}$  in cui è possibile effettuare il limite su  $Y$

Sia  $L \in \widehat{R}$

se  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$

se  $\exists I_{x_0} \text{ t.c. } \forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I_{x_0} : f(x) \neq y_0$

e se  $\exists \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = L$

allora

#### Tesi

$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = L$

**T***Teorema sul limite della funzione reciproca***Ipotesi**Sia  $f : X \rightarrow R$ Sia  $x_0 \in \widehat{R}$  in cui è possibile effettuare il limite su  $X$ Sia  $L \in \widehat{R} - \{0\}$ Se  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  allora**Tesi**

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$$

**T***Teorema sul limite della funzione reciproca con forma indeterminata***Ipotesi**Sia  $f : X \rightarrow R$ Sia  $x_0 \in \widehat{R}$  in cui è possibile effettuare il limite su  $X$ se  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ , con  $f(x) \neq 0, \forall x \in X - \{x_0\}$ e se  $\exists I_{x_0}$  t.c.  $\forall x \in (X - \{x_0\}) \cap I_{x_0} : f(x) > 0$  $(f(x) < 0)$  allora**Tesi**

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty \quad \left( \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty \right)$$

## 5.4 – Il numero di Nepero

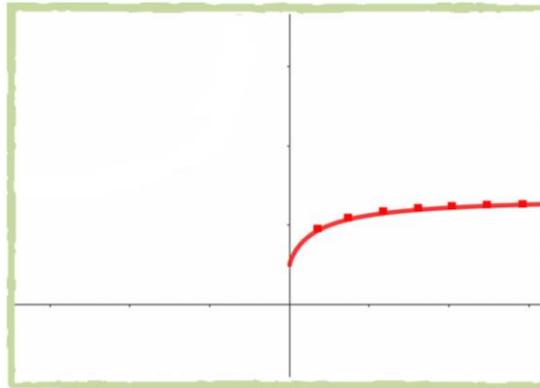
Sia  $f : N \rightarrow R$ , una successione di numeri reali, con  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ;

si osserva che tale successione è strettamente crescente, ovvero

$$\forall n_1, n_2 \in N \text{ con } n_1 < n_2 \text{ risulta } x_{n_1} < x_{n_2} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n_1}\right)^{n_1} < \left(1 + \frac{1}{n_2}\right)^{n_2};$$

ed inoltre limitata superiormente, ovvero  $\sup_{n \in N} x_n = k \in R$

Grafico di  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$



*fig. 5.4.1*

Sia  $g : N \rightarrow R$ , una successione di numeri reali, con  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ;

si osserva che tale successione è strettamente decrescente, ovvero

$$\forall n_1, n_2 \in N \text{ con } n_1 < n_2 \text{ risulta } x_{n_1} > x_{n_2} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n_1}\right)^{n_1+1} > \left(1 + \frac{1}{n_2}\right)^{n_2+1};$$

ed inoltre limitata inferiormente, ovvero  $\inf_{n \in N} x_n = h \in R$

ed inoltre risulta che le due successioni sono contigue, quindi  $k = h$ , e tale unico elemento separatore risulta appunto il numero di Nepero,  $e$ .

$$e = 2,718282$$

## Capitolo 6

### Le funzioni continue

#### 6.1 – Definizione di funzione continua

Data una funzione

Sia  $f : X \rightarrow R$

**Funzione continua in un punto**

si definisce funzione continua nel punto  $x_0$ ,  
se  $x_0 \in X$  e se  $x_0$  è punto isolato per  $X$

*oppure*

se  $x_0$  è punto accumulazione per  $X$  e se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L = f(x_0)$$

**Funzione continua**

Si dice che  $f$  è continua, nel suo dominio, se  $f$  è continua in tutti i punti del suo dominio.

**Punto di discontinuità**

$x_0$  si definisce punto di discontinuità se la funzione non è continua in esso, e può assumere una di queste forme:

## PUNTI DI DISCONTINUITÀ



### 1- Punto di discontinuità eliminabile

Sia  $f : X \rightarrow R$

Sia  $x_0 \in X$

Sia  $x_0$  punto di accumulazione per  $X$

se  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq f(x_0)$

allora  $x_0$  è un punto di **discontinuità eliminabile**

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \in ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[ \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0 \neq f(0) = \frac{\pi}{2}$$

in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x^2}\right) = +\infty \rightarrow \lim_{y \rightarrow +\infty} \operatorname{arccotg}(y) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2}\right) = +\infty \rightarrow \lim_{y \rightarrow +\infty} \operatorname{arccotg}(y) = 0$$

Quindi 0 è un punto di discontinuità *eliminabile*

## 2. Punto di discontinuità di I specie

Sia  $f : X \rightarrow R$

Sia  $x_0 \in X$

Sia  $x_0$  punto di accumulazione per  $X$

se  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L_1 \in R$

$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L_2 \in R$  con  $L_1 \neq L_2$

allora  $x_0$  è un punto di **discontinuità di I specie**

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \in R - \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Si osservi nel punto 0

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{|x|}{x} \right) = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{|x|}{x} \right) = 1 \rightarrow -1 \neq 1$  pertanto 0 è un punto di discontinuità di *I specie*.

## 3. Punto di discontinuità di II specie

Nei punti di discontinuità di II specie rientrano tutti i casi non contemplati nei primi 2 casi.

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x \in ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[ \\ \pi, & x = 0 \end{cases}$$

Si osservi nel punto 0

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} \right) = +\infty \rightarrow \lim_{y \rightarrow +\infty} (e^y) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} \right) = +\infty \rightarrow \lim_{y \rightarrow +\infty} (e^y) = +\infty$$

Pertanto  $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$  e non rientra nei 2 casi precedenti, quindi 0 è un punto di discontinuità di II specie.

## 6.2 – Teoremi sulle funzioni continue

**T** Teorema sulla continuità delle funzioni elementari

### Ipotesi

Sia  $f : X \rightarrow R$

se  $f$  è monotona

se  $f(X)$  è un intervallo

 allora

### Tesi

$f$  è continua

Ne consegue che tutte le funzioni elementari, sono continue nel loro insieme di definizione



### Teorema sulla continuità delle operazioni tra funzioni

#### Ipotesi

Sia  $f : X \rightarrow R$  e sia  $g : X \rightarrow R$

Sia  $x_0 \in X$

Se  $f$  e  $g$  sono continue in  $x_0$

 allora

#### Tesi

le funzioni  $f + g$ ,  $f \cdot g$  ed  $\frac{f}{g}$  con  $g(x) \neq 0$ , sono continue in  $x_0$  e sono continue in  $X$  se sono continue in ogni punto del loro dominio



### Teorema sulla continuità delle funzioni composte

#### Ipotesi

Sia  $f : X \rightarrow Y$  e sia  $g : Y \rightarrow R$

Sia  $x_0 \in X$

se  $f$  è continua in  $x_0$

se  $g$  è continua in  $y_0 = f(x_0)$

 allora

#### Tesi

$g \circ f$  è continua in  $x_0$

**T****Teorema di Weierstrass****Ipotesi**Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}, X \subseteq \mathbb{R}$ se  $X$  è chiuso e limitatose  $f$  è continua

allora

**Tesi** $f(X)$  è chiuso e limitato e conseguentemente  $f$  è dotata di minimo e massimo assoluti**T****Teorema di Bolzano****Ipotesi**Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se  $X$  è un intervallose  $f$  è continua

allora

**Tesi** $f(X)$  è un intervallo e conseguentemente  $f$  assume tutti i valori compresi tra due suoi valori.**Dimostrazione:**

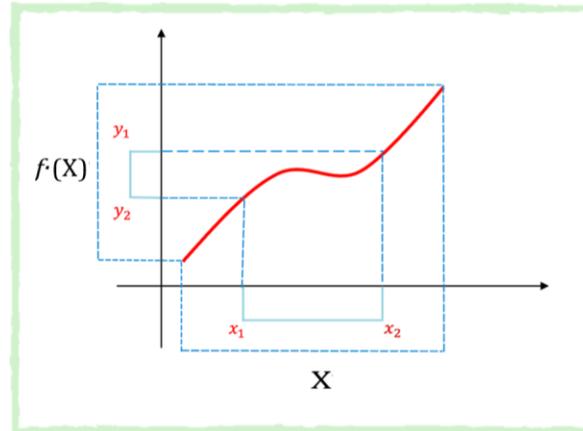
Se  $f$  è costante, assume sempre lo stesso valore, quindi è dimostrato.

In caso contrario, comunque si considerino due punti del dominio  $x_1, x_2$  t.c  $x_1 < x_2$ , considerando che  $X$  è un intervallo e la funzione  $f$  è continua, l'intervallo dato dai valori

$f(x_1)$  e  $f(x_2)$  sarà incluso in  $f(X)$ .

Quindi per il teorema che caratterizza gli intervalli,  $f(X)$  è un intervallo e conseguentemente  $\forall y \in [f(x_1), f(x_2)] \Leftrightarrow y \in f(X)$

Quindi  $\exists x \in X$  t.c  $f(x) = y$



*fig. 6.2.1*

**T** Teorema degli Zeri

**Ipotesi**

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

se  $f$  è continua

se  $f(a) \cdot f(b) < 0$

 allora

**Tesi**

$\exists x_0 \in ]a, b[$  t.c  $f(x_0) = 0$

### Dimostrazione:

In tale teorema ricorrono tutte le ipotesi del teorema di Bolzano, pertanto  $f([a, b])$  è un intervallo, e consideriamo i due valori

$f(a), f(b) \in f([a, b])$ , si ha:  $[f(a), f(b)] \subseteq f([a, b])$  e ricordando che  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , pertanto  $0 \in [f(a), f(b)] \Leftrightarrow 0 \in f([a, b])$

Quindi  $\exists x_0 \in ]a, b[$  t.c  $f(x_0) = 0$



### Teorema del punto fisso

#### Ipotesi

Sia  $f : [a, b] \rightarrow R$

se  $f$  è continua

se  $f([a, b]) \subseteq [a, b] \Leftrightarrow f(a), f(b) \in [a, b]$

 allora

#### Tesi

$\exists c \in [a, b]$  t.c  $f(c) = c$

### Dimostrazione:

Consideriamo la funzione  $g : [a, b] \rightarrow f(x) - x$  ed osserviamo che essendo la differenza di funzioni continue, è continua.

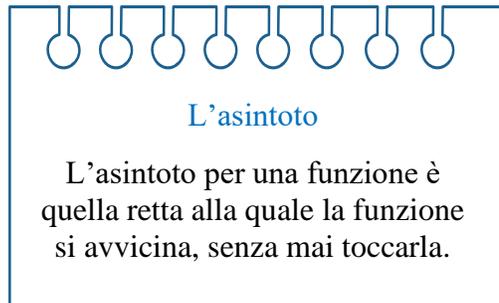
Osserviamo ancora che  $g(a) = f(a) - a$  ed  $g(b) = f(b) - b$  e tenendo conto delle ipotesi, risulta:

$$f(a) \geq a \Leftrightarrow f(a) - a \geq 0 \Leftrightarrow g(a) \geq 0 \text{ ed } f(b) \leq b \Leftrightarrow f(b) - b \leq 0 \Leftrightarrow g(b) \leq 0.$$

Quindi se  $g(a) = 0$  o  $g(b) = 0$ , il teorema è dimostrato. Se  $g(a) \neq 0$  e  $g(b) \neq 0$  ed essendo quindi  $g(a) > 0$  e  $g(b) < 0$  ricorrono le ipotesi del teorema degli Zeri, per cui:

$$\exists c \in ]a, b[ \text{ t.c } g(c) = 0 \text{ ovvero } f(c) - c = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$$

## 6.3 – Gli asintoti



### 1. Asintoto verticale

Sia  $f : X \rightarrow R$

Sia  $x_0 \in R$  in cui è possibile effettuare il limite su  $X$

Se  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm \infty$ , allora la retta  $x = x_0$  si definisce asintoto verticale sinistro.

Se  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm \infty$ , allora la retta  $x = x_0$  si definisce asintoto verticale destro.

Esempio

Si consideri la seguente funzione

$$f(x) = \frac{-2x+1}{\frac{x}{2}-1}$$

1. **Il dominio risulta:**  $R - \{2\}$  in quanto  $\frac{x}{2} - 1 \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{2} \neq 1$  pertanto  $x \neq 2 : f : R - \{2\}$

2. **Verifichiamo ora il limite in**  $x_0 = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x+1}{\frac{x}{2}-1} = \lim_{x \rightarrow 2^-} -2x+1 \cdot \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{\frac{x}{2}-1} = -3 \cdot -\infty = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2x+1}{\frac{x}{2}-1} = \lim_{x \rightarrow 2^+} -2x+1 \cdot \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\frac{x}{2}-1} = -3 \cdot +\infty = -\infty$$

Pertanto l'equazione della retta  $x = 2$ , risulta un asintoto verticale sia a sinistra che a destra per la funzione data.

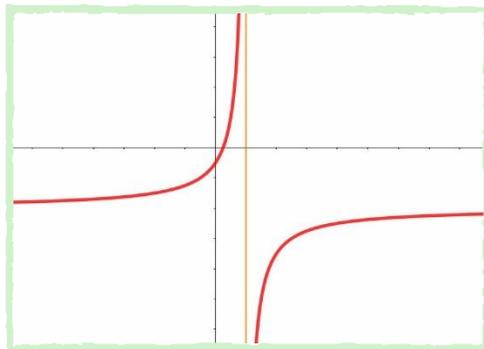


fig 6.3.1

## 2. Asintoto orizzontale:

Sia  $f : X \rightarrow R$

Sia  $x_0 = \pm \infty$  in cui è possibile effettuare il limite su  $X$

Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in R$ , allora la retta  $y = L$  si definisce asintoto orizzontale.

Esempio

Sia data la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{-x+2}{-\frac{x+1}{3}}$$

1. Essendo definito in  $R - \{-1\}$ , verifichiamo i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+2}{-\frac{x+1}{3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(-1 + \frac{2}{x}\right)}{x\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{5x}\right)} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+2}{-\frac{x+1}{3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(-1 + \frac{2}{x}\right)}{x\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{5x}\right)} = 3$$

Pertanto l'equazione della retta  $y = 3$ , risulta un asintoto orizzontale sia a sinistra che a destra per la funzione data.

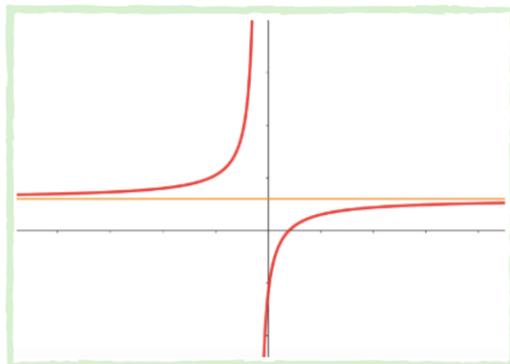


fig 6.3.2

### 3. Asintoto obliquo:

Sia  $f : X \rightarrow R$

Sia  $x_0 = \pm \infty$  in cui è possibile effettuare il limite su  $X$

Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$ , allora la funzione come si osserva non ha un asintoto orizzontale, ma potrebbe avere un asintoto obliquo.

Pertanto per definizione di asintoto, l'asintoto obliquo risulterà l'equazione della retta  $y = ax + b$

tale che  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - (ax + b)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x} = \frac{ax}{x} + \frac{b}{x} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x} = a \in R - \{0\}$

Conseguentemente  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - ax = b$ , per cui la retta  $ax + b = y$  è l'equazione della retta asintoto obliquo.

**Si nota che la funzione che ha un asintoto orizzontale non può avere un asintoto obliquo.**

Esempio

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left( 3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x \left( 1 - \frac{1}{x} \right)} = 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} x = 3(+\infty) = +\infty$$

Pertanto verifichiamo se la funzione  $f(x)$  potrebbe avere un asintoto obliquo:

1. Calcoliamo il limite di  $x$  che tende a  $+\infty$  di  $\frac{f(x)}{x}$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = 3$$

2. Calcoliamo ora:

$$f(x) - ax = b$$

$$\frac{3x^2 - 2x + 1}{x-1} - 3x = \frac{3x^2 - 2x + 1 - 3x^2 + 3x}{x-1} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = 1$$

La retta di equazione  $y = 3x + 1$  risulta l'asintoto obliquo a destra.

3. Calcoliamo il limite di  $x$  che tende a  $-\infty$  di  $\frac{f(x)}{x}$ :

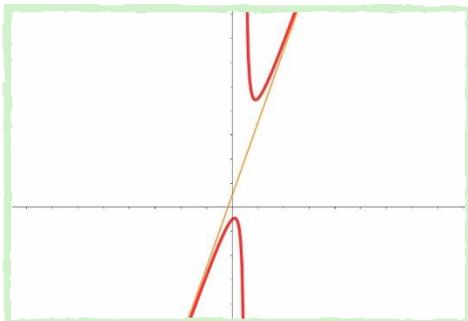
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = 3 \lim_{x \rightarrow -\infty} x = 3(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = 3$$

4. Essendo anche in questo caso  $a = 3$ , calcoliamo  $b$ :

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = 1$$

Quindi la funzione  $f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 1}$  ha un asintoto obliquo (sia a sinistra che a destra), di equazione  $y = 3x + 1$



*fig 6.3.3*

## Capitolo 7

### Derivate

#### 7.1 – Definizione di derivata

Rapporto incrementale

Sia  $f : X \rightarrow R$ ,  $x_0 \in X$

$\forall x \in X$

si definisce rapporto incrementale della funzione  $f$  in  $x_0$ ,  
il rapporto tra il  $\Delta$  (incremento) della funzione  $f$  in  $x_0$  e  
il  $\Delta$  (incremento) della variabile indipendente in  $x_0$

Pertanto se  $\Delta$  di  $f(x_0) = f(x) - f(x_0)$  e se  $\Delta$  di  $x_0 = x - x_0$ ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

si definisce rapporto incrementale

Quindi

Sia  $f : X \rightarrow R$

Sia  $x_0 \in X$  in cui è possibile effettuare il limite su  $X$

Se  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ ,

$f'(x_0)$  è detta derivata della funzione  $f$  in  $x_0$ .

## Significato geometrico della derivata

Se consideriamo due punti:  $P_0 = (x_0, f(x_0))$  e  $P_1 = (x_1, f(x_1))$

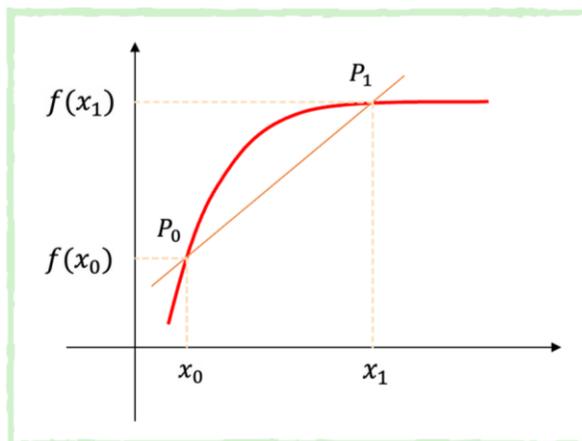


fig. 7.1.1

L'equazione della retta passante per i due punti assegnati, risulta:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{y - f(x_0)} = \frac{x_1 - x_0}{x - x_0}$$

$$(f(x_1) - f(x_0))(x - x_0) = (x_1 - x_0)(y - f(x_0))$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) = y - f(x_0)$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0) = y$$

Si noti che il coefficiente angolare di questa retta, è un rapporto incrementale, pertanto se consideriamo il seguente limite:

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0),$$

si ha l'equazione della retta tangente sulla funzione  $f$ , nel punto  $(x_0, f(x_0))$ , il cui coefficiente angolare è appunto, come si osserva, la derivata nel punto  $x_0$ , ovvero:  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

## 7.2 – Derivabilità di una funzione

Sia  $f : X \rightarrow R$

Sia  $x_0 \in X$  in cui è possibile effettuare il limite su  $X$

$$\text{Se } \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in R$$



$f$  è derivabile (in  $x_0$ )

Una funzione  $f$  si dice **derivabile**, se è derivabile in tutto il suo dominio, ovvero se:

(il dominio di  $f \cap$  dominio di  $f' \subseteq$  dominio di  $f$ )

Una funzione si dice *dotata di derivata* nel punto  $x_0$  se:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \pm \infty$$

T

*Teorema sulla continuità delle funzioni derivabili*

**Ipotesi**

Sia  $f : X \rightarrow R$

Sia  $x_0 \in X$ , punto di accumulazione per  $X$

Sia  $f$  derivabile in  $x_0$



allora

**Tesi**

$f$  è continua in  $x_0$

Dimostrazione:

Se osserviamo che  $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$

E consideriamo  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)$

essendo  $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = 0$  ed essendo  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$

in quanto per definizione  $x_0$  derivabile in  $x_0$ , risulta:

$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , esattamente la definizione di funzione continua in  $x_0$ .

## PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

Sia  $x_0 \in X$

Sia  $x_0 \in X$  in cui è possibile effettuare il limite su  $X$

### Punti angolosi

Se  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = L_1 \in \mathbb{R}$  e se  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = L_2 \in \mathbb{R}$ , con  $L_1 \neq L_2$ ,

allora  $x_0$  è un punto **angoloso**

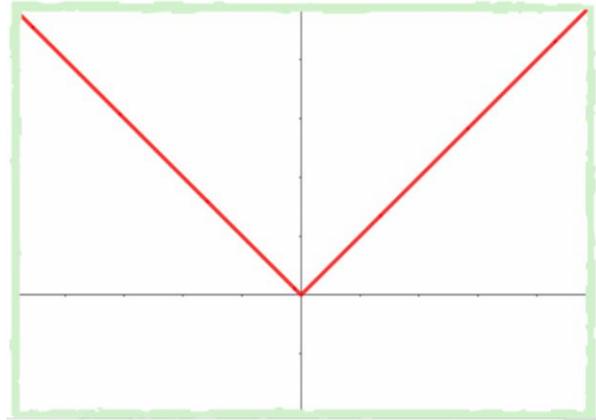
Se  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \pm \infty$  e se  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = L \in \mathbb{R}$ ,

allora  $x_0$  è un punto **angoloso**

Se  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = L \in \mathbb{R}$  e se  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \pm \infty$ ,

allora  $x_0$  è un punto **angoloso**

Esempio



Esempio di punto angoloso

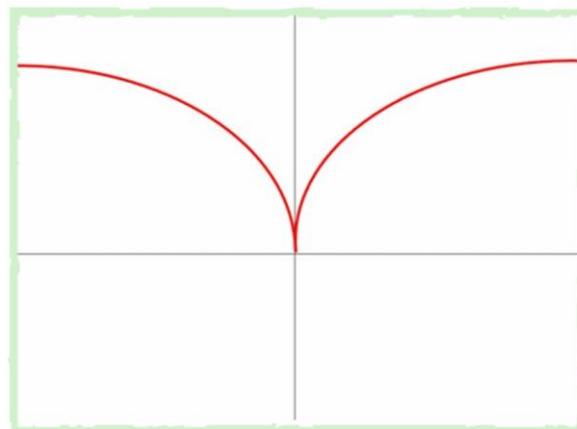
*fig. 7.2.1*

Punti di cuspide

Se  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \pm \infty$  e se  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \mp \infty$ ,

allora  $x_0$  è un punto di **cuspid**e

Esempio



Esempio di punto di cuspide

*fig. 7.2.2*

## Punti di flesso

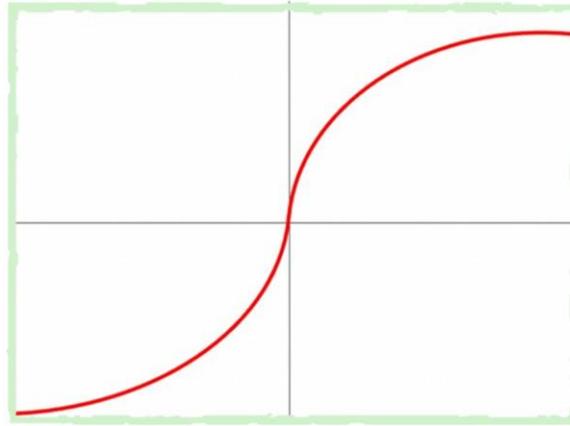
Se  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = +\infty$  e se  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = +\infty$ ,

allora  $x_0$  è un punto di **flesso ascendente**

Se  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = -\infty$  e se  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = -\infty$ ,

allora  $x_0$  è un punto di **flesso discendente**

Esempio



Esempio di punto di flesso

fig. 7.2.3

## 7.3 – Alcune derivate di funzioni elementari

1.  $D k = 0$ , funzione costante con  $k \in \mathbb{R}$
2.  $D x^a = a x^{a-1}$ , funzione potenza con  $a \in \mathbb{N}$  ed  $x \in \mathbb{R}$
3.  $D \sqrt[n]{x^m} = \frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} = \frac{m}{n \sqrt[n]{x^{n-m}}}$  caso  $x^a$ , con  $a = \frac{m}{n}$  ed  $x \in ]0, +\infty[$
4.  $D \operatorname{sen} x = \cos x$  con  $x \in \mathbb{R}$
5.  $D \cos x = -\operatorname{sen} x$  con  $x \in \mathbb{R}$
6.  $D \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$  con  $x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$

$$7. D \cotgx = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -(1 + \cotg^2 x) \text{ con } x \in R - \bigcup_{k \in Z} \{k\pi\}$$

$$8. D \operatorname{arcsen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ con } x \in ]-1, 1[$$

$$9. D \operatorname{arccos} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ con } x \in ]-1, 1[$$

$$10. D \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2} \text{ con } x \in R$$

$$11. D \operatorname{arccotg} x = -\frac{1}{1+x^2} \text{ con } x \in R$$

$$12. D a^x = a^x \log a, \text{ con } 0 < a \neq 1 \text{ ed } x \in R$$

$$13. D e^x = e^x \text{ con } e = 2.718281828 \text{ ed } x \in R$$

$$14. D |x| = \frac{|x|}{x} \text{ con } x \neq 0$$

$$15. D \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e \text{ con } 0 < a \neq 1 \text{ ed } x > 0$$

$$16. D \log_a (-x) = -\frac{1}{x} \log_a e \text{ con } 0 < a \neq 1 \text{ ed } x < 0$$

$$17. D \log_a |x| = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|x|}{x} \log_a e \text{ con } x \neq 0$$

## 7.4 – Alcune regole fondamentali di derivazione

$$1. D [kf(x)] = kf'(x) \text{ con } x \in \operatorname{dom}(f') \text{ e } k \in R$$

$$2. D (f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x) \text{ con } x \in \operatorname{dom}(f') \cap \operatorname{dom}(g')$$

$$3. D (\alpha f(x) \pm \beta g(x)) = \alpha f'(x) \pm \beta g'(x) \text{ con } x \in \operatorname{dom}(f') \cap \operatorname{dom}(g') \text{ ed } \alpha, \beta \in R$$

$$4. D (f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \text{ con } x \in \operatorname{dom}(f') \cap \operatorname{dom}(g')$$

$$5. D \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \text{ con } x \in \operatorname{dom}(f') \cap \operatorname{dom}(g') \text{ e } g(x) \neq 0$$

$$6. D g(f(x)) = g'(f(x))f'(x) \text{ con } x \in \operatorname{dom}(f') \text{ ed } f(x) \in \operatorname{dom}(g')$$

$$7. D f(x)^\alpha = \alpha (f(x))^{\alpha-1} \cdot f'(x) \text{ con } x \in \operatorname{dom}(f'), f(x) > 0 \text{ ed } \alpha \in R$$

$$8. D \log_a f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \log_a e \text{ con } x \in \operatorname{dom}(f'), f(x) > 0 \text{ ed } 0 < a \neq 1$$

$$9. D \log f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ con } x \in \operatorname{dom}(f'), f(x) > 0$$

10.  $D a^{f(x)} = a^{f(x)} f'(x) \log a$  con  $x \in \text{dom}(f')$  ed  $a > 0$

11.  $D f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$  con  $x \in \text{dom}(f')$ ,  $f(x_0) \neq 0$  ed  $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$

*Nota\**

*Le regole 1 e 2 sono casi particolari della 3 (linearità)*

*Le regole 7, 8 e 10 sono casi particolari della 6*

### Alcune derivate di funzione composte

1.  $D \text{sen}(f(x)) = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$

2.  $D \cos(f(x)) = -\text{sen}(f(x)) \cdot f'(x)$

3.  $D \text{tg}(f(x)) = \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}$

4.  $D \text{cotg}(f(x)) = -\frac{f'(x)}{\text{sen}^2(f(x))}$

5.  $D \text{arctg}(f(x)) = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$

6.  $D \text{arccotg}(f(x)) = -\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$

7.  $D f(x)^{g(x)} = D e^{\log(f(x))^{g(x)}} = D e^{g(x) \log(f(x))} = f(x)^{g(x)} \cdot \left[ g'(x) \log(f(x)) + \frac{f'(x)}{f(x)} g(x) \right]$

## 7.5 – Derivazione di secondo ordine

Sia  $f : X \rightarrow R$

Sia  $x_0 \in X$ , punto di accumulazione per  $X$

Sia  $f' : X \rightarrow R$

Se  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0) \in R \Leftrightarrow f'$  è derivabile (in  $x_0$ )

Conseguentemente la funzione  $f$  è derivabile due volte in  $x_0$ .

Una funzione si dice dotata di derivata seconda se  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0) = \pm \infty$

Conseguentemente la funzione  $f$  è dotata di derivata seconda nel punto  $x_0$ .

### Condizioni sufficienti sulla stretta monotonia di una funzione

Sia  $f : X \rightarrow R$

Sia  $x_0 \in X$ , punto di accumulazione per  $X$

Se  $\exists$  il limite del rapporto incrementale della funzione  $f$ , il segno della funzione  $f'$  ne determina la stretta monotonia della funzione  $f$ .

Pertanto:

Se  $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  è strettamente **crescente**

Se  $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  è strettamente **decrescente**

### Condizioni sufficienti sulla convessità e concavità di una funzione

Sia  $f : X \rightarrow R$

Sia  $X$  un intervallo

Se  $\exists$  il limite del rapporto incrementale della funzione  $f'$ , il segno della funzione  $f''$  ne determina la stretta convessità o concavità della funzione  $f$ .

Pertanto:

Se  $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  è strettamente **convessa**

Se  $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  è strettamente **concava**

## 7.6 – Minimo e massimo assoluto/relativo

Minimo e massimo assoluti e/o relativi di una funzione

Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  ed  $x_0 \in X$

si definisce:



**Minimo assoluto della funzione,  $f(x_0)$**   
 $\forall I_{x_0}, \text{ se } x \in X \cap I_{x_0} : f(x) \geq f(x_0)$



**Minimo relativo della funzione,  $f(x_0)$**   
 $\exists I_{x_0}, \text{ se } x \in X \cap I_{x_0} : f(x) \geq f(x_0)$



**Minimo assoluto proprio della  
funzione,  $f(x_0)$**   
 $\forall I_{x_0}, \text{ se } x \in X \cap I_{x_0} : f(x) > f(x_0)$



**Minimo relativo proprio della  
funzione,  $f(x_0)$**   
 $\exists I_{x_0}, \text{ se } x \in X \cap I_{x_0} : f(x) > f(x_0)$



**Massimo assoluto della funzione,  $f(x_0)$**   
 $\forall I_{x_0}, \text{ se } x \in X \cap I_{x_0} : f(x) \leq f(x_0)$



**Massimo relativo della funzione,  $f(x_0)$**   
 $\exists I_{x_0}, \text{ se } x \in X \cap I_{x_0} : f(x) \leq f(x_0)$



**Massimo assoluto proprio della  
funzione,  $f(x_0)$**   
 $\forall I_{x_0}, \text{ se } x \in X \cap I_{x_0} : f(x) < f(x_0)$



**Massimo relativo proprio della  
funzione,  $f(x_0)$**   
 $\exists I_{x_0}, \text{ se } x \in X \cap I_{x_0} : f(x) < f(x_0)$

**N.B**  $x_0$  è detto punto di minimo/massimo,  $f(x_0)$  è il minimo/massimo.

## 7.7 – Teoremi sulla derivazione

T

*Teorema dei punti critici*

**Ipotesi**

Sia  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Sia  $g$  continua in  $[a, b]$

Siano:

$$F = \{a, b\}$$

$$C = \{x \in ]a, b[ \mid \nexists g'(x) \in \mathbb{R}\}$$

$$S = \{x \in ]a, b[ \mid g'(x) = 0\}$$

E sia quindi  $A = \{F \cup C \cup S\}$

 allora

**Tesi**

$$\max_{x \in [a, b]} g(x) = \max_{x \in A} g(x)$$

*oppure*

$$\min_{x \in [a, b]} g(x) = \min_{x \in A} g(x)$$

T

*Teorema di de L'Hopital*

**Ipotesi**

Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

Sia  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$

Se  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

 allora

**Tesi**

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**T**

*Teorema di Fermat*

**Ipotesi**

Sia  $f : X \rightarrow R$

Sia  $x_0 \in X$ , punto di accumulazione per  $X$  sia a sinistra che a destra

Sia  $f$  derivabile in  $x_0$

Sia  $x_0$  un punto di massimo o di minimo relativo

 allora

**Tesi**

$$f'(x_0) = 0$$

**Dimostrazione:**

Per le ipotesi fatte, la funzione è derivabile in  $x_0$ , quindi risulta  $f'_s(x_0) = f'(x_0) = f'_d(x_0)$ .

Se ci poniamo nel caso che  $x_0$  sia un punto di massimo relativo, avremmo che  $f'_s(x_0) \geq 0$  e  $f'_d(x_0) \leq 0$

e per la derivabilità della funzione in  $x_0$  risulta:

$$0 \leq f'_s(x_0) = f'(x_0) = f'_d(x_0) \leq 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$$



## Teorema di Rolle

### Ipotesi

Sia  $f[a,b] \rightarrow R$

Sia  $f$  continua in  $[a,b]$

Sia  $f$  derivabile in  $]a,b[$

e sia  $f(a) = f(b)$

 allora

### Tesi

$\exists c \in ]a,b[ / f'(c) = 0$

### Dimostrazione:

Per il teorema di Weierstrass, la funzione è dotata di minimo e massimo assoluti.

Quindi se  $x_1 = a$  ed  $x_2 = b$  con  $x_1$  e  $x_2$  punti di minimo e massimo assoluti per la funzione, allora per le ipotesi nel teorema, la funzione risulta costante in quanto  $f(x_1) = f(x_2)$ , e pertanto  $\forall x \in [a,b]: f'(x) = 0$ .

Nel caso in cui  $x_1 \neq a$  allora  $x_1 \in ]a,b[$ , quindi ricorrono tutte le ipotesi del teorema di Fermat, per cui basta porre  $x_1 = c$ ; così come nel caso  $x_1 \neq b$ . Il teorema resta così completamente dimostrato.

# Capitolo 8

## Integrazione

### 8.1 – Definizione di integrale

Il concetto di integrale nasce dall'esigenza di misurare l'area sottostante una curva.  
I primi studi risalgono ad Archimede (287-212 a.C)

Iniziamo con il dare la definizione di funzione **generalmente derivabile**:

Sia  $f : X \rightarrow R$

se  $\exists Y$  finito e risulta  $Y \subseteq X$

Se  $f$  è derivabile in  $X - Y$

Allora si dice che  $f$  è **generalmente derivabile** in  $X$

Per esempio, se consideriamo la funzione:

$f : R \rightarrow f(x) = |x| \in R$ , la sua derivata risulta  $f'(x) = \frac{|x|}{x}, \forall x \in R - \{0\}$

quindi la funzione  $f$  risulta generalmente derivabile nel suo dominio.

#### Definizione di primitiva di una funzione

Sia  $F : X \rightarrow R$ , con  $X$  un intervallo, e con  $\overset{\circ}{X} \neq \emptyset$

Sia  $f : X \rightarrow R$ ,

Sia  $F$  continua in  $X$

e sia  $F$  generalmente derivabile in  $I$  chiuso e limitato, con  $I \subseteq \overset{\circ}{X}$

Si dice che  $F$  è una **primitiva della funzione**  $f$



Se  $\forall I$ , intervallo chiuso e limitato, con  $I \subseteq \overset{o}{X}$ , ed  $F$  generalmente derivabile in  $I$ , risulta:  
 $F'(x) = f(x)$

Esempio

Siano le funzioni

$$f : R - \{0\} \rightarrow f(x) = \frac{1}{x} \in R,$$

$$F : R - \{0\} \rightarrow F(x) = \log|x| \in R \text{ è una primitiva di } f(x) \text{ in quanto } F'(x) = \frac{1}{x} = f(x)$$

T

*Teorema sull'esistenza di infinite primitive*

**Ipotesi**

Sia  $F : X \rightarrow R$  una primitiva della funzione  $f : X \rightarrow R$

⇓ allora

**Tesi**

La funzione  $G(x) = F(x) + c$ ,

è anche una primitiva della funzione  $f(x)$ ,  $\forall c \in R$

**Dimostrazione:**

Si vede facilmente in quanto essendo  $F$  una primitiva di  $f$ ,  $F$  è continua e generalmente derivabile. Conseguentemente anche  $G = F + c$  è continua e generalmente derivabile, e risulta  $G'(x) = D(F + c) = DF + Dc = F' = f$

*Quindi se esiste una primitiva, esistono infinite primitive.*



### Teorema sulla differenza di 2 primitive

#### Ipotesi

Siano  $F_1$  e  $F_2$  due primitive di  $f$ ,  $F_1 : X \rightarrow R$ ,  $F_2 : X \rightarrow R$



allora

#### Tesi

$$F_1(x) - F_2(x) = c \in R$$

#### Dimostrazione:

Poniamo  $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$ , quindi la funzione  $G$  è continua e generalmente derivabile e risulta  $G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f - f = 0$ , questo implica che solo la derivata di una costante è pari a 0, pertanto:  $F_1(x) - F_2(x) = c$ , con  $c$  costante.

Quindi tutte e solo le primitive differiscono per una costante.

#### Definizione di integrale indefinito

Sia  $f : X \rightarrow R$ , con  $\overset{\circ}{X}$  intervallo, e con  $\overset{\circ}{X} \neq \emptyset$ ,  $f$  ammette almeno una primitiva.

Si definisce **integrale indefinito di  $f$** , l'insieme delle primitive della funzione  $f$ .

$\{ F : X \rightarrow R, \text{ tale che } F \text{ primitiva di } f \}$

E si scrive anche  $\int f(x)dx = F(x)$



Alcune  
proprietà

### Proprietà di linearità dell'integrale indefinito:

Siano  $f : X \rightarrow R$  e  $g : X \rightarrow R$ , dotate di primitive e siano  $a, b \in R$  si ha:

$$\int [af(x) + bg(x)]dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx$$

L'integrale della combinazione lineare è uguale alla combinazione lineare degli integrali.

Se si pone  $b = 0$ , si ha  $\int af(x)dx = a \int f(x)dx$

Se si pone  $a = b = 1$ , si ha  $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

## 8.2 – Alcuni integrali indefiniti immediati

1.  $\int kdx = kx + c$ , con  $k \in R$
2.  $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c$ , con  $p \in R$
3.  $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$
4.  $\int a^x dx = a^x \cdot \log_a e + c$
5.  $\int \cos x dx = \text{sen}x + c$
6.  $\int \text{sen}x dx = -\cos x + c$
7.  $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \text{tg}x + c$
8.  $\int -\frac{1}{\text{sen}^2 x} dx = \text{cot}g x + c$
9.  $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{arctg}x + c$
10.  $\int -\frac{1}{1+x^2} dx = \text{arccot}g x + c$
11.  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arcsen}x + c$
12.  $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arccos}x + c$

### 8.3 – Alcuni integrali indefiniti quasi immediati

1.  $\int f'(x)dx = f(x) + c$
2.  $\int [f(x)]^p f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{p+1}}{p+1} + c$  con  $p \in \mathbb{R}$
3.  $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + c$
4.  $\int a^{f(x)} f'(x)dx = a^{f(x)} \cdot \log_a e + c$
5.  $\int \cos(f(x))f'(x)dx = \text{sen}f(x) + c$
6.  $\int \text{sen}(f(x))f'(x)dx = -\cos f(x) + c$
7.  $\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}dx = \text{tg}f(x) + c$
8.  $\int \frac{-f'(x)}{\text{sen}^2 f(x)}dx = \text{cot}f(x) + c$
9.  $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}dx = \text{arcsenf}(x) + c$
10.  $\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}dx = \text{arccos}f(x) + c$
11.  $\int \frac{-f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx = \text{arccot}f(x) + c$
12.  $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx = \text{arctg}f(x) + c$

Esempio

del tipo 8.2.1:

$$\int 1dx = x + c$$

del tipo 8.2.2:

$$\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = -\frac{1}{x} + c$$

del tipo 8.2.2:

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$$

del tipo 8.2.2:

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + c = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + c$$

del tipo 8.3.1:

$$\int (x^2 - 2x + 3) dx = \int x^2 dx - 2 \int x dx + 3 \int dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 3x + c = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + c$$

del tipo 8.3.2:

$$\int (2x)^2 dx = \frac{1}{2} \int (2x)^2 \cdot 2 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x)^{2+1}}{2+1} + c = \frac{(2x)^3}{6} + c$$

del tipo 8.3.6:

$$\int \text{sen}(2x) dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + c$$

del tipo 8.3.9:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}} dx = \frac{1}{3} \arcsen(3x) + c$$

del tipo 8.3.12:

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2} dx = \frac{1}{2} \text{arctg}(2x) + c$$

## 8.4 – Alcuni integrali di funzioni razionali

Caso di polinomio al numeratore, con grado maggiore o uguale, del denominatore

Data la funzione  $f(x) = \frac{2x^2 + x - 5}{3x - 1}$

è possibile effettuare **la divisione tra i polinomi**, e pertanto si ha:

$$\begin{array}{r} 2x^2 + x - 5 \quad | \quad 3x - 1 \\ \underline{2x^2 - \frac{2}{3}x} \quad | \quad \frac{2}{3}x + \frac{5}{9} \end{array}$$

1) 
$$\begin{array}{r} \frac{5}{3}x - 5 \\ \underline{\frac{5}{3}x - \frac{5}{9}} \\ -\frac{40}{9} \end{array}$$

2) 
$$\frac{2x^2 + x - 5}{3x - 1} = \frac{2}{3}x + \frac{5}{9} - \frac{\frac{40}{9}}{3x - 1}$$

3) Quindi l'integrale della funzione data, risulta:

$$\int \frac{2x^2 + x - 5}{3x - 1} dx = \int \left( \frac{2}{3}x + \frac{5}{9} - \frac{\frac{40}{9}}{3x - 1} \right) dx = \frac{2}{3} \int x dx + \frac{5}{9} \int dx - \frac{40}{27} \int \frac{3}{3x - 1} dx,$$

conseguentemente una primitiva risulta:  $F(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{9}x - \frac{40}{27} \log|3x - 1| + c.$

Caso di polinomio al denominatore con delta < 0

Data la funzione  $f(x) = \frac{1}{2x^2 - x + 1}$  il cui polinomio al denominatore ha  $\Delta < 0$ .

Si ricorda che un generico polinomio,  $ax^2 + bx + c$  con delta negativo, può essere scritto:

$ax^2 + bx + c = a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$  e conseguentemente ridurlo al tipo

$$a \frac{\left( \left( \frac{2ax+b}{2a} \right)^2 + \frac{\Delta}{4a^2} \right)}{\frac{\Delta}{4a^2}} = \Delta \frac{\left( \left( \frac{2ax+b}{2a} \sqrt{\frac{4a^2}{\Delta}} \right)^2 + 1 \right)}{4a} \text{ e quindi}$$

$$\frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{\Delta \frac{\left( \left( \frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} \right)^2 + 1 \right)}{4a}} = \frac{4a}{\Delta} \frac{1}{\left( \frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} \right)^2} \text{ che è del tipo } \frac{4a}{\Delta} \frac{1}{1+(f(x))^2} \text{ per cui}$$

$$\frac{4a}{\Delta} \frac{1}{1+(f(x))^2} \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{4a}{\Delta f'(x)} \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2},$$

$$\text{quindi, } \int \frac{4a}{\Delta f'(x)} \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2} dx = \frac{4a}{\Delta f'(x)} \int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2} dx = \frac{4a}{\Delta f'(x)} \arctg f(x)$$

Pertanto l'integrale della funzione data,  $\int \frac{1}{2x^2 - x + 1} dx$ , può essere ricondotto al seguente integrale:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2x^2 - x + 1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left( x - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{7}{16}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left( \left( \frac{4x-1}{4} \right)^2 + 1 \right) + \frac{7}{16}} dx = \\ &= \frac{8}{7} \frac{\sqrt{7}}{4} \int \frac{\frac{4}{\sqrt{7}}}{1 + \left( \frac{4x-1}{\sqrt{7}} \right)^2} dx = \frac{2}{\sqrt{7}} \arctg \left( \frac{4x-1}{\sqrt{7}} \right) + c \end{aligned}$$

**Caso di polinomio al denominatore con delta = 0**

Nel caso in cui il polinomio al denominatore ha  $\Delta = 0$  del tipo:  $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 1} dx$

Trovata la soluzione doppia del polinomio, si ha:

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 1} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = \int (x+1)^{-2} dx = -(x+1)^{-2+1} + c = -\frac{1}{(x+1)} + c$$

Caso di polinomio al denominatore con delta > 0

Nel caso in cui il polinomio al denominatore ha  $\Delta > 0$  del tipo:  $\int \frac{1}{2x^2 + x - 1} dx$

In un generico polinomio, trovate le soluzioni,  $\alpha$  e  $\beta$ , possiamo scrivere:  
 $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$  e quindi si ha:

$$\frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \frac{1}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{1}{a} \frac{A}{(x - \alpha)} + \frac{B}{(x - \beta)} = \frac{1}{a} \frac{A(x - \beta) + B(x - \alpha)}{(x - \alpha)(x - \beta)} = \frac{1}{a} \frac{(A + B)x - A\beta - B\alpha}{(x - \alpha)(x - \beta)}$$

Per cui per l'identità dei polinomi, basta risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A\beta - B\alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} A = -B \\ B(\beta - \alpha) = 1 \end{cases} = \begin{cases} A = -\frac{1}{(\beta - \alpha)} \\ B = \frac{1}{(\beta - \alpha)} \end{cases}$$

Pertanto 
$$\frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \frac{A}{(x - \alpha)} + \frac{B}{(x - \beta)} = \frac{1}{a} \frac{-1}{(x - \alpha)} + \frac{1}{(x - \beta)}$$

Quindi

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = -\frac{1}{a(\beta - \alpha)} \int \frac{1}{(x - \alpha)} dx + \frac{1}{a(\beta - \alpha)} \int \frac{1}{(x - \beta)} dx = -\frac{1}{(\beta - \alpha)} \log|x - \alpha| + \frac{1}{a(\beta - \alpha)} \log|x - \beta|$$

Pertanto l'integrale assegnato, diventa:

$$\int \frac{1}{2x^2 + x - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1)} dx$$

Per cui 
$$\frac{1}{2} \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1)} = \frac{1}{2} \frac{A}{\left(x - \frac{1}{2}\right)} + \frac{B}{(x + 1)} = \frac{1}{2} \frac{A(x + 1) + B\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1)} = \frac{1}{2} \frac{x(A + B) + A - \frac{1}{2}B}{\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1)}$$

Da cui 
$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B\frac{1}{2} = 1 \end{cases} = \begin{cases} A = -B \\ -B - B\frac{1}{2} = 1 \end{cases} = \begin{cases} A = -B \\ -B\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 1 \end{cases} = \begin{cases} A = \frac{2}{3} \\ B = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Pertanto

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{2}{3}}{\left(x - \frac{1}{2}\right)} dx + \int \frac{-\frac{2}{3}}{(x+1)} dx = \frac{1}{3} \log \left| x - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{3} \log |x+1| + c = \frac{1}{3} \log \left| \frac{2x-1}{2x+2} \right| + c$$

## 8.5 – Integrazione per parte

Ricordando la regola di derivazione di un prodotto di due funzioni,  $D(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ , da cui integrando l'equazione, si ha:

$$\int D(f(x) \cdot g(x)) = \int f'(x) \cdot g(x) + \int f(x) \cdot g'(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) \cdot g(x) + \int f(x) \cdot g'(x)$$

quindi

$$\text{I caso: } \int f'(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)$$

$$\text{II caso: } \int f(x) \cdot g'(x) = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)$$

Pertanto la regola dell'integrazione per parte consente di poter risolvere l'integrale del prodotto di due funzioni:

quindi date le funzioni  $f : X \rightarrow R$  e  $g : X \rightarrow R$  ed il seguente integrale  $\int f(x)g(x)dx$

se si possono porre le funzioni, sotto la forma (primo caso):  $\int f'(x) \cdot g(x)dx$

La regola dell'integrazione per parte che ci consente di poter calcolare l'integrale (primo caso), è la seguente:  $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

Analogamente per il secondo integrale risulta:  $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

Esempi

Primo esempio:

$$\int x^2 \cdot e^x dx$$

Posto  $f(x) = x^2$  e quindi  $g'(x) = e^x$

Ci troviamo nel secondo caso.

$$\int f(x) \cdot g'(x) = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$$

$$g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$$

Per cui applicando l'equazione del secondo caso, si ha:

$$\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2 \int x \cdot e^x dx$$

Si osserva che l'ultimo integrale,  $\int x \cdot e^x dx$  può essere ancora una volta risolto per parte.

Pertanto ponendo:

$$f'(x) = x, \quad g(x) = e^x \text{ rientriamo nel primo caso.}$$

$$\int f'(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)$$

Quindi essendo  $f'(x) = x \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2}$ , ed essendo  $g(x) = e^x \Rightarrow g'(x) = e^x$ .

Per l'equazione del primo caso si ha:

$$\int x \cdot e^x dx = \frac{x^2}{2} \cdot e^x - \int \frac{x^2}{2} \cdot e^x dx = \frac{x^2}{2} \cdot e^x - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot e^x dx$$

Si osserva che quest'ultimo integrale è risolvibile sempre per parte, ma si pone in una forma peggiorativa rispetto alla precedente, in poche parole siamo ritornati al primo integrale. Questo vuol dire che la soluzione adottata non è consigliata.

Pertanto è preferibile ricondurre l'integrale  $\int x \cdot e^x dx$  nella forma del secondo caso.

Ovvero ponendo:  $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

$$g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$$

e quindi per l'equazione del secondo caso si ha:  $\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x \cdot e^x - e^x + c$

di cui quest'ultimo integrale è immediato:  $\int e^x dx = e^x$

In definitiva il nostro integrale di partenza risulta:

$$\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2xe^x - 2e^x + c = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \log|x^2+1| + c$$

$$\int x^2 \cdot e^x dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \log|x^2 + 1| + c$$

### Secondo esempio

$$\int 2x^2 \cdot \arctg x dx$$

$$f'(x) = 2x^2 \Rightarrow f(x) = \frac{2x^3}{3}$$

$$g(x) = \arctg x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int 2x^2 \cdot \arctg x dx = \frac{2x^3}{3} \cdot \arctg x - \int \frac{2x^3}{3} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{2x^3}{3} \arctg x - \frac{2}{3} \int \frac{x^3}{1+x^2} dx$$

Prendiamo in considerazione:  $\int \frac{x^3}{x^2+1} dx$

$$\begin{array}{r} x^3 \quad | \quad x^2+1 \\ -(x^3+x) \quad | \quad x \\ \hline -x \end{array}$$

$$\text{Quindi: } \frac{x^3}{x^2+1} = x + \frac{-x}{x^2+1} \Rightarrow \int \frac{x^3}{x^2+1} dx = \int x dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx = \int 2x^2 \cdot \arctg x dx =$$

$$= \frac{2x^3}{3} \arctg x - \frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \left( -\frac{1}{2} \log|x^2+1| \right) + c = \frac{2x^3}{3} \arctg x + \frac{x^2}{3} \cdot \frac{1}{2} \log|x^2+1| + c$$

$$\int 2x^2 \cdot \arctg x dx = \frac{2x^3}{3} \arctg x + \frac{x^2}{3} \cdot \frac{1}{2} \log|x^2+1| + c$$

### Terzo esempio

$$\int x \cdot \log x dx$$

$$f'(x) = x \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$g(x) = \log x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\int x \cdot \log x dx = \frac{x^2}{2} \cdot \log x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \log x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + c = \frac{x^2 \log x}{2} - \frac{x^2}{4} + c$$

$$\int x \cdot \log x dx = \frac{2x^2 \log x - x^2}{4} + c = \frac{x^2(2 \log x - 1)}{4} + c$$

$$\int x \cdot \log x dx = \frac{x^2(2 \log x - 1)}{4} + c$$

#### Quarto esempio

$$\int \arcsen x dx$$

si osserva che tale integrale può essere scritto come  $\int 1 \cdot \arcsen x dx$ , pertanto può essere risolto per parte.

Ponendo:

$f'(x) = 1 \Rightarrow f(x) = x$  e si risolverebbe facilmente ponendolo nella forma del primo caso.

$$g(x) = \arcsen x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int 1 \cdot \arcsen x dx = x \cdot \arcsen x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \cdot \arcsen x - \int x \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= x \cdot \arcsen x - \frac{1}{2} \int -2x \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = x \cdot \arcsen x - \frac{1}{2} \left( \frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right) + c =$$

$$= x \cdot \arcsen x - \frac{1}{2} \left( \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) + c = x \cdot \arcsen x - \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} \cdot 2 + c = x \cdot \arcsen x - \sqrt{1-x^2} + c$$

$$\int \arcsen x dx = x \cdot \arcsen x - \sqrt{1-x^2} + c$$

#### Quinto esempio

$$\int \log x dx$$

$$f'(x) = 1 \Rightarrow f(x) = x$$

$$g(x) = \log x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\int 1 \cdot \log x dx = x \cdot \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \log x - \int dx = x \cdot \log x - x = x(\log x - 1) + c$$

$$\int \log x dx = x(\log x - 1) + c$$

## 8.6 – Teoremi sugli integrali

T

*Teorema della media dell'integrale secondo Riemann*

**Ipotesi**

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Sia  $f$  integrabile (esiste la primitiva)

 allora

**Tesi**

$$\inf_{x \in [a, b]} f(x)(b-a) \leq \int_{[a, b]} f(x) dx \leq \sup_{x \in [a, b]} f(x)(b-a)$$

*Con l'estensione:*

Se risulta  $f$  continua, allora  $\exists c \in [a, b]$ , tale che risulti

$$\int_{[a, b]} f(x) dx = f(c)(b-a)$$

T

*Teorema della media degli integrali definiti*

**Ipotesi**

Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

Sia  $f$  continua

 allora

**Tesi**

$$\forall a, b \in X, \exists c \in [a, b], \text{ tale che } \int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

**T**

*Teorema fondamentale del calcolo integrale*

**Ipotesi**

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Sia  $f$  continua

 allora

**Tesi**

$\forall G$ , primitiva di  $f$  risulta:

$$\int_a^b f(x) dx = [G(x) + c]_a^b = G(b) - G(a)$$

## Capitolo 9

### Algebra lineare

#### 9.1 – Definizione di matrice

Siano  $m, n \in \mathbb{N}$ , con  $a_{i,j}$  si denota l'elemento  $(i, j)$ -esimo della matrice  $m \times n$ , con  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  e  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Pertanto  $\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $a_{i,j}$  rappresenta l'intera matrice.

Quindi se  $m = 3$  ed  $n = 2$  la matrice  $3 \times 2$  risulta:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Esempio

La matrice  $m = 3$  ed  $n = 1$   $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$  si definisce **matrice colonna**.

La matrice  $m = 1$  ed  $n = 3$   $(a_{11} \ a_{12} \ a_{13})$  si definisce **matrice riga**.

La matrice  $m = n$  si definisce **matrice quadrata** ed è definita di ordine 1 se  $m = n = 1$ , di ordine 2 se  $m = n = 2$  e così di seguito.

### Uguaglianza tra matrici

$$\text{Se } a_{i,j} = b_{i,j} \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6:3 \\ 3-1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 & -2-1 & 2 \\ 2 & 4:4 & 0 \end{pmatrix}$$

### Matrici opposte

$$\text{Se } a_{i,j} = -b_{i,j} \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

### Matrici nulle

$$\text{Se } a_{i,j} = 0 \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La **diagonale principale** di una matrice è data da tutti gli elementi  $a_{i,j} \forall i = j$ .

La **diagonale secondaria** di una matrice è data da tutti gli elementi  $a_{i,j} \forall i \in \{m, \dots, 3, 2, 1\}$  e  $\forall j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ .

### Matrice identità

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, 3, \dots, m\} \times \{1, 2, 3, \dots, m\}$$

Se  $a_{i,j} = 1 \forall i = j$  e se  $a_{i,j} = 0 \forall i \neq j$

### Operazioni con le matrici

Date due matrici  $A$  e  $B$  rispettivamente di ordine  $m \times n$

Si definisce somma tra le due  $A + B$ , la matrice  $C$  il cui elemento  $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} \forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$

## 9.2 – Proprietà delle matrici

### Proprietà della somma tra matrici

La somma tra matrici dello stesso tipo gode delle seguenti proprietà:

- **Proprietà associativa:**  $A + (B + C) = (A + B) + C$
- **Proprietà commutativa:**  $A + B = B + A$
- Ammette come **elemento neutro** la matrice nulla dello stesso tipo:  $A + 0 = 0 + A = A$ , per ogni matrice  $A$ .

### Prodotto di una matrice

**Il prodotto di una matrice per un numero reale  $k$** , è una matrice  $k \cdot a_{i,j} \forall (i,j) \in \{1,2,\dots,m\} \times \{1,2,\dots,n\}$

Esempio

$$k \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a & k \cdot b & k \cdot c \\ k \cdot d & k \cdot e & k \cdot f \end{pmatrix}$$

### Prodotto tra due matrici

Il prodotto tra due matrici  $A \times B$  si effettua righe per colonne ed è possibile se e solo se il numero di colonne di  $A$  equivale al numero di righe di  $B$ .

Esempio

$$A \times B = C \text{ con } A_{m \times p} \text{ e } B_{p \times n} \text{ e con } c_{i,j} = \sum_{r=1}^p a_{i,r} b_{r,j} = a_{i,1} b_{1,j} + a_{i,2} b_{2,j} + \dots + a_{i,p} b_{p,j}$$

**La matrice  $C$  è di ordine  $m \times n$**

Si osserva che se possibile effettuare il prodotto, allora  $A \cdot B \neq B \cdot A$

Se  $A \cdot B = B \cdot A$ , allora  $A$  e  $B$  si dicono **commutabili**.

ed  $A$  e  $B$  sono **matrici quadrate**.

- Il prodotto di una matrice per una **matrice nulla** ha come risultato una matrice nulla:  
 $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$
- Il prodotto di una matrice per una **matrice identica** ha come risultato la matrice stessa:  
 $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$

Quindi la matrice identica di ordine  $n$ ,  $I_n$ , è l'**elemento neutro della prodotto** fra matrici quadrate di ordine  $n$ .



**Non vale la legge...**

1. **Non vale la legge di annullamento del prodotto.** Infatti, la matrice prodotto  $A \cdot B$  può essere la matrice nulla  $0$  senza che siano nulle le matrici  $A$  e  $B$ .
2. **Non vale la legge di cancellazione,** ossia si può verificare che da  $A \cdot B = A \cdot C$  non segue necessariamente che  $B = C$

Esempio

Il prodotto fra due matrici del tipo:  $A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$  e  $B_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ ,

ha come risultato la matrice  $C_{2 \times 4}$  con gli elementi generici

$$c_{i,j} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix}$$

I cui elementi della prima riga della matrice prodotto, si ottengono moltiplicando e sommando rispettivamente ogni elemento della prima riga della matrice  $A$ , con ogni elemento della prima colonna della matrice  $B$ .

$$c_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = (2 \cdot 1 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 0) = 2$$

$$c_{12} = (2 \ 0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1) = 1$$

$$c_{13} = (2 \ 0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = (2 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot (-2)) = 4$$

$$c_{14} = (2 \ 0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3) = 3$$

L'operazione si ripete per ogni riga della matrice A. Quindi la seconda riga della matrice prodotto risulta così composta.

$$c_{21} = (-1 \ -2 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1 \cdot 1 + (-2) \cdot 5 + 3 \cdot 0) = -11$$

$$c_{22} = (-1 \ -2 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 1) = 5$$

$$c_{23} = (-1 \ -2 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = (-1 \cdot 3 + (-2) \cdot 4 + 3 \cdot (-2)) = -17$$

$$c_{24} = (-1 \ -2 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1 \cdot 0 + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 3) = -5$$

### Proprietà del prodotto

**Proprietà associativa:**  
 $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

**Proprietà distributiva** (a sinistra e a destra) **del prodotto rispetto alla somma:**

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C ;$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

**Proprietà distributiva del prodotto di un numero rispetto alla somma tra matrici:**

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B, \alpha \in R$$

### 9.3 – Determinante di una matrice

Data la matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , il suo determinante si denota:  $\det(A)$  o  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  e risulta  $\det(A) = a \cdot d - b \cdot c$

Prima di dare la definizione di determinante di una matrice quadrata, di ordine  $n > 2$ , diamo alcune definizioni di cui ci serviremo.



**Definizione di minore complementare**

Si definisce minore complementare dell'elemento  $a_{i,j}$  della matrice  $A$  e si denota con  $|A_{ij}|$ , il determinante della matrice  $A$  alla quale si è eliminata la riga  $i$ -esima e la colonna  $j$ -esima.

Si definisce **complemento algebrico** dell'elemento  $a_{i,j}$  della matrice  $A$ ,  $(-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|$



**Il determinante**

**Il determinante** di una generica matrice  $A$  quadrata, di ordine  $n$ , con  $n > 2$ , sarà dato dalla somma di tutti gli elementi di una linea qualsiasi per i rispettivi complementari algebrici.

In generale, sia  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Se scegliamo la prima riga:

$$\det(A) = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \det(A_{11}) + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \det(A_{12}) + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \det(A_{13})$$

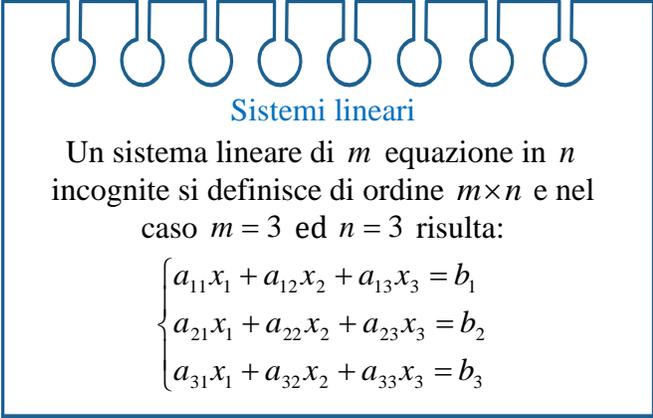
$$\text{Sia } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Prendiamo la terza colonna

$$\det(A) = 1 \cdot (-1)^{1+3} |A_{13}| + 1 \cdot (-1)^{2+3} |A_{23}| + 0 \cdot (-1)^{3+3} |A_{33}|$$

$$|A| = 1 \cdot (1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 \cdot 2) - (1 \cdot 1) - 1(1 \cdot 2) - (0 \cdot 1) + 0 = 4 - 1 - 2 = 1$$

## 9.4 – Sistemi lineari



**Sistemi lineari**

Un sistema lineare di  $m$  equazione in  $n$  incognite si definisce di ordine  $m \times n$  e nel caso  $m = 3$  ed  $n = 3$  risulta:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Si configura quale matrice *incompleta* del sistema, la matrice  $A$ , costituita dai coefficienti delle incognite dello stesso, ovvero:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Si configura quale matrice *completa* del sistema, la matrice  $B$ , data dalla matrice incompleta  $A$  e dalla colonna dei termini noti dello stesso, ovvero:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$$

Il sistema di ordine  $m \times n$  si dice **compatibile** se ammette soluzioni.

Se la soluzione è unica ovvero **costituita da una ennupla ordinata**, allora il sistema si dice **determinato**.

Il sistema  $n \times n$  è **determinato** se la matrice  $A$  **incompleta non è singolare**.

Una matrice si dice **singolare** se il suo  $\det = 0$ .

Se la matrice  $A$  è singolare, il sistema è **incompatibile** oppure **indeterminato** (ammette infinite soluzioni)

Un sistema  $n \times n$  si dice **di Cramer** se la matrice  $A$  **non è singolare**.

L'unica soluzione di un sistema di Cramer può essere determinata con la **regola di Cramer**.

Esempio

Un sistema  $3 \times 3$  di Cramer ha per soluzioni:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{|A|} \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{|A|} \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{|A|}$$

Essendo  $A_1, A_2, A_3$  le tre matrici ottenute da  $A$  sostituendo rispettivamente la prima, la seconda e la terza colonna con la colonna dei termini noti

Dato il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

La cui matrice incompleta ed il rispettivo determinante, risultano:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-4+1) + (4-1) + 3(-2+2) = -6+3 = -3 \neq 0$$

Quindi il sistema risulta di Cramer, determinato, e la cui soluzione è:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{-3}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{-3}, \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3}$$

$$\det(A_1) = 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4+1+1-6 = -8$$

$$\det(A_2) = -1 \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -4+1+2-6 = -8$$

$$\det(A_3) = 1 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2+2+4-2 = 2$$

$$\text{Quindi: } x_1 = \frac{8}{3} \quad x_2 = \frac{7}{3} \quad x_3 = -\frac{2}{3}$$

Pertanto la tripla ordinata, soluzione del sistema è:  $\left(\frac{8}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

 **Si osservi:**

La **matrice trasposta** della matrice  $A$ , si denota con  $A^T$  ed è quella matrice alla quale si sono invertite le righe con le colonne della matrice  $A$ .

Un sistema di  $n$  equazione in  $n$  incognite può essere rappresentato quale prodotto di due matrici  
 $A \cdot x = b$

Con  $A$ , la matrice incompleta,  $x$  il vettore colonna delle incognite e  $b$  il vettore dei termini noti

Siano:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot x = b \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Pertanto essendo un sistema, il prodotto di matrice del tipo  $A \cdot x = b \Leftrightarrow x = A^{-1} \cdot b$

Quindi il vettore delle incognite può essere determinato quale prodotto della matrice inversa  $A^{-1}$  per il vettore colonna dei termini noti.

**La matrice inversa risulta:**  $A^{-1} = \frac{\text{Agg}(A)}{|A|}$

Al cui numeratore,  $\text{Agg}(A)$  denota la **matrice aggiunta** della matrice  $A$ , quale *matrice trasposta* della matrice dei *complementi algebrici* della matrice  $A$ .

**Pertanto**  $A^{-1} = \frac{\text{Agg}(A)}{|A|} = \frac{C^T}{|A|}$ , con  $C$  la matrice dei complementi algebrici della matrice  $A$ .

Sia  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , sia  $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$  e sia  $|A| \neq 0$

Con  $c_{11} = (-1)^{1+1}|A_{11}| = a_{22}$ ,  $c_{12} = (-1)^{1+2}|A_{12}| = -a_{21}$ ,  $c_{21} = (-1)^{2+1}|A_{21}| = -a_{12}$ ,

$c_{22} = (-1)^{2+2}|A_{22}| = a_{11}$

Pertanto  $C = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$

Conseguentemente  $C^T = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \text{Agg}(A)$

Pertanto  $A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$



**Si osservi:**

Se il vettore dei termini noti è un vettore nullo:  $A \cdot x = 0$ , il sistema si dice **omogeneo**.

I sistemi omogenei sono **compatibili**, infatti hanno **almeno** la soluzione  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ . Inoltre, se il  $\det(A) \neq 0$  allora il sistema è anche **determinato** e quindi non esistono altre soluzioni oltre la soluzione  $(0,0,0)$ .



**Caratteristica di una matrice**

Si definisce caratteristica o rango di una matrice, l'ordine più alto delle sottomatrici estratte da  $A$  con determinante diverso da 0 e si denota con  $r$ .



*Teorema di Rouché-Capelli*

**Ipotesi**

Un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ammette soluzioni se e solo se la caratteristica della matrice incompleta  $A$  è uguale alla caratteristica della matrice  $B$ .

 allora

### Tesi

1. Se  $r = n = m$ , il sistema è di Cramer, quindi compatibile, determinato e, come si è visto è risolvibile con la regola di Cramer oppure  $A^{-1} \cdot b = x$
2. Se  $r = n < m$ , il sistema ammette una soluzione valida anche per le  $m - n$  equazioni
3. Se  $r < n = m$  allora il sistema è compatibile indeterminato, ovvero ammette infinite soluzioni.
4. Se  $r < n < m$ , il sistema ammette infinite soluzioni valide anche per le  $m - n$  equazioni

### Esempi

Primo caso:  $r = n = m$

Consideriamo il sistema: 
$$\begin{cases} 2x_1 + y - z = 1 \\ -x + 2y + z = -1 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Si osserva che la matrice incompleta risulta  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

il cui determinante è

$$\det(A) = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(4 + 2) - (-2 - 1) - (2 - 2) = 12 + 3 = 15 \neq 0$$

$$\text{Car}(A) = 3 = \text{Car}(B)$$

Risolviamo  $A^{-1} \cdot b = x$

$$\text{Agg}(A) = C^T$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}, c_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, c_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$c_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}, c_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, c_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$c_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, c_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, c_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{Pertanto } C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \text{ quindi } C^T = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Pertanto } A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}}{15} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{15} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Quindi } x = A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{15} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{2}{5}, x_2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{3-5}{15} = -\frac{2}{15}, x_3 = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Quindi la tripla ordinata risulta: } \left( \frac{2}{5}, -\frac{2}{15}, -\frac{1}{3} \right)$$

**Secondo caso**  $r = n < m$

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 4x - y = 0 \\ 2y = 1 \\ 8x + 2y = 2 \end{cases}$$

Si osserva che la matrice incompleta risulta

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \text{ il cui determinante è } \det(A) = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

Ed essendo la matrice completa

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 8 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ il cui determinante è } \det(B) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 8 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 4(4-2) - 8 = 0$$

Quindi la  $\text{Car}(A) = \text{Car}(B) = 2 = n < m$

Pertanto la soluzione del sistema dato sarà la soluzione del seguente sistema, e soddisferà anche le restanti  $m - n$  equazioni

$$\begin{cases} 4x - y = 0 \\ 2y = 1 \end{cases}$$

Essendo quindi tale sistema di Cramer, lo si può risolvere servendosi della regola di Cramer, per cui

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{8} = \frac{1}{8} \text{ ed } y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{1}{2}$$

Quindi la coppia ordinata soluzione del sistema assegnato risulta

$$\left( \frac{1}{8}, \frac{1}{2} \right)$$

**Terzo caso**  $r < n = m$

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x + y + 3z = 1 \\ -2x + 2y + 2z = 2 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

Si osserva che la matrice incompleta risulta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ il cui determinante è } \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ed essendo la matrice completa

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ il cui determinante è } \det(B) = 0$$

Pertanto considerando la matrice incompleta ridotta di una riga ed una colonna, si ha

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ il cui determinante è } \det(A') = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

Quindi la  $\text{Car}(A) = \text{Car}(B) = 2 < n = m$

Pertanto il sistema risulta compatibile indeterminato, le cui soluzioni saranno date dal seguente sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 - 3z \\ -2x + 2y = 2 - 2z \end{cases}$$

Pertanto, essendo tale sistema di Cramer, lo si può risolvere servendosi della regola di Cramer, per cui

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-3z & 1 \\ 2-2z & 2 \end{vmatrix}}{4} \text{ ed } y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-3z \\ -2 & 2-2z \end{vmatrix}}{8}$$

Quindi

$$x = \frac{2(1-3z) - (2-2z)}{4} \text{ ed } y = \frac{2-2z - (-2(1-3z))}{4}$$

Pertanto

$$x = \frac{-4z}{4} \text{ ed } y = \frac{4-8z}{4}$$

Quindi la tripla ordinata delle infinite soluzioni del sistema assegnato risulta:

$$(-z, 1-2z, z), \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

**Quarto caso**  $r < n < m$

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + y = -1 \\ 2x - 2y = 1 \end{cases}$$

Si osserva che la matrice incompleta risulta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ il cui determinante è } \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

Quindi la  $\text{Car}(A) = 1$

Ed essendo la matrice completa

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ il cui determinante è}$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -1 + 1 + 0 = 0$$

$\text{Car}(B) = 1$

Quindi la soluzione è  $x = 1 + y \forall y \in R$

### Sistema incompatibile

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + y = -1 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

Si osserva che la matrice incompleta risulta

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ il cui determinante è } \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0$$

Quindi la  $\text{Car}(A) = 2$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(1+1) + (3-1) + (3+1) = 10$$

$Car(B) = 3 \neq Car(A) = 2$ , quindi il sistema è incompatibile

# Capitolo 10

## Funzioni di due variabili

### 10.1 – Definizioni preliminari

#### Intorno di un punto

Si definisce *intorno* di un punto  $(x_0, y_0) \in S$ , di raggio  $r > 0$ , con  $S \subseteq \mathbb{R}^2$ , il cerchio di raggio  $r$  e centro in  $(x_0, y_0)$  e si indica con

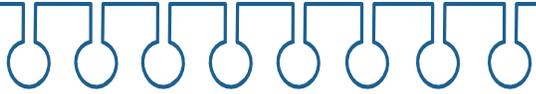
$$I_{(x_0, y_0)}(r) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r \right\}$$

#### Punto interno di un insieme

Si dice che  $(x_0, y_0)$  è *punto interno* di un insieme  $S$ , con  $S \subseteq \mathbb{R}^2$ , se esiste un intorno  $I_{(x_0, y_0)}(r)$  tale che  $I_{(x_0, y_0)}(r) \subseteq S$ .

#### Sottoinsieme aperto

Un sottoinsieme  $S \subseteq \mathbb{R}^2$ , si dice *Aperto*, se  $S = \emptyset$  oppure se  $\forall (x_0, y_0) \in S$ ,  $(x_0, y_0)$  è interno ad  $S$ .



**Funzione di due variabili**

Si definisce una *funzione*  $f$  di due variabili reali  $x$  e  $y$  con dominio  $S \subseteq R^2$ , quella legge che assegna un determinato valore,  $f(x, y)$ , per ogni punto  $(x, y)$  di  $S$ , e si denota:  $f : S \rightarrow R$ , con  $S \subseteq R^2$  aperto e diverso dal vuoto e con  $z = f(x, y)$ .



**Massimo(minimo) relativo**

Sia  $f : S \rightarrow R$ , con  $S \subseteq R^2$ , si definisce *punto di massimo (minimo) relativo* per  $f$  il punto  $(x_0, y_0)$  tale che, se  $\exists I_{(x_0, y_0)}$  per cui  $\forall (x, y) \in S \cap I_{(x_0, y_0)}$  risulta  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$  ( $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ ).

aperto e diverso dal vuoto e con  $z = f(x, y)$ .

Si osserva che, in tal caso,  $f(x_0, y_0)$  si definisce *massimo (minimo) relativo* di  $f$ .

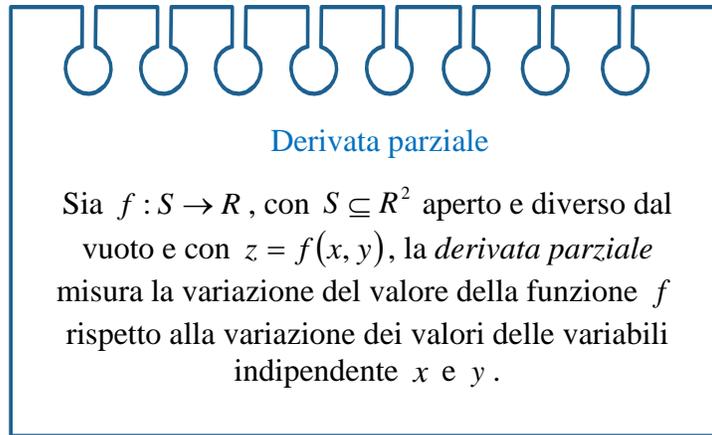


**Massimo(minimo) assoluto**

Sia  $f : S \rightarrow R$ , con  $S \subseteq R^2$ , si definisce *punto di massimo (minimo) assoluto* per  $f$  il punto  $(x_0, y_0)$ , tale che, se  $\forall I_{(x_0, y_0)}$  per cui  $\forall (x, y) \in S \cap I_{(x_0, y_0)}$  risulta  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$  ( $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ ).

Si osserva che, in tal caso,  $f(x_0, y_0)$  si definisce *massimo (minimo) assoluto* di  $f$ .

Si osserva che, in tal caso,  $f(x_0, y_0)$  si definisce *massimo (minimo) assoluto* di  $f$ .



La derivata parziale *del primo ordine* di  $f$  rispetto a  $x$  e con  $y$  mantenuta costante, si denota con:  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , o con  $\frac{\partial z}{\partial x}$  oppure con  $f'_x(x, y)$ .

Risulta quindi  $f'_x(x, y) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y) - f(x_0, y)}{x - x_0}$ .

La derivata parziale *del primo ordine* di  $f$  rispetto a  $y$  e con  $x$  mantenuta costante, si denota con  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , o con  $\frac{\partial z}{\partial y}$  oppure con  $f'_y(x, y)$ .

Risulta quindi  $f'_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0}$ .

Sia  $f : S \rightarrow R$ , con  $S \subseteq R^2$  aperto e diverso dal vuoto e con  $z = f(x, y)$ , la derivata parziale del primo ordine  $\frac{\partial f}{\partial x}$  in genere, risulta ancora una funzione di due variabili e posta che sia derivabile parzialmente, si possono generare due nuove funzioni quali derivate parziali rispetto alle variabili indipendenti  $x$  e  $y$ .

Analogamente possiamo ragionare per la funzione derivata parziale del primo ordine  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

Le quattro funzioni che si ottengono sono dette *derivate parziali del secondo ordine* di  $f$ , e si denotano rispettivamente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x, y) = f''_{xx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{y^2}(x, y) = f''_{yy}(x, y).$$

Per la maggior parte delle funzioni  $f$  in due variabili, per il Teorema di Schwarz, risulta vera la seguente uguaglianza  $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$ .



### Gradiente della funzione

Sia  $f : S \rightarrow R$ , con  $S \subseteq R^2$  aperto e diverso dal vuoto e con  $z = f(x, y)$ , si definisce *gradiente* della funzione  $f$  il vettore delle derivate parziali del primo ordine, rispetto alle variabili indipendenti e si indica con  $\nabla f(x, y) = \{f'_x(x, y), f'_y(x, y)\}$



### Estremanti relativi interni

Sia  $f : S \rightarrow R$ , con  $S \subseteq R^2$  aperto e diverso dal vuoto e con  $z = f(x, y)$ , che ammette derivate parziali fino al secondo ordine:

Si definiscono *estremanti relativi interni* della funzione, i punti  $(x_0, y_0) \in S$  in cui la funzione assume valore massimo o minimo relativo.

## 10.2 – Alcuni utili teoremi

T

*Teorema 0, di Weierstrass*

### Ipotesi

Sia  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  e sia  $z = f(x, y)$  continua e sia  $S$  un insieme piano non vuoto, chiuso e limitato.

 allora

### Tesi

Esistono due punti  $(a, b) \in S$  e  $(c, d) \in S$ , tale  $\forall (x, y) \in S$  risulta:  $f(a, b) \leq f(x, y) \leq f(c, d)$

Questo primo teorema fornisce le condizioni sufficienti dell'esistenza di un minimo ed un massimo assoluto.

Il successivo teorema ci aiuta ad individuare tali punti.

T

*Teorema di Fermat (condizioni necessarie per gli estremanti interni)*

### Ipotesi

Sia  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  e  $z = f(x, y)$ , funzione differenziabile, se  $(x_0, y_0)$  è un punto interno ad  $S$  ed è un punto di massimo o di minimo per  $f(x, y)$

 allora

### Tesi

$(x_0, y_0)$  è un **punto stazionario**, ovvero  $f'_x(x_0, y_0) = 0$  e  $f'_y(x_0, y_0) = 0$

In un punto di estremo locale interno, la funzione deve essere stazionaria, ovvero tutte le derivate parziali del primo ordine devono essere nulle.

Tuttavia un punto stazionario *non necessariamente* è un punto di estremo locale.

### Esempio 1

Si dimostra che il punto  $A = (0,0)$ , per la funzione  $f(x, y) = x^2 - y^2$  non è di estremo locale. È facile verificare che il punto  $A = (0,0)$  è un punto *stazionario* in quanto  $\nabla f(x, y) = \{f'_x(x, y), f'_y(x, y)\} = \{2x, -2y\}$  per cui si annulla nel punto dato e risulta che  $f(0,0) = 0$ . Inoltre si osserva che  $f(x,0) = x^2$  mentre  $f(0,y) = -y^2$  quindi la funzione assume, in un intorno molto prossimo al punto stazionario, valori sia positivi che negativi, mentre la funzione in tale punto vale 0; pertanto nell'intorno dello stesso la funzione non risulta sempre maggiore di zero, nel caso fosse un *punto di minimo*, o sempre minore di zero, nel caso fosse un *punto di massimo*, quindi è un **punto di sella**.

T

*Teorema II, sulle condizioni sufficienti del secondo ordine per gli estremanti interni*

#### Ipotesi

Sia  $f : S \rightarrow R$ , con  $S \subseteq R^2$  e  $z = f(x, y)$ , funzione differenziabile, sia  $(x_0, y_0)$  un **punto interno ad S, stazionario per**  $f(x, y)$ , ovvero  $f'_x(x_0, y_0) = 0$  e  $f'_y(x_0, y_0) = 0$ ,

Sia  $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$ ,  $B = f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$  e sia  $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$



#### Tesi

Se  $A < 0$ , e  $AC - B^2 > 0$ , allora  $(x_0, y_0)$  è un punto di massimo locale

Se  $A > 0$ , e  $AC - B^2 > 0$ , allora  $(x_0, y_0)$  è un punto di minimo locale

Se  $AC - B^2 < 0$ , allora  $(x_0, y_0)$  è un punto di sella

Se  $AC - B^2 = 0$ , allora  $(x_0, y_0)$  potrebbe essere un punto di massimo, di minimo o di sella locale.

Con  $AC - B^2 = H_{(x,y)}$  il determinante Hessiano.

### Esempio 2

Data la funzione  $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ , ipotizziamo che abbia un punto di minimo.

Pertanto per il I Teorema di Fermat bisogna individuare gli eventuali punti stazionari, ovvero i punti in cui il gradiente della funzione si annulla:

$\nabla f(x, y) = \{f'_x(x, y), f'_y(x, y)\}$ , quindi posto tale vettore pari a zero, si ha il seguente sistema:

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6y = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow 6y - 6x = 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y - x = 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ y = x \end{cases} = \begin{cases} x(x-1) = 0 \\ y = x \end{cases}$$

le cui soluzioni sono i due punti stazionari  $A = (0,0)$  e  $B = (1,1)$

Mostriamo ora che la funzione  $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ , ha un minimo nel punto stazionario  $B = (1,1)$ ,

pertanto per il II Teorema bisogna trovare le derivate parziali di secondo ordine, ovvero

$$f''_{xx}(x, y) = 12x, \quad f''_{yy}(x, y) = 6, \quad f''_{xy}(x, y) = -6 \quad \text{ed} \quad f_{yx}(x, y) = -6$$

Quindi essendo  $f''_{xx}(x, y)f''_{yy}(x, y) - (f''_{xy}(x, y))^2 = 72x - 36 = 36 > 0$ , per cui  $H_{(1,1)} = 72 - 36 = 36 > 0$  ed essendo  $f''_{xx}(1,1) = 12 > 0$ ,  $f''_{yy}(x, y) = 6 > 0$

Quindi il punto stazionario trovato è un punto di minimo, il cui valore è:  $f(1,1) = 2 - 6 + 3 = -1$

Mentre essendo  $H_{(0,0)} = -36 < 0$  il punto  $A = (0,0)$  è un punto di sella.

### Esempio 3

Data la funzione  $f(x, y) = -2x^2 - 2xy - 2y^2 + 36x + 42y - 158$ , ipotizziamo che abbia un punto di massimo,

pertanto per il I Teorema bisogna individuare gli eventuali punti stazionari, ovvero

$\nabla f(x, y) = \{f'_x(x, y), f'_y(x, y)\}$ , detto gradiente della funzione  $f$ , pari a zero, quindi

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow -4x - 2y + 36 = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow -2x - 4y + 42 = 0 \end{cases} = \begin{cases} 4x + 2y = 36 \\ 2x + 4y = 42 \end{cases} = \begin{cases} 2x + y = 18 \\ x + 2y = 21 \end{cases} = \begin{cases} 2(21 - 2y) + y = 18 \\ x = 21 - 2y \end{cases}$$

Pertanto la soluzione è  $A = (5,8)$

Mostriamo ora che la funzione  $f(x, y) = -2x^2 - 2xy - 2y^2 + 36x + 42y - 158$ , ha un massimo nel punto stazionario  $A = (5,8)$

pertanto per il II Teorema bisogna trovare le derivate parziali di secondo ordine, ovvero

$$f''_{xx}(x, y) = -4 < 0, \quad f''_{yy}(x, y) = -4 < 0, \quad f''_{xy}(x, y) = -2 \quad \text{ed} \quad f''_{yx}(x, y) = -2$$

$$\text{e } f''_{xx}(x, y)f''_{yy}(x, y) - (f''_{xy}(x, y))^2 = 16 - 4 = 12 > 0$$

Il punto stazionario trovato è un punto di massimo ed ha valore  $f(5,8) = 100$

#### Esempio 4

Determinare e classificare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) = x^3 - x^2 - y^2 + 8$$

Il gradiente fornisce il seguente sistema

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow -2y = 0 \end{cases} = \begin{cases} x(3x - 2) = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

da cui osserviamo che le soluzioni sono, dalla prima  $x = 0$  e  $x = \frac{2}{3}$  e dalla seconda  $y = 0$ , pertanto

$(0,0)$  e  $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$  sono gli unici due punti stazionari, inoltre

$$f''_{xx}(x, y) = 6x - 2, \quad \text{e } f''_{yy}(x, y) = -2, \quad \text{e } f''_{xy}(x, y) = 0$$

Pertanto avendo nel punto stazionario  $(0,0)$ ,  $f''_{xx}(0,0) = -2 < 0$  ed essendo

$$f''_{xx}(x, y)f''_{yy}(x, y) - (f''_{xy}(x, y))^2 = 4 > 0, \quad \text{il punto stazionario trovato è di massimo locale, stretto.}$$

Mentre nel punto stazionario  $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ ,  $f''_{xx}\left(\frac{2}{3}, 0\right) = 2 > 0$  ed essendo

$$f''_{xx}(x, y)f''_{yy}(x, y) - (f''_{xy}(x, y))^2 = -4 < 0, \quad \text{il punto stazionario trovato è di sella.}$$

### Esempio 5

Un'azienda produce due prodotti,  $A$  e  $B$ .

La funzione di costo giornaliero per la produzione di  $x$  quantità di  $A$ , e di  $y$  quantità di  $B$ , è la seguente:  $C(x, y) = 0.04x^2 + 0.01xy + 0.01y^2 + 4x + 2y + 500$

Supponendo che l'azienda venda tutta la merce prodotta giornalmente ad un prezzo unitario di 15 euro per  $A$  e di 9 euro per  $B$ , quindi la funzione ricavi è la seguente:  $R(x, y) = 15x + 9y$

Calcolare i livelli giornalieri di produzione  $x$  e  $y$  che massimizzano il profitto.

Considerando che il profitto giornaliero è dato dalla differenza tra i costi ed i ricavi, si determina la funzione profitto

$$\pi(x, y) = R(x, y) - C(x, y)$$

$$\pi(x, y) = 15x + 9y - 0.04x^2 - 0.01xy - 0.01y^2 - 4x - 2y - 500$$

$$\pi(x, y) = -0.04x^2 - 0.01xy - 0.01y^2 + 11x + 7y - 500$$

Da cui il gradiente  $\frac{\partial \pi}{\partial x} = -0.08x - 0.01y + 11$  e  $\frac{\partial \pi}{\partial y} = -0.02y - 0.01x + 7$ , le cui soluzioni sono  $x = 100$  e  $y = 300$ , e quindi il profitto è  $\pi(100, 300) = 1100$

Si osserva che il punto cercato è un massimo in quanto

$\frac{\partial \pi}{\partial xx} = -0.08 < 0$ ,  $\frac{\partial \pi}{\partial yy} = -0.02 < 0$  e  $\frac{\partial \pi}{\partial xy} = -0.01 < 0$  ed il determinante della matrice Hessiana risulta positivo.

### Esempio 6

La produzione di un'azienda inquina, e pertanto viene limitata la sua produzione ad un massimo di 100 unità per entrambi gli unici suoi due prodotti.

Il problema è determinare il massimo della funzione di profitto con tale *vincolo* di limitazione, per cui considerando la funzione profitto dell'esempio 5, si ha:

$$\max \pi(x, y) = -0.04x^2 - 0.01xy - 0.01y^2 + 11x + 7y - 500$$

Soggetta a  $x + y = 100$

Da cui  $x + y = 100 \Leftrightarrow y = 100 - x \Leftrightarrow g(x) = 100 - x$

Per cui nella funzione profitto, si ottiene

$\pi(x, g(x)) = -0.04x^2 - 0.01x(100 - x) - 0.01(100 - x)^2 + 11x + 7(100 - x) - 500$ , ottenendo quindi

$$\hat{\pi}(x) = -0.04x^2 - x + 0.01x^2 - 100 + 2x - 0.01x^2 + 11x + 700 - 7x - 500 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \hat{\pi}(x) = -0.04x^2 + 5x + 100$$

Siamo di fronte ad una funzione ad una variabile, pertanto

$$\hat{\pi}'(x) = -0.08x + 5 \Leftrightarrow \hat{\pi}'(x) = 0 \Leftrightarrow -0.08x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{0.08} = 62.5$$

Pertanto dal vincolo posto si ha  $y = 100 - 62.5 = 37.5$

Ed osservando che  $\hat{\pi}''(x) = -0.08 < 0$ , il punto provato è di massimo, ed il suo valore è dato da:

$$\pi(62.5, 37.5) = -0.04(62.5)^2 - 0.01(62.5)(37.5) - 0.01(37.5)^2 + 11(62.5) + 7(37.5) - 500 = 256.25$$

### Esempio 7

Un'azienda produce tre prodotti e deve soddisfare un ordine di 100 quantità complessive.

Quindi  $x + y + z = 100$

La funzione costo di ogni singolo prodotto, è:

$$C_1(x) = 10 + \frac{1}{2}x^2,$$

$$C_2(y) = 10 + \frac{1}{4}y^2 + y,$$

$$C_3(z) = 10 + 2z,$$

pertanto la funzione complessiva che esprime il costo è:

$$C(x, y, z) = 10 + \frac{1}{2}x^2 + 10 + \frac{1}{4}y^2 + y + 10 + 2z.$$

Osserviamo che la funzione vincolo  $x + y + z = 100 \Leftrightarrow z = 100 - x - y$ , e quindi è possibile riscrivere la funzione costo complessivo

$$\hat{C}(x, y, g(x, y)) = 10 + \frac{1}{2}x^2 + 10 + \frac{1}{4}y^2 + y + 10 + 2(100 - x - y)$$

Ovvero,  $C(x, y, g(x, y)) = \hat{C}(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{4}y^2 - y + 130$

Il cui gradiente è  $\nabla \hat{C}(x, y) = \left\{ \hat{C}'_x = x - 2, \hat{C}'_y = \frac{1}{2}y - 1 \right\}$ ,

per cui le soluzioni del sistema  $\nabla \hat{C}(x, y) = 0$ , sono  $x = 2$  ed  $y = 2$ , che nel vincolo forniscono  $z = 100 - 2 - 2 = 96$

e danno un costo complessivo

$$C(2, 2, 96) = 10 + \frac{1}{2}2^2 + 10 + \frac{1}{4}2^2 + 2 + 10 + 2 \cdot 96 = 227$$

### 10.3 – Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Un modo per determinare i minimi e massimi di una funzione di due o più variabili, anche nelle ipotesi che ci fossero dei vincoli, e che non sia facilmente riconducibile ad una funzione di una variabile, è quello che utilizza la funzione **Lagrangiana**.

Incominciamo con l'enunciare il **Teorema delle condizioni necessarie** per i punti estremanti.

Siano  $f : S \rightarrow R$  e  $g : S \rightarrow R$  con  $S \subseteq R^2$  due funzioni, derivabili con derivate continue. Condizione necessaria ma non sufficiente affinché  $(x_0, y_0) \in S$  sia di estremo relativo per la funzione  $f$ , ristretta al vincolo dato dall'equazione  $g(x, y) = 0$  della funzione  $g$ , è che siano verificate le seguenti condizioni:

- 1)  $g'(x_0, y_0) = 0$  ed  $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$
- 2)  $\exists \lambda_0 \in R$  tale che il gradiente della funzione ausiliaria  $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y))$  sia nullo nel punto  $(x_0, y_0, \lambda_0)$

ovvero

$$\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_x(x, y) - \lambda g'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) - \lambda g'_y(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

dove  $\lambda_0$  è detto moltiplicatore di Lagrange, mentre  $L$ , viene detta la funzione Lagrangiana.

Tale metodo non ci permette di classificare i punti stazionari, ma ci dice quali sono.

Un modo per classificarli, è valutare la funzione  $f(x, y)$  nei punti che soddisfano il sistema di cui sopra, eliminando la componente  $\lambda_0$ .

*Per esempio* per determinare le soluzione del problema di minimo o massimo della funzione  $f(x, y)$ , soggetta al vincolo  $g(x, y) = c$

Dato  $\lambda$  un parametro reale, si scrive la funzione Lagrangiana  $L$

I)  $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)$

II) Si determina il gradiente di tale funzione, ponendolo pari a zero

III) Si ottiene quindi un sistema lineare di tre equazione in tre incognite

$$\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = 0 \Leftrightarrow f'_x(x, y) - \lambda g'_x(x, y) = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0 \Leftrightarrow f'_y(x, y) - \lambda g'_y(x, y) = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \Leftrightarrow g(x, y) = c \end{cases}$$

IV) Le terne dei valori  $(x, y, \lambda)$  che risolvono simultaneamente il sistema sono le candidate alle possibili soluzione del problema, ammesso che il problema abbia soluzioni.

### Esempio 8

Un soggetto con funzione utilità  $U(x, y) = xy$  e vincolo di bilancio dato dall'equazione  $g(x, y) = 2x + y = 100$  determinare la eventuale soluzione

Si osservi che  $\nabla g(x, y) = \{2, 1\} \neq (0, 0)$

Per determinare il massimo  $U(x, y) = xy$  soggetta a  $g(x, y) = 2x + y - 100 = 0$

Ci serviamo della funzione Lagrangiana  $L(x, y, \lambda) = xy - \lambda(2x + y - 100)$

Il suo gradiente posto uguale a zero, risulta:

$$\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = 0 \Leftrightarrow y - 2\lambda = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0 \Leftrightarrow x - \lambda = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \Leftrightarrow 2x + y = 100 \end{cases} = \begin{cases} y = 2\lambda \\ x = \lambda \\ 2x + y = 100 \end{cases}$$

Pertanto operando per sostituzione, dalla seconda equazione, la prima risulta  $y = 2x$  che sostituita nel vincolo,  $100 = 2x + 2x \Leftrightarrow x = 25$  e conseguentemente  $y = 50$  quindi la terna che soddisfa il sistema è  $P = (25, 50, 25)$ , per cui la funzione di utilità in tale punto avrà valore  $U(25, 50) = 1250$ , ovvero l'utilità massima.

### Esempio 9

Risolvere il problema di massimo o di minimo della seguente funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \text{ con vincolo } g(x, y) = x^2 + xy + y^2 = 3$$

Si osservi che  $\nabla g(x, y) = \{2x + y, x + 2y\} \neq (0, 0)$  si annulla nel punto  $(0, 0)$ , pertanto valore da scartare nelle soluzioni.

La funzione Lagrangiana risulta  $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x^2 + xy + y^2 - 3)$

ed il suo gradiente posto uguale a zero, è:

$$\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = 0 \Leftrightarrow 2x - \lambda(2x + y) = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0 \Leftrightarrow 2y - \lambda(2y + x) = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases} = \begin{cases} \lambda = \frac{2x}{(2x + y)} \\ 2y = \frac{2x}{(2x + y)}(2y + x) \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases}$$

$$\text{Ovvero } \begin{cases} \lambda = \frac{2x}{(2x + y)} \\ 2y(2x + y) = 2x(2y + x) \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases} = \begin{cases} \lambda = \frac{2x}{(2x + y)} \\ y^2 = x^2 \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases}$$

Quindi nella seconda equazione, essendo  $y = \pm x$ , per cui se  $y = x$  sostituito nel vincolo  $g(x, x) = x^2 + xx + x^2 = 3$  si hanno le soluzioni,  $(1,1)$  e  $(-1,-1)$ .

Se  $y = -x$  nel vincolo  $g(x, -x) = x^2 - xx + x^2 = 3$  si hanno le soluzioni,  $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$  e  $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ .

Se poi osserviamo che il sistema pone che deve essere rispettata anche la disuguaglianza,  $2x + y \neq 0$ , nel caso si abbia  $y = -2x$ , questa condizione nella prima equazione del sistema, determina  $2x - \lambda(2x + y) = 0 \Leftrightarrow 2x - \lambda(2x - 2x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  così come anche  $y = 0$ , ma questa soluzione non soddisfa il vincolo, pertanto viene rispettata la disuguaglianza  $2x + y \neq 0$ .

Trovati i quattro punti incriminati, è possibile vedere che nella funzione  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , assumono i seguenti valori:

$$f(1,1) = f(-1,-1) = 2$$

$$f(\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = f(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = 6$$

Pertanto è possibile concludere che i punti  $(1,1)$  e  $(-1,-1)$  risolvono il problema di minimizzazione, mentre i punti  $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$  e  $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$  quello di massimizzazione.

### Esempio 10

Un soggetto con funzione utilità  $U(x, y) = xy$  e vincolo di bilancio dato dall'equazione  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$  determinare la soluzione

Si osservi che  $\nabla g(x, y) = \{2x, 2y\} \neq (0, 0)$  si annulla nel punto  $(0, 0)$ , pertanto da scartare nelle soluzioni.

Il massimo  $f(x, y) = xy$  soggetta a  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

La funzione Lagrangiana è  $L(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

Ed il suo gradiente posto uguale a zero, risulta:

$$\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = 0 \Leftrightarrow y - 2x\lambda = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0 \Leftrightarrow x - 2y\lambda = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Pertanto i punti che soddisfano il sistema risultano:  $P_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ ,  $P_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ ,  $P_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$  e  $P_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ ; ai quali restano associati i seguenti punti stazionari  $S_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ,  $S_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ,  $S_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  e  $S_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ; per cui valutando la funzione in tali punti si ha  $f(S_1) = \frac{1}{2}$ ,  $f(S_2) = -\frac{1}{2}$ ,  $f(S_3) = -\frac{1}{2}$ , ed  $f(S_4) = \frac{1}{2}$ ; per cui confrontando i valori,  $S_1$  ed  $S_4$  risultano punti di massimo, mentre  $S_2$  ed  $S_3$  punti di minimo.

### Esempio 11

Un soggetto con funzione  $f(x, y) = xy$  e vincolo dato dalla disequazione  $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1 \leq 0$ , determinare la soluzione

Osserviamo che il vincolo è dato da una ellisse,  $x^2 + 2y^2 = 1$  e la disequazione  $x^2 + 2y^2 - 1 \leq 0$  rappresenta pertanto l'ellisse e la sua parte interna, e la funzione è continua al suo interno, pertanto per il Teorema di Weierstrass, ammette minimo e massimo al suo interno. Troviamo quindi i punti estremanti liberi

$$\text{Int}(S) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + 2y^2 - 1 < 0\}$$

Determiniamo gli estremi liberi con il gradiente Hessiano

$f'_x(x, y) = y$  e  $f'_y(x, y) = x$ , per cui

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases}$$

pertanto il punto  $(0,0)$  è l'unico punto stazionario interno ed il valore della funzione è  $f(0,0) = 0$ .

Il determinante Hessiano risulta  $H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$  pertanto il punto trovato è di sella.

Si osservi che  $\nabla g(x, y) = (2x, 4y) \neq (0,0)$  si annulla nel punto  $(0,0)$ , pertanto da scartare nelle soluzioni.

Concentriamoci sulla frontiera

$$\text{Frontiera } (S) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + 2y^2 - 1 = 0\}$$

La funzione Lagrangiana è  $L(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + 2y^2 - 1)$

Ed il suo gradiente posto uguale a zero, risulta:

$$\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = 0 \Leftrightarrow y - 2x\lambda = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0 \Leftrightarrow x - 4y\lambda = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 + 2y^2 = 0 \end{cases}$$

Pertanto i punti che soddisfano il sistema risultano:  $P_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ ,

$P_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ ,  $P_3 = \left(+\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$  e  $P_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ ; ai quali restano

associati i seguenti punti stazionari  $S_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ ,  $S_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ ,  $S_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$  e

$S_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ ; per cui valutando la funzione in tali punti si ha  $f(S_1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ,  $f(S_2) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ,

$f(S_3) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ , ed  $f(S_4) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ; per cui confrontando i valori,  $S_1$  ed  $S_4$  risultano punti di

massimo, mentre  $S_2$  ed  $S_3$  punti di minimo.

## Indice analitico

- Asintoto
  - obliquo, 70
  - orizzontale, 69
  - verticale, 68
- Caratteristica di una matrice, 112
- Codominio, 10
- Complemento algebrico, 107
- Derivabilità, 75
- Derivata (e)
  - delle funzioni elementari, 78
  - di funzioni elementari, 78
  - di funzioni composte, 80
  - di secondo ordine, 80
  - parziale, 121
  - significato geometrico, 74
- Determinante di una matrice, 107
- Dominio, 10
- Estremanti relativi interni, 122
- Estremo inferiore
  - di un insieme, 7
  - di una funzione, 19
- Estremo superiore
  - di un insieme, 7
  - di una funzione, 19
- Funzione
  - arcocoseno, 34
  - arcocotangente, 36
  - arcoseno, 34
  - arcotangente, 35
  - biiettiva, 14
  - composta, 17
  - concava, 24
  - convessa, 23
  - continua, 60
  - costante, 27
  - crescente, 20
  - convergente, 48
  - decrescente, 20
  - divergente, 48
  - esponenziale, 30, 31
  - identica, 27
  - ingettiva, 11
  - integrabile secondo Riemann, 99
  - inversa, 111
  - invertibile, 14
  - illimitata, 19
  - lagrangiana, 129
  - limitata, 19
  - limitata inferiormente, 19
  - limitata superiormente, 19
  - logaritmico, 31, 32
  - monotona, 20
  - periodica, 25
  - potenza con  $n$  dispari, 29
  - potenza con  $n$  pari, 28
  - radice con  $n$  dispari, 30
  - radice con  $n$  pari, 29
  - seno e coseno, 32, 33
  - strettamente crescente, 81
  - strettamente concava, 81
  - strettamente convessa, 81
  - strettamente decrescente, 81
  - strettamente monotona, 20
  - surgettiva, 13
  - tangente e cotangente, 33, 34
  - trigonometrica, 32
  - valore assoluto, 43
- Gradiente della funzione, 122
- Grafici di funzioni, 27
- Insieme(i)
  - contigui, 5
  - di arrivo, 10
  - dei numeri complessi, 6
  - dei numeri interi, 5
  - dei numeri irrazionali, 6
  - dei numeri naturali, 5
  - dei numeri razionali, 6

- dei numeri reali, 6
- disgiunti, 5
- finito, 3
- infinito, 3
- separati, 5
- unitario, 3
- vuoto, 3
- Integrale(i)
  - di Riemann, 99
  - indefiniti immediati, 89
  - indefiniti quasi immediati, 90
  - indefinito, 88
  - indefinito delle funzioni razionali, 92
- Inclusione, 4
- Intersezione, 4
- Intervallo, 4
- Intorno di un punto, 46, 119
- Limite(i)
  - destro, 48
  - di operazioni tra funzioni, 52
  - sinistro, 48
- Maggiorante
  - di un insieme, 7
  - di una funzione, 18
- Massimo
  - assoluto di una funzione, 82, 120
  - di un insieme, 6
  - di una funzione, 18
  - relativo di una funzione, 82, 120
- Matrice(i)
  - aggiunta, 111
  - colonna, 101
  - completa di un sistema lineare, 109
  - commutabile, 104
  - diagonale principale, 103
  - diagonale secondaria, 103
  - identità, 103
  - incompleta di un sistema lineare, 108
  - inversa, 11
  - nulla, 102
  - opposte, 102
  - quadrata, 101
  - riga, 101
  - singolare, 109
  - trasposta, 110
- Minimo
  - assoluto di una funzione, 82, 120
  - di una funzione, 18
  - di un insieme, 6
  - relativo di una funzione, 82, 120
- Minorante
  - di un insieme, 7
  - di una funzione, 18
- Minore complementare, 107
- Numero(i)
  - di Nepero, 59
- Operazioni tra funzioni, 17
- Partizione, 8
- Primitiva, 86
- Prodotto
  - tra due matrici, 104
- Proprietà
  - di linearità dell'integrale indefinito, 89
  - delle matrici, 103
  - sugli insiemi, 5
- Punto
  - angoloso, 76
  - di accumulazione, 46
  - di cuspide, 77
  - di discontinuità, 60
  - di discontinuità di I specie, 62
  - di discontinuità di II specie, 62
  - di discontinuità eliminabile, 61
  - di flesso ascendente, 78
  - di flesso discendente, 78
  - di sella, 124
  - interno di un insieme, 119
  - isolato, 47
  - stazionario, 123
- Rango o caratteristica di una matrice, 112
- Rapporto incrementale, 73

Sistema lineare  
   compatibile, 109  
   determinato, 109  
   di Cramer, 109  
   omogeneo, 112

Sottoinsieme aperto, 119

Teorema  
   degli zeri, 66  
   dei punti critici, 83  
   del confronto (I), 54  
   del confronto (II), 55  
   del confronto (III), 56  
   del punto fisso, 67  
   dell'unicità del limite, 53  
   della media dell'integrale secondo  
     Riemann, 99  
   della media degli integrali definiti, 99  
   della permanenza del segno, 55  
   delle condizioni necessarie per i punti  
     estremanti, 129  
   di Bolzano, 65  
   di de l'Hopital, 83  
   di Fermat, 84, 123  
   di Rolle, 85  
   di Rouché-Capelli, 112  
   0, di Weierstrass, 123  
   di Weierstrass, 65  
   II, sulle condizioni sufficienti del  
     secondo ordine per gli estremanti  
     interni, 124  
   fondamentale del calcolo integrale, 100  
   sul limite della funzione reciproca, 58  
   sul limite della funzione reciproca con  
     forma indeterminata, 58  
   sul limite delle funzioni composte, 57  
   sull'esistenza di infinite primitive, 87  
   sulla caratterizzazione degli intervalli, 8  
   sulla concavità, 24  
   sulla convessità, 24  
   sulla continuità delle funzioni  
     elementari, 63  
   sulla continuità delle operazioni tra  
     funzioni, 64  
   sulla continuità delle funzioni  
     composte, 64  
   sulla continuità delle funzioni  
     derivabili, 75  
   sulla differenza di 2 primitive, 88  
   sulla invertibilità di una funzione  
     strettamente monotona, 22

Uguaglianza  
   degli insiemi, 4  
   tra matrici, 102

Unione, 4

Valore assoluto, 43